

Малочутливими та малоспецифічними є традиційні тести:

- 1) тест Ludington:
  - чутливість – 38,1%;
  - специфічність – 58,33%;
- 2) тест Andrews:
  - чутливість – 34,92%;
  - специфічність – 66,67%.

## Література

1. *Altman D. G.* Statistics Notes : Diagnostic tests 1 : sensitivity and specificity / *D. G. Altman, J. M. Bland* // *BMJ*. – 1994. – Vol. 308. – P. 1552–1554.
2. *Cooper D. E.* Anatomy, histology and vascularity of the glenoid labrum. An anatomical study / *Cooper D. E., Arnoczky S. P., O'Brian S. J.* // *J. Bone Jt Surg. (Am)*. – Vol. 74-A. – 1992. – P. 46–52.
3. *Detrisac D. A.* Arthroscopic Shoulder anatomy: Pathology and Surgical Implications / *D. A. Detrisac, L. L. Johnson*. – Thorofare, 1986. – 325 p.
4. *McCaughey R.* The anatomical basis of the resisted supination external rotation test for superior labral anterior to posterior lesions / *McCaughey R., Green R. A., Taylor N. F.* // *Clin Anat*. – 2009. – Vol. 22, № 6. – P. 665–670.
5. *Pettrone F. A.* Athletic injuries of the shoulder / *F. A. Pettrone*. – New York : Mc.Grow-Hill Inc., 1995. – 452 p.
6. *Schlecbter J. A.* The passive distraction test: a new diagnostic aid for clinically significant superior labral pathology / *Schlecbter J. A., Summa S., Rubin B. D.* // *Arthroscopy*. – 2009. – Vol. 25, № 12. – P. 1374–1379.
7. *Sholder arthroscopy and MRI techniques* / *Lajtai G., Snider S. J., Applegate G. R. [et al.]*. – Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokio : Springer, 2007. – 345 p.
8. SLAP-lesions: anatomy, clinical presentation, MR imaging diagnosis and characterization / *Chang D., Mohana-Borges A., Borso M., Chung C. B.* // *Eur. J. Radiol*. – 2008. – Vol. 68, № 1. – P. 72–87.
9. Special physical examination tests for superior labrum anterior posterior shoulder tears are clinically limited and invalid : a diagnostic systematic review / *Calvert E., Chambers G. K., Regan W., Hawkins R. H., Leith J. M.* // *J. Clin. Epidemiol*. – 2009. – Vol. 62, № 5. – P. 558–563.
10. *Walton D. M.* Identifying SLAP lesions : a meta-analysis of clinical tests and exercise in clinical reasoning / *D. M. Walton, J. Sadi* // *Phys. Ther. Sport*. – 2008. – Vol. 9, № 4. – P. 167–176.

УДК 616.089-77-007.001.57(0833)

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАВАНТАЖЕНЬ ЧАШКИ ЕНДОПРОТЕЗА, ІМПЛАНТОВАНОЇ В УМОВАХ ЗАЛИШКОВОЇ ДИСПЛАЗІЇ КУЛЬШОВОЇ ЗАПАДИНИ

*В. П. Торчинський, А. Д. Супрун<sup>1</sup>*  
ДУ “Інститут травматології та ортопедії АМН України”, м. Київ  
<sup>1</sup>Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, Україна

### **MATHEMATIC MODEL OF LOADING OF ENDOPROTHESIS CUP IMPLANTED IN RESIDUAL ACETABULAR DYSPLASIA**

*V. P. Torchynskiy, A. D. Suprun*

*The proposed mathematic model of the acetabulum with implanted acetabular component of the prosthesis permits to define zones of stress loads occurring in areas of prosthesis cup-head contact surfaces and to recommend the most efficient method of the implantation of the prosthesis cup in each individual case and in different degree of residual acetabular dysplasia.*

*Key words: hip joint, residual acetabular dysplasia, hip prosthesis, mathematical model.*

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОК ЧАШКИ ЭНДОПРОТЕЗА, ИМПЛАНТИРОВАННОЙ В УСЛОВИЯХ ОСТАТОЧНОЙ ДИСПЛАЗИИ ВЕРТЛУЖНОЙ ВПАДИНЫ**

*В. П. Торчинский, А. Д. Супрун*

*Предложена математическая модель вертлужной впадины с имплантированным ацетабулярным компонентом эндопротеза позволяет определять зоны стрессовых нагрузок, которые возникают в зонах контактирующих поверхностей чашки и головки эндопротеза.*

за и рекомендовать наиболее рациональный вариант имплантации чашки эндопротеза в каждом отдельном случае и при разных степенях остаточной дисплазии вертлужной впадины.

Ключевые слова: тазобедренный сустав, остаточная дисплазия вертлужной впадины, эндопротез тазобедренного сустава, математическое моделирование.

## Вступ

Імплантація чашки ендопротеза кульшового суглоба в умовах залишкової дисплазії кульшової западини належить до складних та проблематичних випадків ендопротезування кульшового суглоба. Як уже було зазначено багатьма авторами та нашими попередніми повідомленнями [1], під час імплантації ацетабулярного компонента ендопротеза кульшового суглоба в умовах неповноцінної западини перед хірургом постають важливі питання вибору рівня розташування ендопротеза, способу його фіксації, доцільності виконання кісткової пластики, можливі відхилення від нормальних кутів інклінації чашки ендопротеза. Від якості виконання цього етапу ендопротезування залежить результат хірургічного втручання та терміни функціонування ендопротеза. Саме питанню функціонування чашки ендопротеза при різних кутах її інклінації присвячено це дослідження [1–5].

**Мета** роботи – визначити зони стресових навантажень, які виникають у ділянках контактуючих поверхонь чашки й головки ендопротеза, та найбільш раціональний варіант імплантації чашки ендопротеза.

## Матеріали і методи

Нами запропонована математична модель кульшової западини з імплантованим ацетабулярним компонентом ендопротеза, яка дозволяє визначити зони стресових навантажень, які виникають у ділянках контакту чашки й головки ендопротеза та між зовнішньою поверхнею чашки та кульшовою западиною.

На рис. 1 представлена схема кульшової западини з імплантованою чашкою ендопротеза у фронтальній площині, у якій і виконувався розрахунок.

На рис. 1 зображене коло – це *переріз* головки ендопротеза у площині  $(y, z)$ .

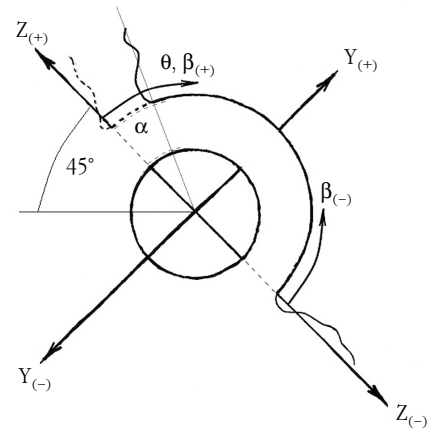
*Півколо* вище і правіше головки – це *переріз* зовнішньої поверхні чашки ендопротеза, що відповідає зоні її контакту з кульшовою западиною.

Зображений *жирним пунктиром* латеральний край кульшової западини відповідає варіанту норми; *суцільною лінією* – варіант залишкової дисплазії кульшової западини, яка характеризується кутом  $\alpha$  і, як усі інші кути, відраховується від горизонтальної площини.

*Проміжок* між головкою ендопротеза та кульшовою западиною відповідає чашці ендопротеза.

*Пунктирами*, що співпадають з оссю  $z$ , зображено переріз поверхні торця чашки ендопротеза.

*Тоненьким пунктиром* біля верхнього перерізу торця показано невелику частину перерізу самого ендопротеза.



**Рис. 1.** Схематичне зображення правої кульшової западини з імплантованою під кутом  $45^\circ$  до горизонталі (біспінальна лінія) чашкою ендопротеза. Усі кути відраховуються від горизонтальної площини (детальний опис схеми – у тексті)

Кут  $\beta$  кількісно задає величину повороту (інклінації) чашки ендопротеза навколо осі  $x$  (додатна піввісь цієї осі напрямлена до читача, а від’ємна – від нього).

*Стрілочками* на рисунку показано прийняті при моделюванні додатний та від’ємний напрямки повороту чашки ендопротеза на кут  $\beta$ .

Кут  $\theta$  при моделюванні “відслідковує” розподіл сил по поверхнях від додатного напрямку осі  $z$  ( $\theta = 45^\circ$ ) до від’ємного ( $\theta = 225^\circ$ ) і формально відповідає повороту навколо осі  $x$  за годинниковою стрілкою.

На рисунку також показані прийняті при розрахунках додатні та від’ємні напрямки осей  $y, z$ .

Для адекватного опису розподілу загальної сили навантаження (далі позначатимемо її через  $f$ ) у перерізі, що розглядається, перш за все необхідно знайти тиск  $p = f/S$  на всю поверхню  $S$  контакту для обох ситуацій:

- *одна* – між кульшовою западиною й зовнішньою частиною чашки ендопротеза за відсутності та наявності залишкової дисплазії кульшової западини;
- *друга* – між внутрішньою частиною чашки і головкою ендопротеза.

Оскільки обидві поверхні мають симетрію півсфер, то спосіб розрахунку тиску однаковий. А саме, розраховується загальний випадок для сегмента півсфери при наявності дисплазії (що описується кутом  $\alpha$ ) або повороту чашки ендопротеза (що асоціюється з кутом  $\beta$ ). Якщо дисплазія або поворот чашки ендопротеза відсутні, то в отриманому результаті відповідний кут слід покласти рівним значенню, яке відповідає їх відсутності.

Можна показати, що тиск визначається таким базовим<sup>1</sup> співвідношенням:

$$p_{bas}(\gamma) = \frac{f}{2(\pi - \gamma)R^2}. \quad (1)$$

У цьому співвідношенні через  $\gamma$  позначено будь-який з кутів –  $\alpha$  або  $\beta$ , а через  $R$  – будь-який з радіусів: або головки ендпротеза, або кульшової западини. Оскільки тиск  $p_{bas}(\gamma)$  у базовій системі відліку, що розглядається, не може залежати від напрямку повороту<sup>2</sup>, то зрозуміло, що  $\gamma \geq 0$  незалежно від напрямку повороту чашки ендпротеза. Знаючи тепер базовий тиск, можна знайти базовий розподіл густини<sup>3</sup> сили на одиничну кутову поверхню:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{bas}(\gamma, \theta, \varphi) &= \pm \mathbf{e}_r(\theta, \varphi) p_{bas}(\gamma) R^2 \sin(\theta) = \\ &= \pm \mathbf{e}_r(\theta, \varphi) \frac{f \sin(\theta)}{2(\pi - \gamma)}. \end{aligned} \quad (2)$$

У цьому означенні знак “плюс” відповідає розподілу по поверхні головки ендпротеза, а знак “мінус” – розподілу по поверхні кульшової западини;  $\mathbf{e}_r(\theta, \varphi)$  – це одиничний вектор нормалі до поверхонь. Його загальне означення таке ж, як і в роботі [1]:

$$\mathbf{e}_r(\theta, \varphi) = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)).$$

Для перерізу, що розглядається на рис. 1, виконується умова:  $\varphi = \pi/2$  ( $\varphi = 90^\circ$ )<sup>4</sup>, і тоді означення вектора нормалі спрощується:

$$\mathbf{e}_r(\theta) = (0, \sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Тобто  $x$  – компонента розглядуваної густини сили відсутня. Це також видно і з рис. 1. В означенні ж (2) зникає залежність від кута  $\varphi$ :

$$\mathbf{F}_{bas}(\gamma, \theta) = \pm \mathbf{e}_r(\theta) \frac{f \sin(\theta)}{2(\pi - \gamma)}.$$

Густина сили  $\mathbf{F}_{bas}$  має ще одну важливу особливість – вона не залежить від радіусів сферичних поверхонь із спільним центром. Це дає можливість порівнювати розподіли сил на таких поверхнях.

Далі аналізуватимуться лише абсолютні значення розглядуваної сили, але зі своїм знаком для кожної поверхні:

$$F_{bas}(\gamma, \theta) = \pm \frac{f \sin(\theta)}{2(\pi - \gamma)}. \quad (3)$$

Для зменшення кількості параметрів, які потребують числової означеності при розрахунках, силу навантаження  $f$  покладатимемо рівною 1, тобто  $f = 1$ . У цьому разі вираз (3) спрощується до вигляду:

$$F_{bas}(\gamma, \theta) = \pm \frac{\sin(\theta)}{2(\pi - \gamma)}, \quad (4)$$

у якому всі параметри, які залишилися, – це кути, а густина сили  $F_{bas}(\gamma, \theta)$  фактично вимірюється у відсотках (якщо помножити її на 100) від сили навантаження  $f$ .

На основі базового розподілу (4), після не дуже складного, але доволі громіздкого розгляду, вдалося побудувати числовий алгоритм, який одночасно може моделювати б незвідних одна до одної ситуацій. Для поверхні контакту кульшової западини та верхньої частини чашки ендпротеза цей алгоритм визначається виразом:

$$F_{cap}(\alpha, \beta, \theta) = \begin{cases} F_{cap}^+(\alpha, \theta), \text{ якщо } 45^\circ \leq \beta \leq \alpha; \\ F_{cap}^+(\beta, \theta), \text{ якщо } 45^\circ \leq \alpha < \beta; \\ 0, \text{ якщо } [(\beta < 45^\circ) \text{ та } (45^\circ \leq \theta \leq \alpha)] \text{ або} \\ \quad [(\beta < 45^\circ) \text{ та } (180^\circ + \beta \leq \theta \leq 225^\circ)]; \\ \frac{135^\circ + \beta}{180^\circ - \alpha + \beta} F_{cap}^-(\beta, \theta), \text{ якщо} \\ \quad [(\beta < 45^\circ) \text{ та } (\alpha < \theta < 180^\circ + \beta)]. \end{cases} \quad (5)$$

Квадратні дужки тут означають, що умови, які в них записані, виконуються одночасно, а розподіли  $F_{cap}^+(\gamma, \theta)$  та  $F_{cap}^-(\gamma, \theta)$ <sup>5</sup> визначаються співвідношеннями:

$$F_{cap}^+(\gamma, \theta) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 45^\circ \leq \theta \leq \gamma; \\ F_{cap}^0(\gamma, \theta), \text{ якщо } \gamma \leq \theta \leq 225^\circ, \end{cases}$$

$$F_{cap}^-(\gamma, \theta) = \begin{cases} F_{cap}^0(\gamma, \theta), \text{ якщо } 45^\circ \leq \theta \leq 180^\circ + \gamma; \\ 0, \text{ якщо } 180^\circ + \gamma \leq \theta \leq 225^\circ. \end{cases}$$

І, нарешті, функція  $F_{cap}^0(\gamma, \theta)$  пов'язана з базовою функцією (4) для знаку “мінус” так:

$$F_{cap}^0(\gamma, \theta) = \begin{cases} F_{bas}(\gamma - 45^\circ, \theta - 45^\circ), \text{ якщо } \gamma \geq 45^\circ; \\ F_{bas}(45^\circ - \gamma, \theta - 45^\circ), \text{ якщо } \gamma < 45^\circ. \end{cases}$$

Що ж стосується аналогічного розподілу на зрізі головки ендпротеза, то цей розподіл відрізняється від наведеного вище тим, що він зміщується як ціле разом з поворотом чашки ендпротеза і має протилежний знак. Виходячи з цього, для головки ендпротеза можна записати:

$$F_{bead}(\beta, \theta) = -F_{cap}(45^\circ, 45^\circ, \theta - \beta + 45^\circ).$$

Нагадаємо, що в розподілах  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  та  $F_{bead}(\beta, \theta)$  початкове значення всіх кутів дорівнює  $45^\circ$ . Аналізувалась також досить показова характеристика:

$$\Delta F(\alpha, \beta, \theta) = F_{cap}(\alpha, \beta, \theta) + F_{bead}(\beta, \theta),$$

яка по суті являє собою залишкову різницю розподілу сил на обох поверхнях разом.

<sup>1</sup> Під базовими співвідношеннями маються на увазі такі, що сформульовані в системі координат  $(y, z)$ , зображеній на рис. 1. У цій системі кути  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\theta$  відраховуються від додатного напрямку осі  $z$ , а всі співвідношення набувають найпростішого вигляду.

<sup>2</sup> У базовій системі відліку поворот за годинниковою стрілкою відповідає додатним кутам, а поворот проти годинникової стрілки – від'ємним.

<sup>3</sup> Така густина визначається як сила, віднесена до кутової площадки, розміром  $1^\circ \times 1^\circ$ .

<sup>4</sup> Кут  $\varphi$  має математичний зміст, аналогічний до кута  $\theta$ , але відрізняється тим, що формально “відслідковує” поворот навколо осі  $z$  і змінюється так, що значення  $\varphi=0$  відповідає додатному напрямку осі  $x$  (на читача). А зміна цього кута відбувається від читача через додатний напрямок осі  $y$  ( $\varphi=\pi/2$ ) до від'ємного напрямку осі  $x$  від читача ( $\varphi=\pi$ ) і далі через від'ємний напрямок осі  $y$  ( $\varphi=3\pi/2$ ) назад до додатного напрямку осі  $x$  на читача ( $\varphi=2\pi$ ).

<sup>5</sup> Кут  $\gamma$  має таке саме смислове навантаження, що й у формулі (4).

## Результати та їх обговорення

### Аналіз шести ситуацій, що не приводяться одна до одної

Щодо цих шести ситуацій, то **перша ситуація**, яку можна назвати *нормальною* (рис. 2), характеризується тим, що дисплазія відсутня ( $\alpha = 45^\circ$ ) і поворот чашки ендпротеза теж відсутній ( $\beta = 45^\circ$ ), тобто вона імплантована в нормальному положенні інклінації  $45^\circ$ . По суті з неї можна отримати будь-яку з 5 інших. Тому означення (5) і сформульоване як фрагментарно-неперервне, а саме, як таке, що має чотири гілки, які відповідають усім іншим ситуаціям.

У цій ситуації, як видно з рис. 2, обидві сили симетричні відносно горизонтальної нульової осі, і кожна з них має максимум (за абсолютною величиною) у точці  $\theta = 135^\circ$  і досягає в цій точці значень, відповідно:  $-16\%$  від сили  $f$  – для густини сили  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  і  $+16\%$  – для густини сили  $F_{bead}(\beta, \theta)$ . Це означає, що максимум сили  $f$  відповідає осі шийки ендпротеза і розташований у центрі кульшової западини та центрі чашки ендпротеза.

**Друга ситуація** відповідає відсутності дисплазії ( $\alpha = 45^\circ$ ), але додатній (за годинниковою стрілкою) інклінації чашки протеза ( $\beta > 45^\circ$ ) – інклінація в більш вертикальне положення. Для ілюстрації розподілів у цьому випадку кут інклінації чашки протеза  $\beta$  взято рівним  $67^\circ$ , а самі розподіли наведено на рис. 3.

З графіків на рис. 3 видно, що тепер розподіл густини сили  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  (найнижча крива) уздовж перерізу кульшової западини, що розглядається рівний нулю від  $45$  до  $67^\circ$ , а при значенні  $\theta = 67^\circ$  відбувається стрибок цієї густини на  $-7\%$  від значення загальної сили навантаження  $f$ . Наявність такого стрибка означає, що чашка протеза в цьому місці перебуває під стресовим навантаженням. Далі (при  $\theta > 67^\circ$ ) густина цієї сили розподілена майже так, як при нормальній ситуації – з максимумом у точці  $\theta = 135^\circ$  – але у кожній точці має дещо більші значення за рахунок зменшення поверхні безпосереднього контакту між чашкою протеза та кульшовою западиною. Зокрема в точці максимуму  $\theta = 135^\circ$  таке збільшення становить  $2\%$ . Тобто в максимумі густини сили  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  вона вже становить  $-18\%$ , а не  $-16\%$  від сили  $f$ , як було у випадку норми (див. рис. 2).

Дещо інший вигляд тут має розподіл густини сили  $F_{bead}(\beta, \theta)$  (найвища крива).

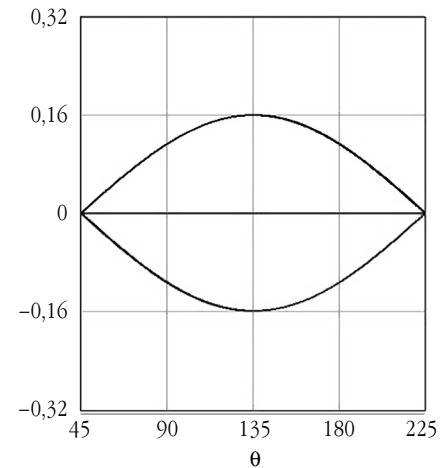
$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$F_{cap}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$

$$F_{bead}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$

$$\Delta F\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$



**Рис. 2.** Розподіл густин сил для *першої, нормальної, ситуації*:

нижня крива –  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$ ; верхня крива –  $F_{bead}(\beta, \theta)$ ;  
середня крива –  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$ .

Для цієї ситуації розподіл  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  повністю співпадає з нулем

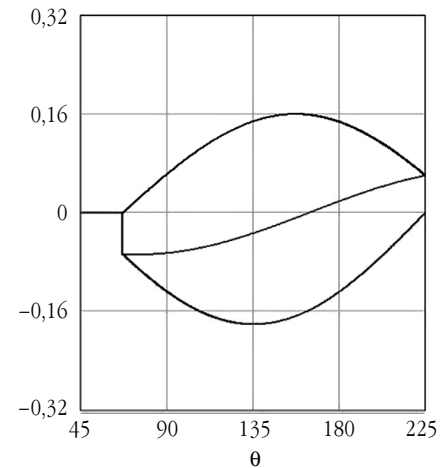
$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 67^\circ$$

$$F_{cap}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$

$$F_{bead}\left(\frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$

$$\Delta F\left(\frac{\pi}{180} \cdot \alpha, \frac{\pi}{180} \cdot \beta, \frac{\pi}{180} \cdot \theta\right)$$



**Рис. 3.** Розподіл густин сил для *другої ситуації*, коли дисплазія відсутня ( $\alpha = 45^\circ$ ), а чашка ендпротеза повернута в положення  $\beta = 67^\circ$ .

Відповідність сил така ж, як і на рис. 2:

найнижча крива –  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$ ; найвища крива –  $F_{bead}(\beta, \theta)$ ;  
середня крива –  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$

Цей розподіл “зсувається” як ціле відносно фіксованої системи відліку, означеної на рис. 1, так, що його максимум потрапляє в точку  $\theta = 157^\circ$ . При цьому амплітудне його значення не змінюється, оскільки не змінюється поверхня контакту кульшової головки та чашки ендпротеза, і в максимумі, наприклад, значення густини сили  $F_{bead}(\beta, \theta)$ , залишається рівним  $+16\%$  від сили  $f$ . Протилежна частина чашки ендпротеза при такому повороті теж перебуває під стресовим навантаженням у точці  $\theta = 225^\circ$ , але стрибок густини сили становить  $+6\%$ .

І, нарешті, густина сили  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  (середня крива) розподілена так, що лівіше точки  $\theta = 165^\circ$  (у якій вона дорівнює 0) ця сила від’ємна, за винятком ділянки  $45^\circ \leq \theta < 67^\circ$ , де вона теж дорівнює нулю. Правіше цієї точки ( $\theta = 165^\circ$ ) сила  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  додатна. Такий розподіл густини сили  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  свідчить про наявність моменту сил у всій системі “чашка ендпротеза – кульшова западина”, що створює її механічну нестійкість.

**Третя ситуація** (рис. 4) відповідає відсутності дисплазії ( $\alpha = 45^\circ$ ), але від'ємному (проти годинникової стрілки) повороту чашки ендопротеза  $\beta < 45^\circ$  – інклинація в більш горизонтальне положення. Для ілюстрації розподілів у цьому випадку кут повороту чашки ендопротеза  $\beta$  взято рівним  $23^\circ$ , а самі розподіли наведено на рис. 4.

Як видно, розподіл густин сил тут практично прямо протилежний розподілам, показаним на рис. 3. Це завдяки тому, що відносно осі  $z$  (див. рис. 1) чашка протеза повернута на той же кут, але в протилежний бік. Основні характеристики розподілів у цьому випадку такі.

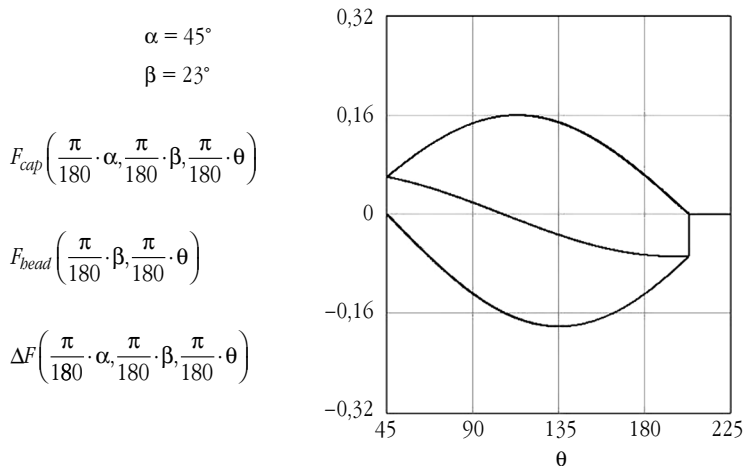
Густина сили  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  (нижня крива) теж має максимум у точці  $\theta = 135^\circ$  і досягає в цій точці значення  $-18\%$  від сили  $f$ . Густина сили  $F_{bead}(\beta, \theta)$  (верхня крива) у максимумі не змінюється ( $+16\%$ ), але сам максимум тепер знаходиться у точці  $\theta = 113^\circ$ .

І, нарешті, густина сили  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  (середня крива) тепер проходить через значення 0 при  $\theta = 105^\circ$ ; справа від цієї точки розподіл  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  від'ємний і має стресовий стрибок у точці  $\theta = 203^\circ$  ( $-7\%$ ), а зліва від неї він додатний і має стресовий стрибок при  $\theta = 45^\circ$  ( $+6\%$ ).

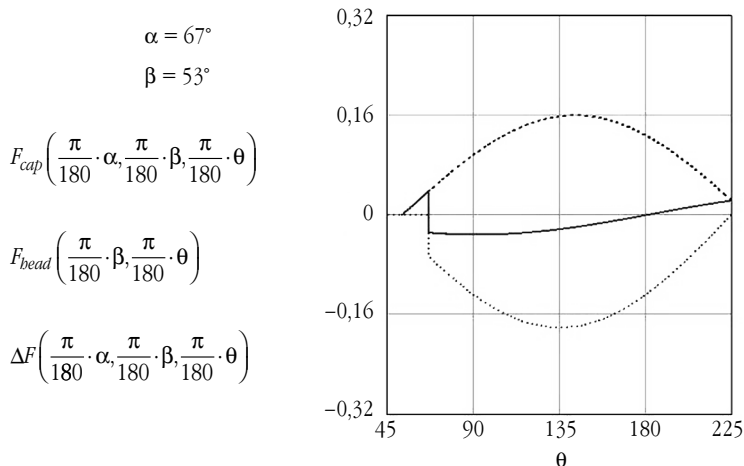
**Четверта, п'ята та шоста ситуації** вже пов'язані з наявністю залишкової дисплазії кульшової западини.

Для виразності графічного зображення **четвертої ситуації** покладатимемо залишкову дисплазію кульшової западини рівною  $67^\circ$ . Тобто  $\alpha = 67^\circ$ . При цьому особливість четвертої ситуації полягає в тому, що кут повороту  $\beta$  не перевищує дисплазії:  $45^\circ < \beta < \alpha$ , тобто у цьому разі  $45^\circ < \beta < 67^\circ$ . Відповідний розподіл наведено на рис. 5 для значення  $\beta = 53^\circ$ . З рисунку добре видно, що в цьому разі особливу увагу привертає саме залишковий розподіл сил  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$ . Він двічі перетинає нульову ось: при  $\theta = 180^\circ$  та при  $\theta = 67^\circ$ , тим самим дещо компенсуючи момент сил, який призводить до механічної нестійкості системи. Але при цьому в точці  $\theta = 67^\circ$  виникає стресове навантаження, подібне до того, яке створюють ножиці. Звичайно, що таке навантаження може призводити до механічного ушкодження (або навіть руйнування) чашки ендопротеза в цьому місці.

Інші основні характеристики розподілів для цього випадку такі. Від  $\theta = 45^\circ$  до  $\theta = 53^\circ$  – усі розподіли дорівнюють нулю, оскільки в цьому діапазоні немає безпосе-



**Рис. 4.** Розподіл густин сил для *третьої ситуації*, коли дисплазія відсутня ( $\alpha = 45^\circ$ ), а чашка ендопротеза повернута у положення  $\beta = 23^\circ$ . Відповідність сил така ж, як і на рис. 2 та 3: найнижча крива –  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$ ; найвища крива –  $F_{bead}(\beta, \theta)$ ; середня крива –  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$



**Рис. 5.** Розподіл густин сил для ситуації, коли дисплазія  $\epsilon > 45^\circ$ , а чашка ендопротеза повернута на кут  $\beta$ , який задовольняє умові  $45^\circ < \beta < \alpha$ . На цьому рисунку для ілюстрації прийнято:  $\alpha = 67^\circ$ ,  $\beta = 53^\circ$ . Відповідність сил така ж, як і на рис. 2–4, але для виразності зображення тут найнижча крива для  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  виконана точковим пунктиром, найвища крива для  $F_{bead}(\beta, \theta)$  – штрих-пунктиром і середня крива для  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  – суцільною лінією

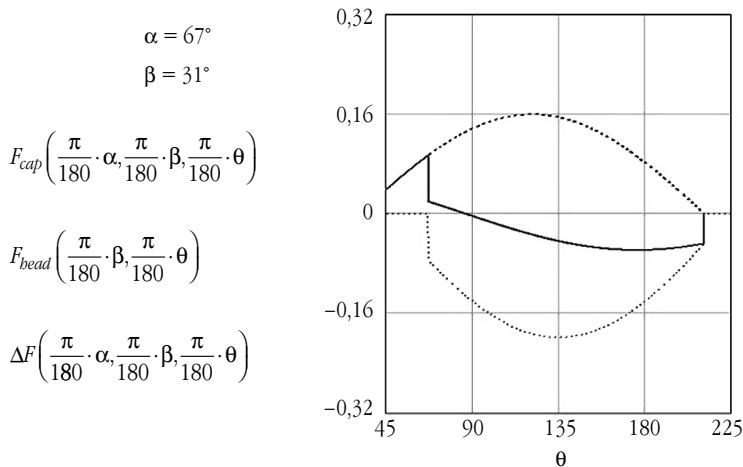
реднього контакту між поверхнями. Розподіл  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  (нижня крива) залишається нульовим аж до значення  $\theta = 67^\circ$ , а після цього має стресовий стрибок зразу до значення  $-6\%$  і досягає максимального значення  $-18\%$  при  $\theta = 135^\circ$ . Розподіл  $F_{bead}(\beta, \theta)$  зсунутий вправо як ціле і тому починає зростати лише при  $\theta = 53^\circ$  і досягає “нормального” ( $+16\%$ ) максимуму в точці  $\theta = 143^\circ$ .

Слід зауважити, що схожі стреси, наведені на рис. 3 та 4, на відміну від розглядуваного на рис. 5, мають природу простого стиску. З цієї причини вони можуть мати менш руйнівні наслідки.

**П'ята ситуація** особлива тим, що дисплазія й кут повороту чашки задовольняють обернену нерівність:  $45^\circ < \alpha < \beta$ . Для визначеності тут візьмемо:  $\beta = 67^\circ$ ,  $\alpha = 53^\circ$ . Результати числового моделювання по-

казують, що ця ситуація точно співпадає із зображеною на рис. 3 (**друга ситуація**). Це не дивно, тому, що при повороті чашки ендопротеза на кут більший за дисплазію система вже не відчуває її наявності, а якщо  $\beta = 67^\circ$ , то це точно співпадає з **другою ситуацією**.

І, нарешті, **шоста ситуація** відповідає від'ємному повороту чашки ендопротеза, тобто повороту проти годинникової стрілки. У цьому разі виконується умова:  $\beta < 45^\circ < \alpha$ . Для того щоб мати можливість порівнювати цей випадок з попередніми, покладемо дисплазію рівною  $67^\circ$ , тобто  $\alpha = 67^\circ$ . Відповідно для повороту чашки ендопротеза візьмемо:  $\beta = 31^\circ$ . Результати числового моделювання для цього випадку наведені на рис. 6.



**Рис. 6.** Розподіл густин сил для ситуації, коли дисплазія є  $\alpha > 45^\circ$ , а чашка ендопротеза повернута на кут  $\beta$ , який задовольняє умові  $\beta < 45^\circ < \alpha$ . На рисунку для ілюстрації прийнято:  $\alpha = 67^\circ$ ,  $\beta = 31^\circ$ . Відповідність сил така ж, як і на рис. 2–5, а розмітка кривих – як на рис. 5

Розглядуваний випадок якісно схожий на **третю ситуацію** (див. рис. 4).

Відміна полягає тільки в тому, що лівий край розподілу для чашки ендопротеза  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$ , так само як і правий, теж “відірваний” від краю  $\theta = 45^\circ$ . При цьому ділянка контакту чашки ендопротеза і кульшової западини становить усього  $144^\circ$ , оскільки з-під навантаження вилучається  $36^\circ$  ( $22^\circ$  – від дисплазії і  $14^\circ$  – від горизонтальної інклинації), що суттєво менше ніж в інших ситуаціях<sup>6</sup>. Від цього сумарне стресове навантаження  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  на чашку ендопротеза при  $\theta = 67^\circ$  (суцільна крива) має природу, близьку до аналогічного навантаження в **четвертій ситуації** (див. рис. 5), але повністю знаходиться над нульовою оссю<sup>7</sup> і має величину, близьку до 8%. Але при цьому розглядувана ситуація гірша за попередню тим, що тепер момент сумарної сили  $\Delta F(\alpha, \beta, \theta)$  відносно точки  $\theta = 87^\circ$ , де ця сила перетинає нульову ось, уже нічим не компенсується хоча б частково, а механічна нестійкість системи “кульшовий ендопротез – кульшова западина” збільшується порівняно з **четвертою ситуацією** (див. рис. 5).

Інші основні характеристики цієї ситуації, крім уже перерахованих, такі. Сила  $F_{cap}(\alpha, \beta, \theta)$  (нижня крива) у точці максимуму ( $\theta = 135^\circ$ ) досягає більшого, ніж у попередніх ситуаціях значення<sup>8</sup>, а саме –20%, за рахунок зменшення площі безпосереднього контакту між верхньою частиною чашки ендопротеза та кульшовою западиною. Цей розподіл має дві стресові точки: одна, яка вже обговорювалась, при  $\theta = 67^\circ$ , друга – при  $\theta = 211^\circ$ . Сила  $F_{bead}(\beta, \theta)$  зміщується як ціле, не змінюючись по амплітуді так, що її максимум потрапляє в точку  $\theta = 121^\circ$ .

Виконані нами розрахунки дозволяють зробити висновки про можливі варіанти імплантації чашки протеза при різних ступенях залишкової дисплазії кульшової западини залежно від кута нахилу несучої поверхні кульшової западини за Tschauer Ch. (1992). Кут  $\alpha_1 = 0^\circ$  за Tschauer Ch. відповідає куту  $\alpha = 45^\circ$  у нашому дослідженні.

За умови залишкової дисплазії кульшової западини, коли  $\alpha_1 = 5^\circ$  ( $\alpha = 50^\circ$ ), можливі два варіанти інклинації чашки ендопротеза:  $45$  або  $50^\circ$ . Але, зважаючи на наявність стресового навантаження в зоні  $\theta = 45-50^\circ$  при інклинації чашки під кутом  $50^\circ$ , коли  $\Delta F = 1,4\%$ , і практичної, не тільки відсутності стресу при інклинації під кутом  $45^\circ$ , але й фактично нульового залишкового навантаження ( $0,04-0,4\%$ ) вважаємо за доцільне прагнути до інклинації  $45^\circ$ .

При залишковій дисплазії кульшової западини, коли  $\alpha_1 = 10^\circ$  ( $\alpha = 55^\circ$ ), чашка ендопротеза може бути імплантована з кутом інклинації  $50^\circ$  або  $55^\circ$ . Але, зважаючи на наявність стресового навантаження в зоні  $\theta = 50-55^\circ$  при інклинації чашки під кутом  $55^\circ$ , коли  $\Delta F = 3,0\%$ , вважаємо за доцільне прагнути до інклинації  $45^\circ$  або  $50^\circ$ , оскільки стрес у цьому випадку вдвічі менший. При таких варіантах імплантації може бути досягнута достатня первинна фіксація ацетабулярного компонента з мінімальним збільшенням сили, що діє на ділянку контакту головки ендопротеза з чашкою. Доцільно використовувати чашку з антилюксаційним комірцем  $10^\circ$ .

В умовах залишкової дисплазії кульшової западини, коли  $\alpha_1 = 15^\circ$  ( $\alpha = 60^\circ$ ), можливі кути інклинації чашки ендопротеза –

<sup>6</sup> Для порівняння аналогічні ділянки безпосереднього контакту чашки ендопротеза та кульшової западини в попередніх ситуаціях становлять:  $180^\circ$  – для першої (нормальної) ситуації та по  $158^\circ$  – для всіх інших чотирьох.

<sup>7</sup> Навіть відірвана від неї, чого не було в попередніх ситуаціях.

<sup>8</sup> У попередніх ситуаціях воно не перевищувало –18%.

45°, 50° та 55°, оскільки стресове навантаження в усіх трьох випадках найменше:  $\Delta F = 3,1\%$  у зоні  $\theta = 55\text{--}60^\circ$ . Але найоптимальніші щодо механічної стійкості всієї системи інклінації 45 або 50°. Доцільно використовувати чашку з антилюксаційним комірцем 20°.

У ситуації, коли  $\alpha_1 = 20^\circ$  ( $\alpha = 65^\circ$ ), чашка ендопротеза може бути імплантована без кісткової пластики дефекта, з будь-яким кутом інклінації: 45, 50, 55 та 60°, оскільки в усіх чотирьох випадках стресове навантаження  $\Delta F = 4,7\%$  у зоні  $\theta = 60\text{--}65^\circ$ . Але найоптимальніші щодо механічної стійкості всієї системи інклінації – 45, 50 або 55°. Для кута інклінації 55° доцільно використовувати чашку з антилюксаційним комірцем 20°. Але в цій ситуації можлива імплантація чашки в положенні інклінації 45–50° з попередньою кістковою пластикою дефекта.

При всіх наступних варіантах залишкової дисплазії кульшової западини, коли  $\alpha_1 > 20^\circ$  ( $\alpha > 65^\circ$ ), доцільна кісткова пластика дефекта кульшової западини з наступною імплантацією чашки ендопротеза з рекомендованим кутом інклінації.

Зазначимо, що ці розрахунки виконані без урахування інших факторів, які можуть впливати на кути фронтальної інклінації чашки ендопротеза, а саме:

- 1) ступінь потовщення дна кульшової западини;
- 2) структура кісткової тканини;
- 3) спосіб фіксації чашки ендопротеза та її різновид;
- 4) пара тертя компонентів ендопротеза.

## Висновки

1. Запропонована математична модель дозволяє визначити зони стресових навантажень, які виникають у ділянках контактуючих поверхонь чашки й головки ендопротеза, і рекомендувати найбільш раціональний варіант імплантації чашки ендопротеза в кожному

окремому випадку при різних ступенях залишкової дисплазії кульшової западини.

2. При залишковій дисплазії кульшової западини, коли кут нахилу несучої поверхні кульшової западини становить 1–20°, можливе збільшення кута фронтальної інклінації чашки ендопротеза не більше ніж на 10° та імплантація чашки ендопротеза без попередньої кісткової пластики дефекта кульшової западини з використанням, за показаннями, антилюксаційного комірця.

3. Імплантація чашки ендопротеза кульшового суглоба при залишковій дисплазії кульшової западини з кутом нахилу несучої поверхні кульшової западини понад 20° потребує попередньої кісткової пластики дефекта з наступною імплантацією чашки ендопротеза з рекомендованим кутом інклінації.

## Література

1. Математичне моделювання деформації в кульшовому суглобі при залишковій дисплазії. Ч. I / *Торчинський В. П., Гайко Г. В., Лисов В. І., Супрун А. Д.* // Вісн. ортопед., травматол. та протезув. – 2009. – № 1. – С. 5–10.
2. *Пернер К.* Применение системы Zweymuller при лечении диспластического коксартроза / *К. Пернер* // Вестн. травматол. и ортопед. им. Н. Н. Приорова. – 1999. – № 1. – С. 35–38.
3. Der Stellenwert der dreifachen Beckenosteotomie nach Tonnis im Rahmen der Spatdysplasie und fruhen Sekundararthrose des Huftgelenkes / *Tschauner Ch., Klapsch W., Koblmaier W., Graf R.* // Orthop. Praxis 28. – 1992. – S. 255–263.
4. *Harris W. H.* Total hip replacement and femoral – head bone – grafting for severe acetabular deficiency in adults / *Harris W. H., Crothers O., Ob I.* // J. Bone Jt. Surg. – 1977. – V. 59-A. – P. 752–759.
5. *Karl B. Otto.* Bone grafting for acetabular deficiency / *Karl B. Otto* // Joint Replacement. – State of the Art. : Mosby Year Book, Inc., 1990. – P. 139–144.