

**PHYSICAL REHABILITATION OF PATIENTS WITH RHEUMATOID ARTHRITIS
AFTER KNEE REPLACEMENT**

*Herasymenko S.I., Poluliakh M.V., Babka A.M., Roi I.V., Herasymenko A.S.,
Zamorskyi T.V., Avtomieienko Ye.M.*

Summary. The program of physical rehabilitation after knee replacement with axial deformities in rheumatoid arthritis patients to inpatient rehabilitation phase was developed and its effectiveness was determined.

Key words: physical rehabilitation, knee replacement, rheumatoid arthritis.

**ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАБИЛИТАЦИЯ ПАЦИЕНТОВ С РЕВМАТОИДНЫМ АРТРИТОМ
ПОСЛЕ ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИЯ КОЛЕННОГО СУСТАВА**

*Герасименко С.И., Полулях М.В., Бабка А.М., Рой И.В., Герасименко А.С.,
Заморский Т.В., Автомеенко Е.М.*

Резюме. Разработана программа физической реабилитации после эндопротезирования коленного сустава с осевыми деформациями для больных ревматоидным артритом на стационарном этапе восстановительного лечения и определена ее эффективность.

Ключевые слова: физическая реабилитация, эндопротезирование коленного сустава, ревматоидный артрит.

УДК 616.728.2-089.843-77

**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ
СИЛ НАВАНТАЖЕННЯ ТА ЇХ МОМЕНТІВ НА СТЕГНОВОМУ
КОМПОНЕНТІ ЕНДОПРОТЕЗА КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА**

*Нізалов Т.В.¹, Торчинський В.П.¹, Шмельова Л.В.², Супрун А.Д.²
¹ДУ "Інститут травматології та ортопедії НАМН України", м. Київ
²Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка, м. Київ*

Резюме. У роботі проведено математичне моделювання розподілу точкових сил навантаження та їх моментів на бездефектній (ідеальній) поверхні контакту між нижньою стегновою ендопротеза та кістково-мозкового каналу стегнової кістки. Визначено, що при математичному моделюванні обидві компоненти розподілу пружної сили навантаження – поздовжня компонента (вздовж осі z) і поперечна (перпендикулярна осі z) мають очікувану залежність від просторових змінних (які визначають положення точки прикладання сили на поверхні) і від використовуваної довжини ніжки протеза. В ідеальних умовах (цільного контакту) сумарний момент точкових сил навантаження дорівнює нулю. Виникнення патологічних відхилень у щільності контакту між протезом і кісткою приводить до змін у розподілах сил порівняно з тестовими розподілами та до появи некомпенсованого сумарного моменту цих сил, що, безумовно, впливає на розвиток асептичної нестабільності стегнового компонента ендопротеза кульшового суглоба. Проведене дослідження дозволить визначити рекомендації щодо конструкції ендопротеза, методів профілактики асептичної нестабільності стегнового компонента кульшового суглоба.

Ключові слова: фізико-математичне моделювання, сили навантаження, ніжка ендопротеза кульшового суглоба.

Вступ

Необхідність виконання тотального ендопротезування кульшового суглоба неухильно зростає як у світі, так і на теренах України, що пов'язано зі збільшенням

випадків дегенеративно-дистрофічних захворювань кульшового суглоба та загальним старінням населення [2, 6, 7, 10].

Водночас випадки асептичної нестабільності компонентів ендопротеза через 5-10 років після

операції становлять 25-60% від загальної кількості виконаних ендопротезувань, що потребує виконання реендопротезування і великих матеріальних затрат та є великою соціальною і медичною проблемою [1, 8, 9]. Тому визначення факторів, що зумовлюють розвиток асептичної нестабільності компонентів ендопротеза є одним із основних завдань сучасної травматології та ортопедії.

Однією із основних причин мікрорухомоті в системі “ендопротез – кістка”, що призводить до асептичної нестабільності компонентів ендопротеза, незалежних від техніки операції, є розвиток адаптаційної пористості щільної кісткової тканини та, як наслідок, її функціонального недовантаження або перенавантаження [5, 12]. Сьогодні не має оптимальних показників навантаження на імплантований стегновий компонент ендопротеза, що в свою чергу призводить у ранній післяопераційний період, під час виконання реабілітаційних навантажень, до недовантаження або перевантаження в системі “кістка – стегновий компонент” ендопротеза з порушенням остеоінтеграції кісткової тканини.

Адаптаційні властивості кісткової тканини залежно від її зовнішнього навантаження є потужним засобом організму для відновлення порушених функцій кісткової системи [11]. Однак у застосовуваних сьогодні діагностичних дослідженнях ці властивості враховуються суб’єктивно. Причиною цього є складність процесу адаптації та відсутність технічних засобів контролю над адаптаційною зміною структури і механічних характеристик живої кістки. Нині єдиним способом прогнозу реакції кісткової тканини на зміну зовнішнього механічного навантаження є біомеханічне моделювання [3, 4]. Тому цікавим з наукової та медичної точки зору вважаємо фізико-математичне моделювання розподілу сил навантаження та їх моментів на стегновому компоненті ендопротеза кульшового суглоба.

Головна увага в роботі буде зосереджена на розрахунках і аналізі залежності розподілу пружних сил навантаження від довжини ніжки ендопротеза в ідеалізованих умовах відсутності дефектів проксимального відділу стегнової кістки. Такі ідеалізовані умови і відповідні їм розподіли сил і їх моментів можуть виникати безпосередньо після операції і бути кількісною мірою якості її виконання. Відхилення від таких розподілів також є кількісною мірою, але патологічних змін. А тому знання розподілів в ідеалізованих (тестових) умовах є першочерговим завданням, яке і буде реалізоване у цій роботі.

Мета дослідження – провести фізико-математичне моделювання розподілу сил навантаження та їх моментів на стегновому компоненті ендопротеза кульшового суглоба.

Матеріали і методи

Опис моделі та попередні розрахунки

Визначення площі ідеального (бездефектного) контакту ніжки протеза і кістково-мозкового каналу стегнової кістки. Загальний вигляд поверхні контакту показано на рис. 1, де використані однакові вертикальний і горизонтальний масштаби. Стегнова кістка витягнута вздовж осі z і має довжину $L_0 = 40$ см. Радіус циліндричного кістково-мозкового каналу стегнової кістки приймається рівним $R_0 = 1$ см. Ніжка протеза на рисунку має довжину $\Lambda = 20$ см, але в роботі використовується як один із головних змінних параметрів, вплив якого на розподіл сил і їх моментів досліджується.

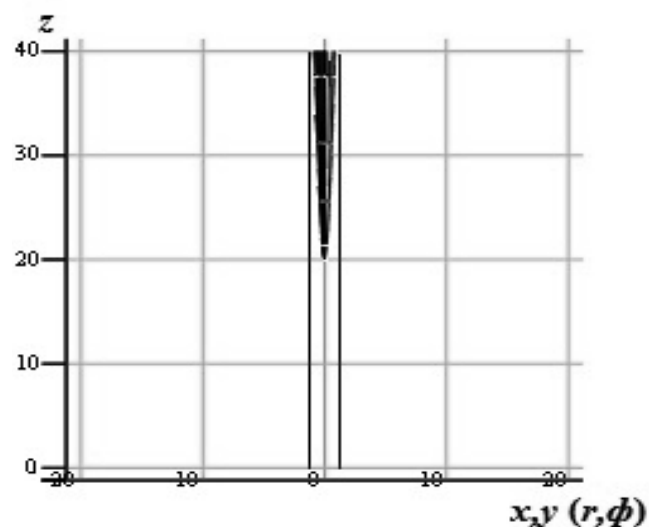


Рис. 1. Діаметральний зріз стегнової кістки разом із ніжкою протеза. Двома вертикальними лініями умовно показано границі внутрішньої циліндричної поверхні стегнової кістки. Заштрихована ділянка – це зона конусовидного контакту протеза і кістки

Конусовидна поверхня контакту моделюється гіперболоїдом обертання:

$$z(r) = \frac{L_0}{R_0} \sqrt{r^2 + \frac{R_0^2}{L_0^2} (L_0 - \Lambda)^2}, \quad (1)$$

обмеженим зверху горизонтальною площиною: $z(r) = L_0$. Тобто розглядається тільки та частина поверхні (1), яка задовольняє умові $z(r) \leq L_0$. Це забезпечує врахування пропорційності між зміною радіуса верхньої частини ніжки протеза та її довжини при обчисленні площі поверхні контакту.

На рис. 2 зображена така сама ситуація, як і на рис. 1, але горизонтальний масштаб уже вибрано так, що горизонтальні розміри, відображені на рисунку, не перевищують діаметра $2R_0$ верхньої частини ніжки протеза (горизонтальний масштаб зроблено у 40 разів детальнішим).

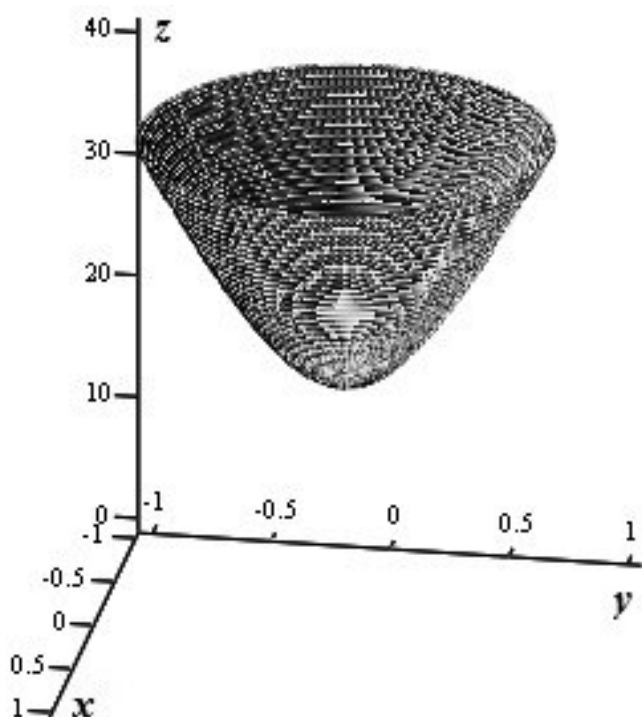


Рис. 2. Деталізація форми поверхні контакту ніжки протеза з внутрішньою поверхнею стегнової кістки в умовах відсутності дефектів контактуючих поверхонь

З рисунка видно, що розглядувана поверхня дійсно являє собою гіперолоїд обертання навколо осі z , і тепер наступна задача полягає у знаходженні площі поверхні, зображеної на рис. 2 і обмеженої зверху горизонтальною площиною:

$$z(r) = L_0. \quad (2)$$

Для цього спершу потрібно знайти нескінченно малий елемент цієї поверхні dS . Відповідно до означення [5] його проекція на площину (x, y) (або (r, φ) у циліндричних координатах) визначається співвідношенням:

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy, \quad (3)$$

де z'_x, z'_y – частинні похідні від рівняння поверхні (1), яким тут, очевидно, потрібно користуватись у вигляді:

$$z(x, y) = \frac{L_0}{R_0} \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{R_0^2}{L_0^2} (L_0 - \Lambda)^2}.$$

Для частинних похідних можна знайти:

$$\begin{aligned} z'_x(x, y) &= \frac{l_0 x}{\sqrt{x^2 + y^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} \equiv \\ &\equiv \frac{l_0 r \cos(\varphi)}{\sqrt{r^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} = z'_x(r, \varphi); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} z'_y(x, y) &= \frac{l_0 y}{\sqrt{x^2 + y^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} \equiv \\ &\equiv \frac{l_0 r \sin(\varphi)}{\sqrt{r^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} = z'_y(r, \varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

де $l_0 \equiv L_0/R_0$ – безрозмірна довжина стегнової кістки у одиницях радіусу R_0 , а $\lambda \equiv \Lambda/L_0$ – безрозмірна довжина ніжки протеза щодо довжини стегнової кістки. Як видно тут $l_0 = 40$, а λ змінюється в межах $0 < \lambda < 1$. У відповідності із означеннями (3), (4) та (5) для диференціального елемента dS розглядуваної поверхні у обох представленнях – як декартовому, так і циліндричному – можна знайти:

$$\begin{aligned} dS(x, y) &= \sqrt{1 + \frac{l_0^2 (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} dx dy \equiv \\ &\equiv \sqrt{1 + \frac{l_0^2 r^2}{r^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} r dr d\varphi = dS(r, \varphi) \end{aligned}$$

Для знаходження площі S контакту поверхонь тут найзручніше використовувати циліндричне представлення:

$$dS(r, \varphi) = \sqrt{1 + \frac{l_0^2 r^2}{r^2 + R_0^2 (1 - \lambda)^2}} r dr d\varphi. \quad (6)$$

У цьому представленні інтегрування по кутовій змінній φ від 0 до 2π можна виконати одразу, оскільки від неї нічого не залежить. Тобто такий інтеграл буде давати просто множник 2π . Що ж стосується інтегрування по змінній r , то тут інтегрування теж виконується від 0, але до значення, яке залежить від безрозмірної довжини ніжки протеза λ і визначається умовою (2). Для детального розгляду цього питання підставимо (1) у (2) та розв'яжемо отримане відносно r . В результаті матимемо значення R_λ верхньої границі інтегрування:

$$R_\lambda = R_0 \sqrt{1 - (1 - \lambda)^2}, \quad (7)$$

а сам інтеграл для визначення шуканої площі зводиться до вигляду:

$$S(\lambda) = \pi R_0^2 \int_0^{1-(1-\lambda)^2} \sqrt{1 + \left[\frac{l_0^2 x}{x + (1-\lambda)^2} \right]} dx. \quad (8)$$

У останньому записі підкреслено, що досліджується залежність площі S (та інших характеристик) від λ , тобто від безрозмірної довжини ніжки протеза ($\lambda \equiv \Lambda/L_0$). На рис. 3 приведена залежність $S(\lambda)$, розрахована за формулою (8).

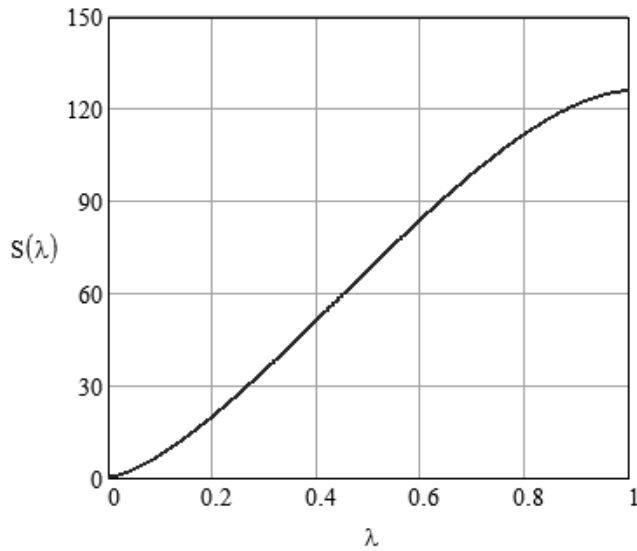


Рис. 3. Точна залежність площі $S(\lambda)$ ідеального (бездефектного) контакту поверхонь ніжки протеза і кістково-мозкового каналу стегнової кістки.

Видно, що залежно від довжини ніжки протеза ця площа змінюється в межах від 0 до приблизно 125 cm^2

Але користуватися інтегральною формулою (8) для практичного застосування та подальшого аналізу незручно. Тому після аналізу залежності на рис. 3 була знайдена відносно проста наближена формула:

$$S_a(\lambda) = \pi R_0^2 l_0 \lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\lambda)]. \quad (9)$$

Індекс "а" означає, що це наближена (approximate) залежність. Для неї можна також сформулювати вираз, у який входять реальні (розмірні) величини:

$$S_a(\Lambda) = \pi R_0 \Lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\Lambda/L_0)].$$

На рис. 4 приведені порівняння залежності (8) для $S(\lambda)$ та залежності (9) для $S_a(\lambda)$.

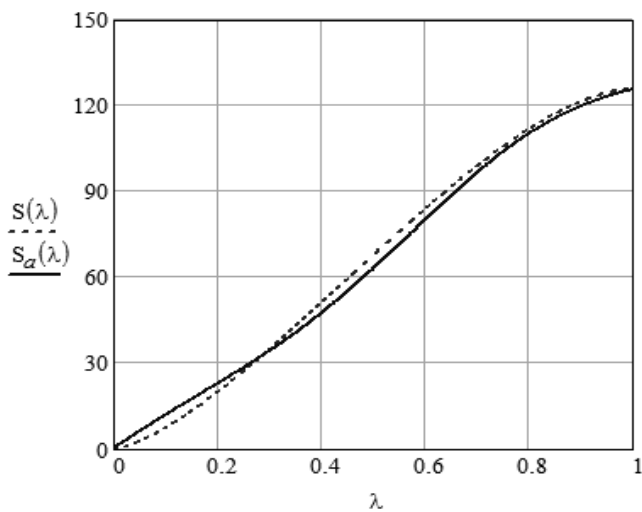


Рис. 4. Порівняння точної (пунктирна крива) і наближеної (суцільна крива) залежностей площі контакту від безрозмірної довжини ніжки протеза

Видно, що криві майже співпадають. Але видно також і те, що в області $\lambda < 0.2$ відносна похибка зростає зі зменшенням λ , тому користуватися наближеною залежністю можна лише при $\lambda > 0.25$. Слід відзначити, що у клінічних застосуваннях довжина ніжки протеза не буває меншою 10 см, що якраз і становить 25% від вибраної тут середньої довжини стегнової кістки – 40 см. Отже, далі можна користуватися наближеною формулою (9).

Визначення тиску та базового розподілу сили навантаження на ніжку протеза. Тепер, знаючи площу контакту (9), необхідно знайти наступні базові характеристики – тиск і компоненти сили навантаження на ніжку протеза. Вони потрібні для остаточного знаходження і аналізу розподілу точкових сил та їх моментів на поверхні контакту.

Оскільки тиск визначається як відношення величини сили навантаження F_0 до площі щільного контакту S , то це питання також аналізуватимемо, порівнюючи точне значення тиску, обумовлене значенням площі (8), та наближене його значення, обумовлене значенням (9). Очевидно, що:

$$P(\lambda) = F_0/S(\lambda); \quad P_a(\lambda) = F_0/S_a(\lambda).$$

Для числового порівняння цих тисків (приведеного на рис. 5) базова сила навантаження прийнята рівною: $F_0 = 40 \text{ кГ}$ (детальне обговорення такої оцінки виконане далі).

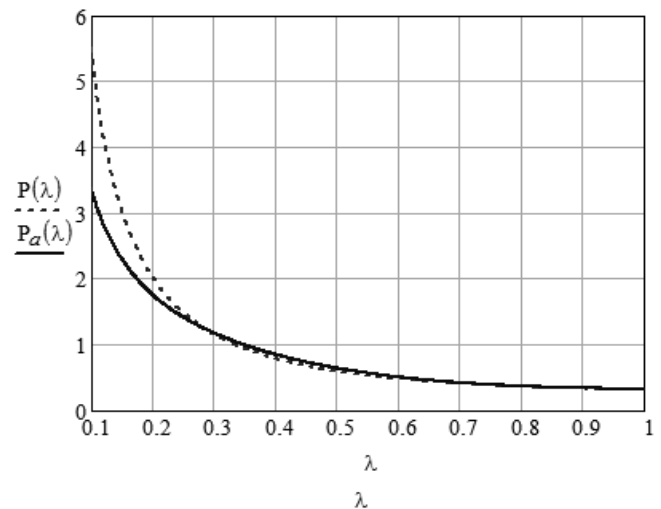


Рис. 5. Графічно-числове порівняння точної (пунктирна крива) і наближеної (суцільна крива) залежностей тиску від безрозмірної довжини на поверхні щільного контакту

З рис. 5 видно, що у "робочій" області: $\lambda > 0.25$, тиски майже співпадають. Отже, в цій області для тиску можна використовувати формулу:

$$P = \frac{F_0}{\pi R_0^2 l_0 \lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\lambda)]}. \quad (10)$$

Тепер знайдемо компоненти сили навантаження на ніжку протеза. Розглянемо схему, приведену на рис. 6, для визначення компонент сили навантаження на стегнову кістку. Виходимо з того, що ця сила спрямована від головки стегнової кістки до коліна (напрямок АО на рис. 6), а робоча система координат вибрана так, що її вісь z жорстко “прив’язана” до осі самої стегнової кістки (напрямок ОВ на рис. 6). Кут σ становить величину, близьку до 135° , але може дещо варіюватись разом із довжиною шийки протеза (ділянка АВ на рис. 6) для фіксації бокового відступу (offset) – відстані від точка А (середина головки протеза) до осі z .

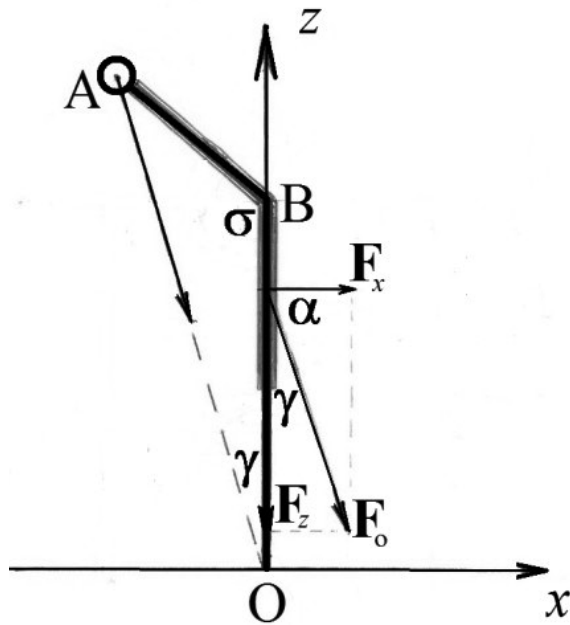


Рис. 6. Схематичне зображення системи “стегнова кістка – протез”. Потовщеними фрагментами відзначено ділянки, які відповідають протезу. Вісь y спрямована від спостерігача

Головною метою аналізу схематичного зображення на рис. 6 є відшукання кутів α та γ і відповідних їм направляючих косинусів. Для цього спершу слід визначити відстань OA за допомогою теореми косинусів. Позначаючи відстань АВ (шийка протеза) через H_0 та приймаючи до уваги, що ділянка ОВ є не що інше, як довжина стегнової кістки L_0 для відстані OA, можна отримати значення:

$$\sqrt{L_0^2 + H_0^2 - 2L_0H_0 \cos(\sigma)}.$$

Далі скористаємося теоремою синусів уже для безпосереднього знаходження кутів α та γ :

$$\sin(\gamma) = \frac{H_0 \sin(\sigma)}{\sqrt{L_0^2 + H_0^2 - 2L_0H_0 \cos(\sigma)}} \equiv \cos(\alpha).$$

Відповідно:

$$\cos(\gamma) = \sqrt{\frac{L_0^2 + H_0^2 \cos^2(\sigma) - 2L_0H_0 \cos(\sigma)}{L_0^2 + H_0^2 - 2L_0H_0 \cos(\sigma)}} \equiv \sin(\alpha).$$

Приймаючи до уваги, що боковий відступ (offset), який позначимо через Q_0 , визначається співвідношенням: $Q_0 = H_0 \sin(\sigma)$, можна виразити направляючі косинуси і через нього:

$$\cos(\alpha) = \frac{Q_0 \sin(\sigma)}{\sqrt{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0Q_0 \sin(2\sigma)}}; \quad (11)$$

$$\cos(\gamma) = \sqrt{\frac{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0Q_0 \sin(2\sigma) - Q_0^2 \sin^2(\sigma)}{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0Q_0 \sin(2\sigma)}}. \quad (12)$$

Згідно з рис. 6: $\mathbf{F}_0 = \mathbf{e}_x F_x + \mathbf{e}_z F_z$, де $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$ – одиничні вектори, що визначають напрямки відповідних компонент вектора сили \mathbf{F}_0 , а самі ці компоненти означені так:

$$F_x = F_0 \cos(\alpha), \quad F_z = -F_0 \cos(\gamma). \quad (13)$$

Величина базової сили F_0 має вигляд:

$$F_0 = \left(1 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) k P_0 \equiv \frac{k P_0}{1-\sigma}. \quad (14)$$

Коефіцієнт k визначає частину ваги P_0 , що припадає на суглоб (точка А на рис. 6), а весь множник $k P_0$ визначає величину відповідної сили. Середнє значення коефіцієнта k можна вважати приблизно рівним $1/3$, як деякому усередненому значенню між величинами $1/4$ (опір на обидві ноги) та $1/2$ (опір на одну ногу). Другий доданок у дужках: $\frac{\sigma}{1-\sigma}$ – це вне-

сок пружної складової навантаження, яка визначається стиском матеріалу протеза за типової моделі, що кісткова тканина значно менше схильна до деформації ніж матеріал протеза. Величина σ – це коефіцієнт Пуассона, який має фізичний зміст відношення поперечного стиску до поздовжнього видовження. За означенням (6): $0 < \sigma < 1/2$. Для ніжки протеза використовується сплав титану з домішками ванадію та молібдену. Для цього сплаву $\sigma = 0.3$, тоді як для кісткової тканини цей коефіцієнт повинен бути майже вдвічі меншим. Тому для цієї моделі у означенні (14) навантаження F_0 може мати таку оцінку: $F_0 : 0.476 P_0$. Враховуючи, що середнє значення ваги $P_0 = 80$ кг, можна отримати: $F_0 = 38$ кг, що і використовувалось при графічно-числових оцінках тиску P (рис. 5) у вигляді $F_0 = 40$ кг. Зменшити навантаження можна вибором матеріалу ніжки протеза, для якого $\sigma < 0.3$, але водночас таке значення σ , очевидно, не повинно бути меншим за коефіцієнт Пуассона для матеріалу самої кістки. Найкраще, коли пружні властивості ніжки протеза і матеріалу кістки близькі. Тоді другий доданок у дужках озна-

чення (14) буде відсутнім або малим, а сила навантаження F_0 визначатиметься співвідношенням: $F_0 = kP_0 \approx P_0/3 : 26.7 \text{ кГ}$.

Виходячи із запису (13), можна констатувати, що в умовах спрямованості базової сили довільно (по відношенню до вибраної системи координат), тензор напруг P_{ij} , ($\{i, j\} = \{1, 2, 3\} \equiv \{x, y, z\}$), який далі визначитиме поверхневий розподіл пружних сил навантаження та їх моментів у кожній точці, повинен враховувати цю довільність для ізотропних матеріалів, до яких відноситься і сплав титану з домішками ванадію та молібдену. А саме:

$$P_{ij} = -P \cos(\alpha_i) \delta_{ij}, \quad (15)$$

де тиск P означено у (10); кути α_i направляючих косинусів у випадку, зображеному на рис. 6, формально можна подати у вигляді вектора $\hat{\mathbf{a}} \equiv \{\alpha_i\} = (\alpha, \pi/2, \gamma)$. δ_{ij} – одинична діагональна матриця (символ Кронекера). Слід зауважити, що на рис. 6 зображено ситуацію, коли пацієнт стоїть. Якщо це не так, то: $\hat{\mathbf{a}} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Визначення базових розподілів сил навантаження на поверхні контакту. Виходячи із загально-го означення [11], для точкових елементів пружних сил навантаження (в граничному розумінні нескінченно малих або точніше – диференціальних їх елементів), прикладених до поверхні контакту, можна записати: $df_i = P_{ij} dS_j$. Для розглядуваних тут компонент матимемо: $df_x = P_{xj} dS_j$, $df_z = P_{zj} dS_j$. Далі приймаємо до уваги означення (15): $df_x = -P \cos(\alpha) dS_x$, $df_z = -P \cos(\gamma) dS_z$. При розгляді питання через декартову систему координат [5] та наступному врахуванні особливостей переходу до циліндричної системи координат можна записати:

$$\begin{aligned} dS_x &= -z'_x(x, y) dx dy \equiv -z'_x(r, \varphi) r d\varphi dr, \\ dS_z &= dx dy \equiv r d\varphi dr. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} df_x &= P \cos(\alpha) z'_x(x, y) dx dy \equiv \\ &\equiv P \cos(\alpha) z'_x(r, \varphi) r d\varphi dr; \\ df_z &= -P \cos(\gamma) dx dy \equiv -P \cos(\gamma) r d\varphi dr. \end{aligned}$$

Оскільки далі працюватимемо у циліндричній системі координат, то використовуватимуться тільки означення:

$$\begin{aligned} df_x &= P \cos(\alpha) z'_x(r, \varphi) r d\varphi dr; \\ df_z &= -P \cos(\gamma) r d\varphi dr, \end{aligned} \quad (16)$$

$$z'_x(r, \varphi) = \frac{l_0 r \cos(\varphi)}{\sqrt{r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2}}. \quad (17)$$

Результати та їх обговорення

Аналіз розподілу сил і їх моментів

Розподіл пружних сил навантаження на поверхні контакту. Базові розподіли, приведені у рівно-

стях (16), мають диференціальну форму, що не зручно для аналізу. Тому для подальшого розгляду слід виконати необхідні перетворення для формулювання недиференціальних елементів цих сил. Тобто сил, віднесених до нескінченно малої (точкової) площадки dS на поверхні контакту, яка визначається співвідношенням (6):

$$dS = \sqrt{1 + \frac{l_0^2 r^2}{r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2}} r d\varphi dr.$$

Тоді співвідношення (16) із врахуванням (17) трансформуються до вигляду:

$$df_x = P l_0 \cos(\alpha) \frac{r \cos(\varphi)}{\sqrt{(l_0^2 + 1)r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2}} dS; \quad (18)$$

$$df_z = -P \cos(\gamma) \sqrt{\frac{r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2}{r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2 + l_0^2 r^2}} dS. \quad (19)$$

Але для того, щоб можна було зберігати і надалі розмірність сили у означеннях (18), (19) спершу потрібно перейти до безрозмірної просторової змінної: $\rho = r/R_0$. Тоді ці означення набувають вигляду:

$$df_x = P R_0^2 l_0 \cos(\alpha) \frac{\rho \cos(\varphi)}{\sqrt{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}} d\Omega;$$

$$df_z = -P R_0^2 \cos(\gamma) \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}} d\Omega,$$

де введене позначення для безрозмірної форми елемента площі: $d\Omega = dS/R_0^2$.

Оскільки реальна (розмірна) змінна r варіюється в межах: $0 \leq r \leq R_\lambda$, де, згідно з (7), $R_\lambda = R_0 \sqrt{1 - (1-\lambda)^2}$, то змінна ρ завжди варіюється в межах: $0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - (1-\lambda)^2}$. Тому при виконанні графічно-числового аналізу всі розрахунки поверхневих розподілів по цій змінній слід обмежувати саме значенням $\sqrt{1 - (1-\lambda)^2}$.

Розподіли пружних сил навантаження у кожній точці поверхні контакту на одиницю безрозмірного елемента площі $d\Omega$ означаються як: $g_i = \frac{df_i}{d\Omega}$. Фактори g_i фактично є силами, прикладеними у точку з координатами: ρ, φ та $z(\rho) = L_0 \sqrt{\rho^2 + (1-\lambda)^2}$ (останнє отримано з (1) шляхом переходу до змінної ρ). Тоді:

$$g_x = P R_0^2 l_0 \cos(\alpha) \frac{\rho \cos(\varphi)}{\sqrt{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}}.$$

$$g_z = -P R_0^2 \cos(\gamma) \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}}. \quad (20)$$

Спочатку розглянемо більш простий випадок, який стосується компоненти g_z розподілу пружної сили навантаження у кожній точці. Цей випадок простіший, оскільки компонента g_z залежить тільки від змінної ρ та безрозмірної довжини ніжки протеза λ . Враховуючи явний вигляд тиску P , який означено у (10), матимемо:

$$g_z = - \frac{F_0}{\pi l_0 \lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\lambda)]} \cos(\gamma) \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}},$$

а враховуючи також і явний вигляд направляючого косинуса $\cos(\gamma)$, приведеного у (12), остаточно матимемо:

$$g_z = - \frac{F_0}{\pi l_0 \lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\lambda)]} \sqrt{\frac{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0 Q_0 \sin(2\sigma) - Q_0^2 \sin^2(\sigma)}{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0 Q_0 \sin(2\sigma)}} \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}}$$

Для подальшого графічно-числового аналізу залежності компоненти g_z розподілу пружної сили навантаження у кожній точці задамо додатково до вже означених величин типове значення для кута σ : $\sigma = 3\pi/4$ (135°), а для бокового відступу (offset) середнє його значення $Q_0 = 3,5$ см. Очевидно, що g_z вимірюється в кілограмах. Оскільки за просторовою орієнтацією ця компонента формально є від'ємною величиною, то на рис. 7 приведена залежність $|g_z|$. При розрахунках враховувалось, що змінна ρ варіюється в межах: $0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - (1-\lambda)^2}$. Тому на графіках рис. 7 криві обриваються при значеннях ρ , які перевищують граничне значення $\sqrt{1 - (1-\lambda)^2}$. Оскільки ця компонента не залежить від кутової змінної ϕ , то розглядувані точкові сили навантаження для неї будуть однаковими на колі, положення якого на поверхні контакту визначатиметься значенням змінних ρ та $z(\rho) = L_0 \sqrt{\rho^2 + (1-\lambda)^2}$. Наприклад, крива 1 на рис. 7 описує ситуацію, коли безрозмірна довжина ніжки протеза $\lambda = 0.25$. Або реальна (розмірна) її величина $L = L_0/4 = 10$ см. Тоді видно, що в точці $\rho = 0$ і відповідно $z = 3L_0/4 = 30$ см для компоненти $|g_z|$ матимемо $|g_z| = 1.4$ кГ. Але, як видно з рис. 7, у точці $\rho = 0$ сила $|g_z|$ досить швидко зменшується зі збільшенням λ . А саме, для $\lambda = 0.5$ і відповідно $z = L_0/2 = 20$ см вона вже становить величину

: 0,6 кГ; для $\lambda = 0.75$, відповідно $z = L_0/4 = 10$ см становить величину : 0,4 кГ; і, нарешті, для $\lambda = 0.99$, відповідно $z = L_0/100 = 0.4$ см (4 мм над коліном) вона становить величину : 0,3 кГ.

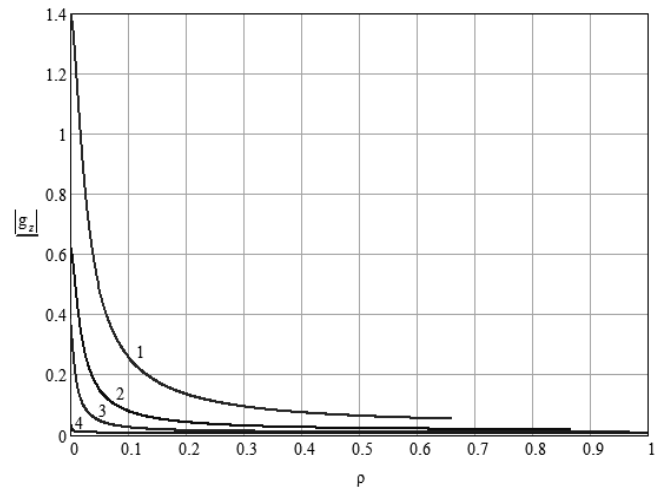


Рис. 7. Залежність компоненти $|g_z|$ розподілу пружної сили навантаження у кожній точці від змінної ρ для різних значень безрозмірної довжини ніжки протеза: 1 – $\lambda = 0.25$; 2 – $\lambda = 0.5$; 3 – $\lambda = 0.75$; 4 – $\lambda = 0.99$

З графіків на рис. 7 видно також і те, що сила $|g_z|$ дуже швидко зменшується зі збільшенням ρ , тобто із просуванням вверх по поверхні контакту від верхівки ніжки протеза до її верхнього краю. Зокрема, для найвиразнішої кривої 1 рис. 7, де $\lambda = 0.25$, вже при $\rho = 0.3$ і відповідно $z = 0.81L_0 = 32.3$ см матимемо $|g_z| : 0,1$ кГ. Тобто при просуванні вздовж поверхні контакту всього на 2 см вверх для цього значення λ навантаження зменшується у 14 разів. Таке зменшення обумовлене тим, що при зростанні ρ (просуванні вздовж поверхні контакту вверх) поверхня контакту стає майже паралельною до осі z (сила спрямовується практично по дотичній до поверхні контакту).

Тепер розглянемо компоненту g_x точкового розподілу сили навантаження, означеної у (20). Враховуючи і тут означення тиску (10) та направляючого косинуса $\cos(\alpha)$, приведеного у (11), матимемо:

$$g_x = \frac{F_0}{\pi \lambda [1 - 0.1 \sin(2\pi\lambda)]} \frac{Q_0 \sin(\sigma)}{\sqrt{L_0^2 \sin^2(\sigma) + Q_0^2 - L_0 Q_0 \sin(2\sigma)}} \frac{\rho \cos(\phi)}{\sqrt{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}}$$

На відміну від компоненти g_z компонента g_x , крім залежності від ρ та λ , суттєво залежить від змінної ϕ . Вже відзначалося, що змінні ρ , ϕ разом із парамет-

ром λ (безрозмірна довжина ніжки протеза) та рівнянням поверхні $z(\rho) = L_0 \sqrt{\rho^2 + (1-\lambda)^2}$ визначають просторове положення точки прикладання пружної сили. У цьому разі компоненти g_x точкового її розподілу.

Наявність додаткової залежності від змінної φ ускладнює графічно-числовий аналіз цієї компоненти. Але симетрія розподілу по цій змінній, яка визначається функцією $\cos(\varphi)$, дозволяє аналізувати розподіли лише для 2 значень: $\varphi = 0^\circ$ та $\varphi = 45^\circ$. При $\varphi = 90^\circ$ та при $\varphi = 270^\circ$ розподіли є нульовими за рахунок тих же властивостей функції $\cos(\varphi)$, розподіли в інтервалі від 90° до 270° для кутів, відповідних значенням $\varphi = 0^\circ$ та $\varphi = 45^\circ$, відрізняються лише знаком від розподілів у розглядуваному інтервалі (від 0° до 90°), а в інтервалі $270^\circ \div 360^\circ$ – співпадають (теж для відповідних кутів).

Залежність компоненти g_x при $\varphi = 0^\circ$ від радіальної змінної ρ для різних значень λ (безрозмірної довжини ніжки протеза) приведено на рис. 8. Тут при розрахунках також враховувалось, що змінна ρ варіюється в межах: $0 \leq \rho \leq \sqrt{1-(1-\lambda)^2}$. Для цієї компоненти, як видно з рис. 8, при $\rho = 0$ і при всіх значеннях λ сила g_x дорівнює нулю і стрімко зростає, виходячи майже на постійне значення вже при $\rho \leq \{0.1 \div 0.2\}$. Зменшення значень цієї компоненти в області $\rho \ll 0.1$ пояснюються тим, що у околі точки $\rho = 0$ вона практично паралельна поверхні (спрямована майже по дотичній до поверхні контакту). Ця компонента не перевищує 0.12 кГ при будь-яких значеннях безрозмірної довжини ніжки протеза λ . Якщо $\varphi = 45^\circ$, картина якісно така ж, як на рис. 8, і відрізняється лише тим, що як і для компоненти $|g_z|$, всі значення g_x зменшуються приблизно у 1,5 рази.

Аналіз моментів сил. Для розгляду цього питання скористаємося стандартним означенням (6) про те, що момент сили є векторним добутком сили на радіус-вектор точки її прикладання: $\mathbf{m} = [\mathbf{g} \times \mathbf{r}]$. Для компонент вектора \mathbf{m} матимемо відповідно:

$$m_x = -g_z y; \quad m_y = g_z x - g_x z(\rho); \quad m_z = g_x y.$$

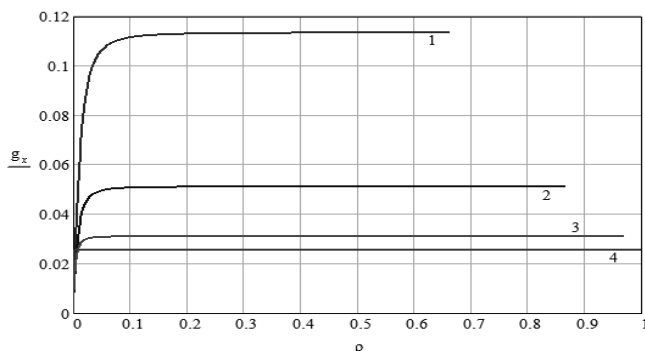


Рис. 8. Залежність компоненти g_x точкового розподілу сили навантаження від змінної ρ при $\varphi = 0^\circ$ для різних значень безрозмірної довжини ніжки протеза: 1 - $\lambda = 0.25$; 2 - $\lambda = 0.5$; 3 - $\lambda = 0.75$; 4 - $\lambda = 0.99$

У циліндричній системі координат і з врахуванням означень (20) ці співвідношення зводяться до вигляду:

$$m_x = m_x^0(\rho) \sin(\varphi); \quad m_y = -m_y^0(\rho) \cos(\varphi); \quad m_z = m_z^0(\rho) \sin(\varphi) \cos(\varphi), \quad (21)$$

де для спрощення подальшого аналізу, оскільки залежність від змінної ρ буде несуттєвою, введені позначення:

$$m_x^0(\rho) \equiv PR_0^3 \cos(\gamma) \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}};$$

$$m_y^0(\rho) \equiv PR_0^2 \left[R_0 \cos(\gamma) \rho \sqrt{\frac{\rho^2 + (1-\lambda)^2}{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}} + l_0 \cos(\alpha) \frac{\rho z(\rho)}{\sqrt{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}} \right];$$

$$m_z^0(\rho) \equiv PR_0^3 l_0 \cos(\alpha) \frac{\rho^2}{\sqrt{(l_0^2 + 1)\rho^2 + (1-\lambda)^2}}$$

Перш за все видно, що компоненти точкових моментів \mathbf{m} пружної сили навантаження розподілені по поверхні контакту доволі складно навіть для якісного графічного аналізу (хоча б інформативного). Але сумарний момент цих сил, означений співвідношенням:

$$\mathbf{M} = \int_{(\Omega)} \mathbf{m} d\Omega, \text{ буде рівним нулю. Оскільки безрозмірний елемент площі } d\Omega \text{ означений як } d\Omega = dS/R_0^2, \text{ а інтегрування відбувається по всій безрозмірній площі контакту } (\Omega), \text{ то покажемо, що дійсно } \mathbf{M} = \mathbf{0}. \text{ З врахуванням щойно приведеного означення для } d\Omega \text{ та означення: } dS = \sqrt{1 + \frac{l_0^2 r^2}{r^2 + R_0^2 (1-\lambda)^2}} r d\varphi dr, \text{ при-}$$

веденого раніше, можна отримати, приймаючи ще до уваги, що $r = \rho R_0$: $d\Omega = \sqrt{1 + \frac{l_0^2 \rho^2}{\rho^2 + (1-\lambda)^2}} \rho d\varphi d\rho$.

Тоді рівність $\mathbf{M} = \int_{(\Omega)} \mathbf{m} d\Omega$, записана у компонентах із врахуванням (21), зводиться до таких трьох рівностей:

$$M_x = \int_0^{\sqrt{1-(1-\lambda)^2}} m_x^0(\rho) \sqrt{1 + \frac{l_0^2 \rho^2}{\rho^2 + (1-\lambda)^2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi;$$

$$M_y = - \int_0^{\sqrt{1-(1-\lambda)^2}} m_y^0(\rho) \sqrt{1 + \frac{l_0^2 \rho^2}{\rho^2 + (1-\lambda)^2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi;$$

$$M_z = \int_0^{\sqrt{1-(1-\lambda)^2}} m_z^0(\rho) \sqrt{1 + \frac{l_0^2 \rho^2}{\rho^2 + (1-\lambda)^2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi.$$

Видно, що за рахунок інтегрування по змінній φ всі три інтеграли рівні нулю, отже, виконується і рівність $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Це означає, що в умовах ідеального контакту поверхонь протеза і кістково-мозкового каналу стегнової кістки сумарний момент пружних сил навантаження відсутній. Поява дефектів у контакті поверхонь буде приводити не тільки до відмін від розподілів точкових сил, приведених на рис. 7, 8, а й до появи відмінного від нуля сумарного моменту сил.

Висновки

1. У роботі проведено математичне моделювання розподілу точкових сил навантаження та їх моментів на бездефектній (ідеальній) поверхні контакту між ніжною стегнового ендопротеза та кістково-мозкового каналу стегнової кістки.

2. Визначено, що при математичному моделюванні обидві компоненти розподілу пружної сили навантаження: як поздовжня компонента (вздовж осі z), так і поперечна (перпендикулярна осі z), мають очікувану залежність від просторових змінних (які визначають положення точки прикладання сили на поверхні) і від використовуваної довжини ніжки протеза. В ідеальних умовах (щільного контакту) сумарний момент точкових сил навантаження дорівнює нулю.

3. Виникнення патологічних відхилень у щільності контакту між протезом і кісткою приводить до змін у розподілах сил порівняно з тестовими розподілами та до появи не скомпенсованого сумарного моменту цих сил, що, безумовно, впливає на розвиток асептичної нестабільності стегнового компонента ендопротеза кульшового суглоба.

4. Проведене дослідження дозволить визначити рекомендації щодо конструкції ендопротеза, методів профілактики асептичної нестабільності стегнового компонента кульшового суглоба.

Література

1. Ахтямов И.Ф. Ошибки и осложнения эндопротезирования тазобедренного сустава: рук. для врачей / И.Ф. Ахтямов, И.И. Кузьмин // Казань: Центр оперативной печати, 2006. – 328 с.
2. Ахтямов И.Ф. Эндопротезирование в России / И. Ф. Ахтямов, Р.М. Тихилов. – Из-во: Медицинская книга. – 2009. – 258 с.
3. Васильков Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании / Ю.В. Васильков, Н.Н.Василькова. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.
4. Загревский, В.И. Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В.И. Загревский. – Томск – Могилев, 1999. – 156 с.
5. Определение напряженно-деформированного состояния системы “эндопротез-кость” при различных степенях их контакта / В. А. Филиппенко, З. М. Мителева, Д. Е. Петренко [и др.] // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2003. – № 3. – С. 90–96.
6. Остеоартроз: Современное состояние проблемы (аналитический обзор) / С.П. Миронов, Н.П. Омеляненко, А.К. Орлецкий [и др.] // Вестн. травматол. и ортопед. им. Н.Н. Приорова. – 2001. – № 2. – С. 96–99.
7. Поворознюк В.В. Захворювання кістково-м'язової системи в людей різного віку (вибрані лекції, огляди, статті) / В.В. Поворознюк : у 4-х томах. Т. 4. – 2014. – 672 с.
8. Профилактика асептической нестабильности при эндопротезировании тазобедренного сустава / А.А. Грицук, А.П. Середя, С.В. Лукьянов и др. // Проблема остеопороза в травматологии и ортопедии: Сб. тез. 4-й конф. с междунар. участ. – М., 2009. – С. 21–22.
9. Прохоренко В.М. Первичное и ревизионное эндопротезирование тазобедренного сустава / В.М. Прохоренко. – Новосибирск: АНО “Клиника НИИТО”, 2007. – 348 с.
10. Эндопротезирование тазобедренного сустава / А.Е. Лоскутов, Л. Ю. Науменко, О. А. Лоскутов, А.Е. Олейник, Д.А. Синегубов. – Днепропетровск : ЛИРА, 2010. – 344 с.
11. Currey J.D. The many adaptations of bone / J.D. Currey // J. Biomech. – 2003. – № 36 (10). – P. 1487–1495.
12. Factors affecting aseptic loosening of 4750 total hip arthroplasties: multivariate survival analysis / B. Bordini, S. Stea, M. De Clerico [et al.] // BMC Musculoskeletal Disorders. – 2007. – Vol. 8. – P. 69–73.

PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELING OF DISTRIBUTION OF LOADS AND THEIR MOMENTS ON THE FEMORAL COMPONENT OF THE HIP ENDOPROSTHESIS

Nizalov T.V., Torchynskyi V.P., Shmelova L.V., Suprun A.D.

Summary. *Mathematical modeling of the distribution of point forces and their moments on the defect-free (ideal) contact surface between the femoral stem of a prosthesis and the medullary canal of the femur was conducted in this work. It was determined that during mathematical modeling both components of the distribution of elastic forces of the load – the longitudinal (along the z-axis) and the transverse (perpendicular to the z-axis) components – were expectedly dependent on the spatial variables, which define the force application point on the surface, and the length of prosthesis. Under ideal conditions (close contact), the total moment of the point forces is zero. The appearance of abnormalities in tightness of the contact between the prosthesis and the bone will change the distribution of forces, as compared to test divisions, until uncompensated total moment of these forces occurs, which certainly affects the development of aseptic instability of the femoral component of hip endoprosthesis. The study will provide recommendations for the design of endoprosthesis and methods of preventing aseptic instability of femoral component of the hip joint.*

Key words: *physical and mathematical modeling, load force, stem of hip endoprosthesis.*

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ НАГРУЗКИ И ИХ МОМЕНТОВ НА БЕДРЕННОМ КОМПОНЕНТЕ ЭНДОПРОТЕЗА ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

Низалов Т.В., Торчинский В.П., Шмельова Л.В., Супрун А.Д.

Резюме. В работе проведено математическое моделирование распределения точечных сил нагрузки и их моментов на бездефектной (идеальной) поверхности контакта между ножкой бедренного эндопротеза и костно-мозгового канала бедренной кости. Определено, что при математическом моделировании обе компоненты распределения упругой силы нагрузки – продольная компонента (вдоль оси z) и поперечная (перпендикулярная оси z) – имеют ожидаемую зависимость от пространственных переменных (которые определяют положение точки приложения силы на поверхности) и от используемой длины ножки протеза. В идеальных условиях (плотного контакта) суммарный момент точечных сил нагрузки равен нулю. Возникновение патологических отклонений в плотности контакта между протезом и костью будет приводить к изменениям в распределении сил по сравнению с тестовыми делениями и до появления нескомпенсированного суммарного момента этих сил, что, безусловно, влияет на развитие асептической нестабильности бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава. Проведенное исследование позволит определить рекомендации по конструкции эндопротеза, методам профилактики асептической нестабильности бедренного компонента тазобедренного сустава.

Ключевые слова: физико-математическое моделирование, силы нагрузки, ножка эндопротеза тазобедренного сустава.

УДК 616.728.16-009.7-089.5:615.357

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ВНУТРИСУСТАВНЫХ ИНЪЕКЦИЙ ГОРМОНАЛЬНЫХ ПРЕПАРАТОВ ПРИ ЛЕЧЕНИИ БОЛЕВОГО СИНДРОМА НА ФОНЕ ДИСФУНКЦИИ КРЕСТЦОВО-ПОДВЗДОШНОГО СУСТАВА

Рой И.В., Фищенко Я.В., Белая И.И., Кудрин А.П.

ГУ «Институт травматологии и ортопедии НАМН Украины», г. Киев

Резюме. Одним из возможных источников болевых синдромов пояснично-крестцового отдела позвоночника является крестцово-подвздошный сустав. Цель исследования: провести анализ оценки эффективности внутрисуставных инъекций кортикостероидов при болевом синдроме крестцово-подвздошного сустава на материале результатов лечения 87 пациентов, проходивших амбулаторное лечение в отделении реабилитации ГУ «Институт травматологии и ортопедии НАМН Украины» за 2015 г. Проведенное исследование показало высокую эффективность и длительный эффект применения внутрисуставных инъекций кортикостероидов при болевых синдромах, обусловленных дисфункцией крестцово-подвздошного сустава. Корреляционная связь между показателями динамики болевого синдрома и динамики индексов нарушения качества жизни свидетельствуют о тесной их взаимосвязи у пациентов с дисфункцией крестцово-подвздошного сустава.

Ключевые слова: позвоночник, крестцово-подвздошный сустав, инъекции кортикостероидов.