

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ  
ЛОКАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ И РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИЛОЖЕНИЯ  
ПРОДОЛЬНОЙ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

*В. А. Марченко, асп., В. Л. Красовский, д. т. н., проф.*

**Ключевые слова:** *устойчивость, цилиндрическая оболочка, критическая нагрузка, конечно-элементные модели, кинематический барьер*

**Постановка проблемы.** Известно [1; 6], что на устойчивость качественных упругих круговых цилиндрических оболочек, эксплуатация которых происходит при высоких значениях осевой сжимающей силы ( $N$ ), существенное влияние оказывают различные локальные квазистатические внешние воздействия. Расчет устойчивости оболочек при наличии указанных возмущений из-за порождаемой последними существенной неоднородности напряженно-деформированного состояния в окружном и в продольном направлениях представляет собой достаточно сложную задачу.

**Анализ публикаций.** В работе [1] было проведено теоретическое исследование устойчивости продольно сжатых упругих круговых цилиндрических оболочек при наличии локального квазистатического поперечного воздействия. Исследование проводилось на основе анализа локальных закритических конфигураций [2], построенных для рассматриваемых оболочек с использованием подхода, базирующегося на геометрическом методе А. В. Погорелова [3]. При этом рассматривались четыре варианта приложения и вида основной сжимающей продольной нагрузки. Эти варианты, соответствующие схемам, приведенным в работе [1], даны в настоящей работе на рисунке 1. Схема (вариант) на рисунке 1а соответствовала случаю силового продольного сжатия (мертвым грузом) со свободным поворотом плоскости торцов оболочки, схема на рисунке 1б – случаю кинематического (жесткого) сжатия также со свободным поворотом плоскости торцов. Схемы, представленные на рисунке 1в и г, соответствовали силовому и кинематическому сжатию при полном ограничении поворота плоскостей торцов оболочки. В работе [1], в частности, изучалось влияние схемы основного нагружения на минимальную величину продольной сжимающей силы, при которой реализуется переход оболочки к закритической форме с образованием одной вмятины (нижняя локальная критическая нагрузка –  $N_+$ , [4]), а также на величину энергетического барьера –  $\mathcal{E}$ , который необходимо преодолеть для перехода оболочки к локальной закритической конфигурации (в случае одинакового значения осевой сжимающей силы  $N$ ). При этом оказалось, что минимальные и максимальные значения величин  $N_+$  и  $\mathcal{E}$  соответствуют схемам 1 и 4, а отличие этих величин невелико и составляет соответственно 3,7 и 2,2 %. В этой же работе были определены расчетным путем силовые и кинематические барьеры, которые оказались в хорошем согласии с данными экспериментов.

**Цель настоящей работы** заключается в изучении с единых позиций (в среде ПК ANSYS) деформирования и выпучивания продольно сжатой упругой круговой цилиндрической оболочки в области локального поперечного кинематического квазистатического воздействия при различных вариантах приложения и вида основной нагрузки (схемы на рис. 1, а – г).

**Материалы и методы.** С целью сравнения результатов численный эксперимент проводился для оболочек, которые использовались в испытаниях [1; 5]. Геометрия оболочек: диаметр внутренней поверхности  $2R = 86$  мм; толщина  $h = 0,271$  мм ( $R/h = 150$ ); относительная длина  $L/R = 2,0$ . Материал – изотропная стальная лента X18H9н (модуль упругости  $E = 195$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; условный предел текучести  $\sigma_{02} = 800$  МПа).

Поперечное воздействие во всех случаях осуществлялось в среднем по длине оболочки сечения. Также одинаковой во всех случаях была последовательность приложения нагрузки, соответствующая «типичному внешнему» воздействию [5]: вначале прикладывалась по принятой схеме (рис. 1) основная нагрузка осевого сжатия до заданной величины  $N_0$ , затем осуществлялось последовательно возрастающее от нуля поперечное кинематическое воздействие (задавалось последовательно увеличивающееся радиальное перемещение (прогиб) оболочки  $W$ , положительный внутрь).

Для создания конечноэлементной модели (КЭМ) оболочки использовался элемент SHELL 281 из стандартной библиотеки конечных элементов (КЭ) ПК ANSYS, предназначенный для расчета линейных и нелинейных задач деформирования оболочек малой и средней толщины с большими перемещениями и углами поворотов. Этот КЭ имеет восемь узловых точек, у каждой из которых шесть степеней свободы: три перемещения в направлениях осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  узловой системы координат и три поворота относительно этих осей.

КЭМ оболочки строилась при помощи генератора сеток ПК. Учитывая большую изменяемость формы оболочки при локальном воздействии, на основании предварительных расчетов все КЭ принимались квадратными в плане с размером стороны 2 мм (число КЭ – 5 984). В области краевого эффекта проводилось сгущение сетки.

Во всех случаях фиксация оболочек в продольном направлении осуществлялась (в обозначениях ПК –  $uz = 0$ ) в точках, расположенных по окружности среднего поперечного сечения (в поперечной плоскости симметрии).

Схема основного продольного сжимающего нагружения, отражающая вид нагрузки и условия ее приложения, моделировалась следующим образом.

*Схема 1* (рис. 1 а) – *силовое нагружение с поворотом плоскости торцов*. Торцы оболочки шарнирно соединялись с жесткими дисками (модуль упругости диска  $E = 2 \times 10^{15}$  Па) в виде сплошных круговых цилиндров высотой (толщиной) 3 мм. В точках, расположенных по краям наружных поверхностей дисков, полностью ограничивались перемещения в плоскости  $X$ ,  $Y$  ( $ux = 0, uy = 0$ ). При этом допускался свободный поворот торцов относительно осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Средствами ПК на дисках устанавливалась специальная точка (через которую проходит ось оболочки). В этих специальных точках прикладывалась продольная нагрузка в виде сосредоточенной сжимающей силы  $N_0$ .

*Схема 2* (рис. 1 б) – *кинематическое нагружение с поворотом плоскости торцов*. Эта схема нагружения отличалась от схемы 1 только тем, что сжимающая нагрузка задавалась в специальных точках дисков в виде продольных перемещений  $\Delta Z_0$ . Соответствие между сжимающей силой  $N_0$  и величиной перемещений  $\Delta Z_0$  определялось в предварительных расчетах оболочки при ее силовом нагружении.

*Схема 3* (рис. 1 в) – *силовое нагружение без поворота плоскости торцов*. Рассматриваемая схема отличалась от схемы 1 тем, что, наряду с полным ограничением перемещений в плоскости  $X$ ,  $Y$  ( $ux = 0, uy = 0$ ) точек, расположенных по краям наружных поверхностей дисков, в этой же плоскости полностью ограничивались перемещения точек торцов оболочки ( $ux = 0, uy = 0$ ). Последнее условие полностью ограничивало поворот торцов при поперечном воздействии.

*Схема 4* (рис. 1 г) – *кинематическое нагружение без поворота плоскости торцов*. Схема нагружения 4 отличалась от схемы 3 тем, что сжимающая нагрузка задавалась в специальных точках дисков в виде продольных перемещений  $\Delta Z_0$ . Соответствие между сжимающей силой  $N_0$  и величиной перемещений  $\Delta Z_0$ , как и для схемы 2, определялось в предварительных расчетах оболочки при ее силовом нагружении.

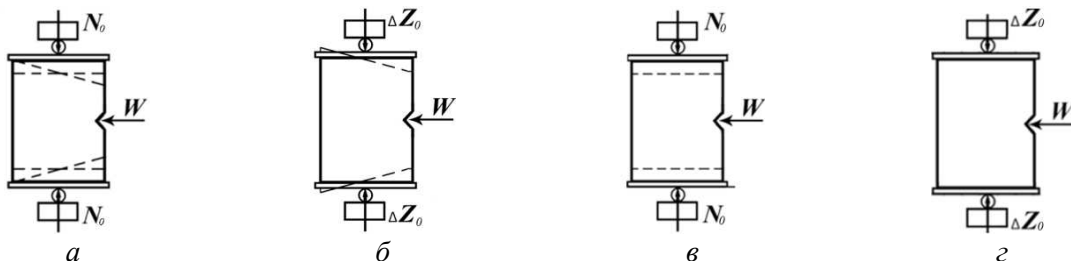


Рис. 1. Схемы нагружения оболочек 1 – 4 (а – г, соответственно)

На рисунке 2 а дана КЭМ оболочки с торцевым диском. Моделирование процесса нагружения проводилось в едином расчетном процессе геометрически нелинейного деформирования оболочки при двухэтапном ее нагружении, который обеспечивает ПК ANSYS. На первом этапе в автоматическом режиме пошагового нагружения (с предварительным назначением шага) к оболочке прикладывалась основная нагрузка до заданного значения  $N_0$ , а на втором этапе задавалось пошагово увеличивающееся кинематическое воздействие  $W$ . При этом на каждом шаге отслеживалась величина реакции оболочки на воздействие (величина

поперечной силы –  $Q$ ), что позволяло построить при заданных значениях  $N_0$  зависимости поперечной силы от радиального перемещения оболочки в области воздействия.

**Результаты и их обсуждение.** Для рассматриваемых расчетных моделей оболочек при отсутствии внешних воздействий относительные значения критической и предельной сжимающей силы для схем 1 – 4 соответственно составили:  $\bar{N}^{cr} = 1,005$  и  $\bar{N}^{lim} = 1,003$  (формы выпучивания даны на рисунке 2 б в). Здесь:  $\bar{N}^i = N^i/N^{cl}$ ,  $N^{cl}$  – классическое значение критической нагрузки оболочки при равномерном осевом сжатии, определяемое по формуле  $N^{cl} = 2\pi Eh/\sqrt{[3(1-\nu^2)]}$ .

Основным результатом настоящего исследования являются расчетные зависимости « $\alpha - \bar{W}$ », полученные для рассматриваемых схем нагружения при различных фиксированных значениях осевой сжимающей силы  $N_0$ . Здесь:  $\alpha$  – безразмерный параметр поперечной силы (реакции оболочки на воздействие)  $Q$ , определяемый по формуле  $\alpha = Q\sqrt{R/h}/(Eh^2)$ ;  $\bar{W} = W/h$  – относительный показатель (параметр) кинематического воздействия.

Типичные зависимости « $\alpha - \bar{W}$ » для рассматриваемых схем нагружения при различных значениях относительной основной нагрузки  $\bar{N}_0$ , даны на рисунке 3 (а – схема нагружения 1, б – схема 2, в – схема 3, г – схема 4).

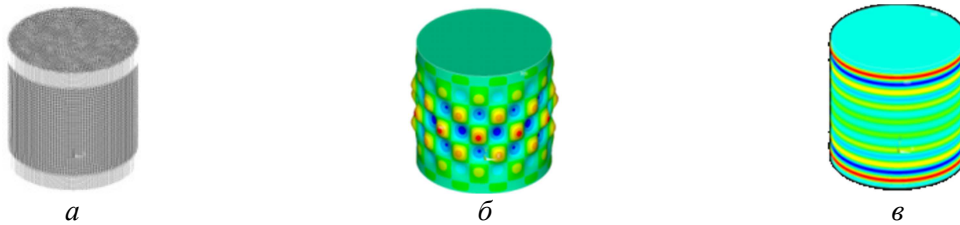


Рис. 2. КЭМ оболочки (а), а также формы выпучивания бифуркационного (б) и геометрически нелинейного (в) расчетов сжатых оболочек без внешних воздействий для схем нагружения 1 – 4

Расчетные зависимости « $\alpha - \bar{W}$ », полученные для схем нагружения 1 – 4, по своей сути, качественно полностью отражают особенности поведения продольно сжатых оболочек при наличии локальных поперечных воздействий, выявленные в экспериментальных исследованиях [1; 4]. Согласно этим исследованиям, последовательное увеличение кинематического воздействия при основной нагрузке  $N_0$ , которая меньше локальной критической нагрузки ( $N_0 < N_+$ ), приводит к локальной деформации оболочки в зоне воздействия. В случае снятия этого воздействия упругая оболочка полностью восстанавливает свою форму. Это в полной мере отражается в расчете. При  $N_0 = N_+$ , когда кривая « $\alpha - \bar{W}$ » касается оси абсцисс, не пересекая ее, на оболочке в области воздействия в момент соприкосновения равновесной ветви с осью образуется локальная закритическая вмятина, которая остается и после снятия воздействия. Значения относительной нижней локальной критической нагрузки, полученные в расчетах для схем нагружения 1 – 4, соответственно составили  $\bar{N}_+ = 0,487; 0,499; 0,510; 0,520$ .

При  $N_0 > N_+$  равновесная ветвь « $\alpha - \bar{W}$ » на ниспадающем участке пересекает ось абсцисс ( $\bar{W}$ ). Здесь, при  $\alpha = 0$  процесс нелинейного кинематического деформирования оболочки в локальной области достигает точки смены знака реакции оболочки на воздействие. Смена знака реакции, по своей сути, означает, что оболочка тянет за собой к ее центру объект, осуществляющий воздействие. Если между этим объектом и оболочкой нет двусторонней связи, и возможен ее отрыв от объекта воздействия при движении оболочки к центру кривизны, произойдет скачкообразный рост перемещений оболочки в области воздействия, в процессе которого оболочка перейдет к закритическому состоянию. Особенности этого состояния зависят от величины основной сжимающей нагрузки  $N_0$ , при которой происходит переход к закритической форме. При этом возможны два исхода.

В случае основных нагрузок  $N_0$ , близких к  $N_+$ , и отсутствии двусторонней связи между оболочкой и воздействием, докритическая вмятина скачком трансформируется в одиночную закритическую вмятину. Скачкообразное увеличение вмятины в области воздействия наблюдается в реальной ситуации (в физическом эксперименте [4; 6]). Этот же скачок имеет место и в рассматриваемом расчете. Так, для схемы нагружения 4 (рис. 3 г) равновесная ветвь 5

( $\bar{N}_0 = 0,6$ ) на ниспадающем участке пересекает ось абсцисс при  $\bar{W} = 2,0$ , а восходящий участок этой ветви пересекает ось при  $\bar{W} = 6,8$ . Очевидно, что в данном случае перескок произойдет при достижении воздействием значения параметра  $\bar{W} = 2,0$ , причем к закритической форме с одной локальной вмятиной, относительная амплитуда которой составляет  $\bar{W} = 6,8$ .

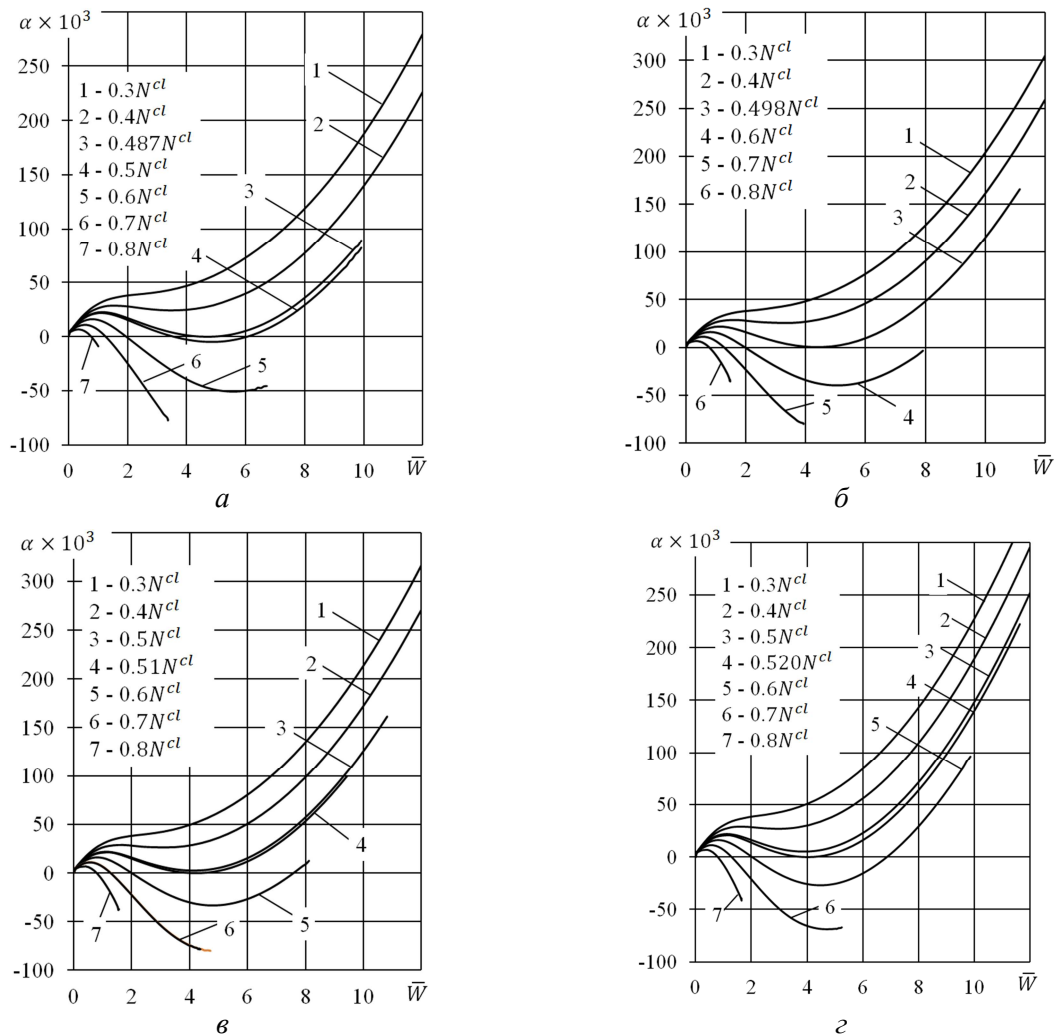


Рис. 3. Зависимости « $\alpha - \bar{W}$ » для оболочек, нагруженных по схемам 1 (а), 2 (б), 3 (в), 4 (г)

Заметим, что величина параметра перемещения, соответствующая  $\alpha = 0$  ниспадающей ветви зависимости « $\alpha - \bar{W}$ », представляет собой кинематический барьер ( $\bar{W}_+$ ), а максимальная величина параметра поперечной силы – силовой барьер ( $\alpha_+$ ) при заданной величине основной нагрузки  $\bar{N}_0$ , которую в данном случае следует рассматривать как критическую.

Второй исход реализуется в случае больших значений основной сжимающей нагрузки  $N_0$ . Так, из физического эксперимента [1; 4; 6] известно, что если величина основной нагрузки больше так называемой [4] верхней локальной критической нагрузки ( $N^+$ ), локальное воздействие с односторонней связью с оболочкой приводит, при последовательном его увеличении, к общему выпучиванию оболочки (с образованием нескольких закритических вмятин). В настоящем численном эксперименте это проявляется в следующем. Равновесные ветви, приведенные на рисунке 3, г, для основной нагрузки  $\bar{N}_0 \geq 0,7$  (кривые 6, 7), имеют вид незавершенных, поскольку у них отсутствуют восходящие участки. Аналогичный вид имеют кривые 5 – 7 для схем нагружения 1, 2, 3, представленные на рисунке 3 а, б, в. Причиной их незавершенности является нарушение сходимости процесса расчета. Трактовать этот факт следует как отсутствие восходящих равновесных ветвей с одной локальной закритической вмятиной в этой области основного нагружения, т. е. трансформация локальной докритической вмятины в этом случае осуществляется не к локальной закритической форме, а к общим формам выпучивания. Это подтверждается визуализацией процесса расчета рассматриваемых

оболочек. Так, шагу расчета, на котором сообщается об отсутствии сходимости процесса расчета, соответствует форма оболочки с несколькими вмятинами (рис. 4). Таким образом, расчетным путем с использованием ПК ANSYS можно получить не только величину  $N_+$ , но и значение верхней локальной критической нагрузки  $N^+$ , т. е. установить область существования устойчивой локальной за критической конфигурации с одной вмятиной. Значения относительной верхней локальной критической нагрузки для схем нагружения 1 – 4 составили  $\bar{N}^+ = 0,555; 0,560; 0,616; 0,623$ .

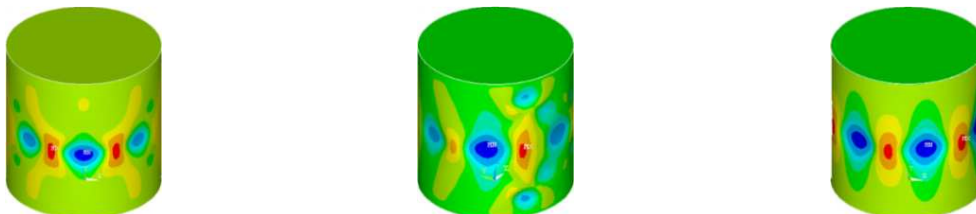


Рис. 4. Примеры общей потери устойчивости оболочки

Основной причиной количественного отличия в значениях нижних  $N_+$  и верхних  $N^+$  локальных критических нагрузок является возможность для схем 1 – 2 поворота плоскости торцов, что для схем 3 – 4 полностью исключено. На рисунке 5 приведен вид формы верхних торцов оболочек для схем нагружения 1 – 2 (а), 3 – 4 (б).



Рис. 5. Формы верхних торцов оболочек для схем нагружения 1 – 2 (а), 3 – 4 (б)

На рисунке 6 представлены также для всех рассматриваемых вариантов основного нагружения оболочки кинематические (а) и силовые (б) барьеры (кривые 1 – 4 соответствуют схемам нагружения 1 – 4). Силовые барьеры для схем основного нагружения 1 – 4 совпадают. При  $N_0 > 0,6$  кинематические барьеры для схем 1 – 4 практически совпадают, а при  $N_0 > 0,7$  эти барьеры совпадают для всех схем нагружения.

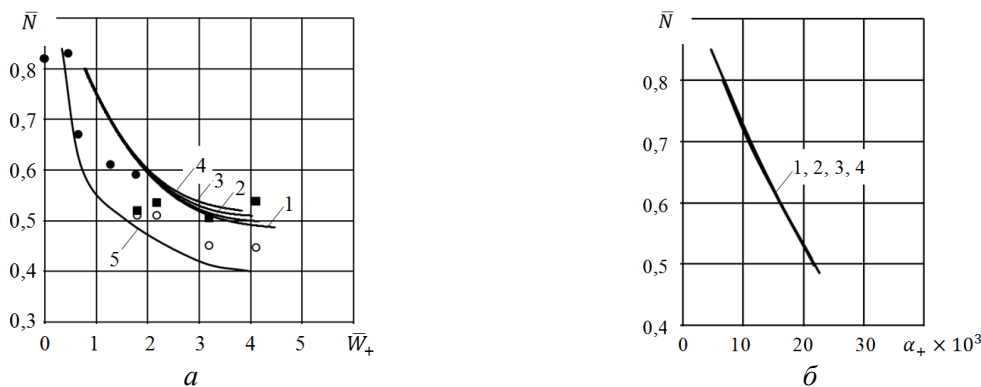


Рис. 6. Кинематические (а) и силовые (б) барьеры

Наряду с расчетными кривыми кинематических барьеров, на рисунке б а приведены кинематические барьеры, полученные в физическом эксперименте [1; 6], а также расчетная зависимость (кривая 5), построенная для кинематического барьера на основе аналитического подхода [3]. Здесь темные кружки соответствуют общей потере устойчивости оболочек, светлые – локальному выпучиванию при локальном воздействии, темные квадратики – общей потере устойчивости оболочек с одной локальной за критической вмятиной, т. е. значению верхней локальной критической нагрузки  $\bar{N}^+$ , полученной в эксперименте [1; 6].

**Выводы.** 1. Выполнен численный анализ в среде ПК ANSYS геометрически нелинейного деформирования и устойчивости продольно сжатых упругих круговых цилиндрических оболочек при локальном кинематическом квазистатическом поперечном воздействии для четырех вариантов (схем) основного нагружения оболочки продольной нагрузкой. Рассматривалось два вида основного нагружения: силовое (схемы 1, 3) и кинематическое (схемы 2, 4) и два типа закрепления краев оболочки. В первом и во втором типе закрепления торцы оболочек шарнирно соединялись с жесткими дисками, через которые осуществлялось нагружение. При этом для одного типа допускался свободный поворот дисков (схемы 1 – 2), для другого – диски жестко фиксировались и оставались при неоднородном в окружном направлении деформировании оболочки параллельными друг другу (схемы 3 – 4).

2. Расчетные зависимости, характеризующие деформирование и выпучивание оболочек, полученные для схем нагружения 1–4, качественно полностью отражают особенности поведения продольно сжатых оболочек при наличии локальных поперечных воздействий, выявленные в физическом эксперименте. Для каждой из указанных схем основного нагружения оболочки определены характерные нагрузки, в частности, нижняя  $\bar{N}_+$  и верхняя  $\bar{N}^+$  локальные критические нагрузки, которые для схем нагружения 1–4, соответственно составили  $\bar{N}_+ = 0,487; 0,499; 0,510; 0,520$  и  $\bar{N}^+ = 0,555; 0,560; 0,616; 0,623$ . Эти значения превышают примерно на  $0,1 N^{cl}$  величины  $\bar{N}_+$  и  $\bar{N}^+$ , полученные в физическом эксперименте [6], и в то же время близки к области существования закритической формы оболочки с одной вмятиной, полученной расчетным путем вариационным итеративным численным методом решения двумерных нелинейных краевых задач, которая составляет для рассматриваемых оболочек  $(0,49 – 0,7) N^{cl}$  [7].

3. Получены расчетные кинематические и силовые барьеры, которые для схем нагружения 1 – 4 практически не отличаются и дают приближение к физическому эксперименту сверху.

4. ПК ANSYS является исключительно эффективным инструментом анализа сложных неоднородных задач теории оболочек.

*Исследование проведено в рамках гранта Фонда Гумбольдта № 3.4 – Фокоор – UKR/1070297.*

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Евкин А. Ю.** Устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек при локальных квазистатических воздействиях / А. Ю. Евкин, В. Л. Красовский, Л. И. Маневич // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 96 – 100.

2. **Моссаковский В. И.** К исследованию закритических форм равновесия сжатой цилиндрической оболочки / В. И. Моссаковский, Л. И. Маневич, А. Ю. Евкин // Прикл. механика. – 1975. – № 11. – С. 24 – 30.

3. **Погорелов А. В.** Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1967. – 280 с.

4. **Владимиров С. А.** Экспериментальное исследование местной потери устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии / С. А. Владимиров, В. И. Конох, В. И. Моссаковский и др. // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – № 4. – С. 158 – 161.

5. **Krasovsky V.** Deforming and buckling of axially compressed cylindrical shells with local loaded in numerical simulation and experiments) / V. Krasovsky, V. Marchenko, R. Schmidt //Thin-Walled Structures. – 2011. – 49. – P. 576 – 580.

6. **Конох В. И.** Влияние внешних локальных возмущений на докритическое поведение и устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек / В. И. Конох, В. Л. Красовский // Тр. IX Всес. конф. по теории оболочек и пластин. – Л. : Судостроение, 1975. – С. 377 – 380.

7. **Громов В. А.** Закритическое поведение и ветвление решений в нелинейных задачах теории цилиндрических оболочек: дисс. кандидата физ.-мат. наук: 01.02.04 / В. А. Громов – ДНУ – Днепрпетровск, 2006. – 141 с.

УДК 539.3:624.074.435.:624.073

**Деформирование цилиндрической оболочки при поперечном локальном воздействии и различных условиях приложения продольной сжимающей нагрузки / В. А. Марченко, В. Л. Красовский // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Д. : ПГАСА, 2013. – № 3. – С. 14 – 19. – рис. 6. – Библиогр.: (7 назв.).**

С единых позиций проведен сравнительный численный анализ геометрически нелинейного деформирования и выпучивания продольно сжатой упругой круговой цилиндрической оболочки в области локального поперечного кинематического квазистатического воздействия для четырех комбинаций граничных условий и видов основной нагрузки (силовое либо кинематическое нагружение). Установлено, что основной причиной количественного отличия в значениях нижних  $N_+$  и верхних  $N^+$  локальных критических нагрузок является возможность для схем 1–2 поворота плоскости торцов, что для схем 3–4 полностью исключено. Исследование проведено в рамках гранта Фонда Гумбольдта № 3.4 – Fokoop – UKR/1070297.

**Ключевые слова:** *устойчивость, цилиндрическая оболочка, критическая нагрузка, конечно-элементные модели, кинематический барьер.*

**Деформування циліндричної оболонки при поперечному локальному збуренні та за різних умов прикладення подовжнього стискаючого навантаження / В. А. Марченко, В. Л. Красовський // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Д. : ПДАБА, 2013. – № 3. – С. 14 – 19. – рис. 6. – Бібліогр.: (7 назв.).**

З єдиних позицій проведений порівняльний чисельний аналіз геометрично нелінійного деформування і випучування подовжньо стислої пружної кругової циліндричної оболонки в області локального поперечного кінематичного квазістатичного збурення для чотирьох комбінацій граничних умов і видів основного навантаження (силове або кінематичне навантаження). Встановлено, що основною причиною кількісної відмінності в значеннях нижніх  $N_+$  та верхніх  $N^+$  локальних критичних навантажень є можливість для схем 1 – 2 повороту площини торців, що для схем 3 – 4 цілком виключено. Дослідження проведено в рамках гранту фонду Гумбольдта № 3.4 – Fokoop – UKR/1070297.

**Ключові слова:** *стійкість, циліндрична оболонка, критичне навантаження, кінцево-елементні моделі, кінематичний бар'єр.*

**The deformation of the cylindrical shell with transverse and local effects of different conditions of application of the longitudinal compressive load / V. A. Marchenko, V. L. Krasovsky // Visnyk of Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture. – D. : PSACEA, 2013. – № 3. – P. 14 – 19. – pic. 6. – Bibliogr.: (7 names).**

The numerical comparative analysis of geometrically nonlinear deformation and buckling of elastic circular cylindrical shell undergoing the local transversal kinematical action and longitudinal compression is represented. There are analyzed two combinations of boundary conditions and two primary load types (force or kinematical action). It was established that the behavior of shell principally depends on primary load character and conditions that restrict the out-of-plane edge displacements. Research is done within the grant of Fund of Humboldt № 3.4 – Fokoop – UKR/1070297.

**Key words:** *stability, cylindrical shell, the critical load, finite-element model, the kinematic threshold.*