

zalizobetonnykh shpal ukrayins'koho vyrobnytstva [Tekst] / V. V. Rybkin, Yu. L. Zayats', V. V. Kovalenko, P. O. Pshin'ko // Visnyk Dnipropetr. nats. un-tu zalizn. transp. im. akad. V. Lazaryana. – 2011. – Vyp. 39. – D. : Vyd-vo DNUZT, 2011. – S. 173 – 179.

7. **Matias D., Brito de J., Rosa A., Pedro D.** Mechanical properties of concrete produced with recycled coarse aggregates – influence of the use of superplasticizers. Construction and building materials. – 2013. – Vol. 44. – P. 101 – 109.

8. **Nagrockiene D., Pundiene I., Kicaite A.** The effect of cement type and plasticizer addition on concrete properties. Construction and building materials. – 2013. – Vol. 45. – P. 324 – 331.

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В ВОЛОКНИСТОМ КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ В СЛУЧАЕ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ

В. В. Данишевский, д. т. н, А. И. Рыжков асс.

Ключевые слова: нелинейные волны, композиционный материал, неидеальный контакт

Введение. Упругие волны деформации, распространяющиеся в микронеоднородных композиционных материалах, могут быть подвержены действию эффектов нелинейности, дисперсии и диссипации [1]. Нелинейность приводит к локализации энергии, генерации высших гармоник и перекачке энергии из низкочастотной в высокочастотную часть спектра. Дисперсия приводит к рассеянию энергии. Крутизна волнового фронта уменьшается и, таким образом, влияние нелинейности становится менее выраженным. Если нелинейность и дисперсия действуют одновременно, они компенсируют влияние друг друга. В этом случае возможно распространение стационарных периодических нелинейных волн. Усиление нелинейности приводит к формированию локализованных волн колоколообразной формы (солитонов) или ударного типа (кинков). Такие волны аккумулируют большое количество энергии и способны распространяться на значительные расстояния, сохраняя постоянными форму и скорость.

Анализ публикаций. Нелинейные упругие волны в твердых телах исследовались многими авторами [2 – 4]. Как правило, основное внимание уделялось однородным материалам и конструкциям, в которых эффект дисперсии вызван геометрическими факторами. Влияние структурной дисперсии на распространение нелинейных волн изучено меньше.

Цель статьи. Работа посвящена исследованию антиплоских нелинейных волн деформации, распространяющихся в однонаправленном волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами.

Изложение материала. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композит, состоящий из матрицы $\Omega^{(1)}$ и квадратной решетки цилиндрических включений $\Omega^{(2)}$ (рис. 1). Предположим, что физической и геометрической нелинейностью можно пренебречь, а нелинейные свойства модели в первую очередь обусловлены неидеальными условиями контакта на границе раздела компонентов. Рассмотрим антиплоские волны сдвига, распространяющиеся в плоскости x_1x_2 .

Исходное волновое уравнение имеет вид:

$$\mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x_2^2} \right) = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $\mu^{(n)}$ – модуль сдвига; $\rho^{(n)}$ – плотность; $u^{(n)}$ – перемещение в направлении x_3 . Здесь и ниже верхний индекс (n) обозначает различные компоненты материала, $n = 1, 2$

Краевые условия на границе раздела компонентов $\partial\Omega$ могут быть записаны в виде [5]:

$$\sigma^* = \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u^{(1)} - u^{(2)} = \alpha l \frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} - \alpha\beta l \left(\frac{\sigma^*}{\mu^{(1)}} \right)^3 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\sigma^{(n)} = \mu^{(n)} (\partial u^{(n)} / \partial \mathbf{n})$; $\partial / \partial \mathbf{n}$ – производная по нормали \mathbf{n} к границе $\partial\Omega$; l – размер

ячейки периодичности; α и β – безразмерные параметры адгезии. Значение $\alpha = 0$ соответствует идеальному контакту, $\alpha \rightarrow \infty$ – полному отсутствию контакта между волокнами и матрицей. При $\beta = 0$ упругие свойства границы раздела являются линейными, а с увеличением β (усиливается влияние нелинейности. В случае $\beta < 0$ нелинейность является мягкой, а в случае $\beta > 0$ – жесткой).

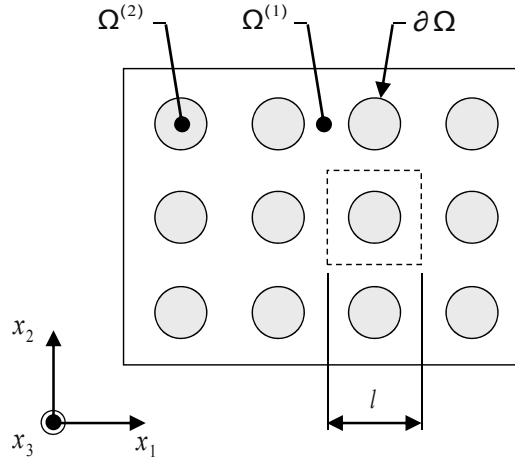


Рис. 1. Волокнистый композиционный материал

В работе [5] на основании краевой задачи (1) – (3) при помощи метода осреднения высшего порядка получено осредненное уравнение, описывающие процессы распространения упругих волн на макроуровне:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \beta \mu_2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \eta^2 L^2 \mu_3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где $\eta = l/L < 1$, L – длина волны; ρ – осредненная плотность, $\rho = c^{(1)} \rho^{(1)} + c^{(2)} \rho^{(2)}$; $c^{(n)}$ – объемные доли компонентов композиционного материала; μ_1, μ_2, μ_3 – эффективные упругие коэффициенты. Для коэффициентов μ_1 и μ_2 были получены аналитические выражения, а μ_3 определялся путем численного интегрирования по области ячейки периодичности. Отметим, что коэффициенты μ_1, μ_2, μ_3 всегда положительны. Осредненное уравнение (4) справедливо, если длина волны L существенно больше, чем размер l ячейки периодичности.

Пусть стационарная плоская волна распространяется в направлении, определяемом волновым вектором \mathbf{k} . Можно записать: $k = k_1 e_1 + k_2 e_2$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные базисные векторы декартовой системы координат. Проекция вектора \mathbf{k} на оси координат равны: $k_1 = k \cos \varphi$, $k_2 = k \sin \varphi$, где $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 2\pi/L$; φ – угол между осью x_1 и направлением вектора \mathbf{k} . Решение удовлетворяет условию:

$$u(\mathbf{x}, t) = u(\xi), \quad (5)$$

где ξ – бегущая координата, $\xi = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} - vt$; v – фазовая скорость; \mathbf{e}_k – единичный волновой вектор, $\mathbf{e}_k = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi$; $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$

Введем безразмерную деформацию профиля волны:

$$f = du / d\xi. \quad (6)$$

Подставив соотношения (5), (6) в уравнение (4) и проинтегрировав по ξ , получим уравнение ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + af + bf^3 + c = 0, \quad (7)$$

где $a = \frac{\mu_1(1-v^2/v_0^2)}{\mu_3 l^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}$, $b = \frac{\beta \mu_2}{3\mu_3 l^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}$, c – постоянная интегрирования.

Примем во внимание тот факт, что перемещения u не могут возрасть неограниченно. Это значит, что средняя деформация по периоду волны должна равняться нулю:

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(\xi) d\xi = 0. \quad (8)$$

Условие (8) позволяет определить постоянную c ; в данном случае получаем $c = 0$.

Умножим уравнение (3.23) на $df/d\xi$ и проинтегрируем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + \frac{a}{2} f^2 + \frac{b}{4} f^4 = W_0. \quad (9)$$

Здесь W_0 – полная энергия осциллятора, $W_0 > 0$; $W_k = (1/2)(df/d\xi)^2$ – кинетическая энергия; $W_p = (a/2)f^2 + (b/4)f^4$ – потенциальная энергия; $W_0 = W_k + W_p$. Разделя переменные в уравнении (8), запишем:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{df}{\sqrt{W_0 - \frac{a}{2} f^2 - \frac{b}{4} f^4}}. \quad (10)$$

Решение будет ограниченным и периодическим, если функция кинетической энергии $W_k = W_0 - W_p = W_0 - (a/2)f^2 - (b/4)f^4$ принимает положительные значения на интервале между двумя своими вещественными корнями. Вид решения зависит от знаков коэффициентов a и b . Рассмотрим отдельно случаи мягкой ($\beta < 0$, $b < 0$) и жесткой ($\beta > 0$, $b > 0$) нелинейности.

Мягкая нелинейность. Если $a < 0$, $b < 0$, полином W_k не имеет вещественных корней (рис. 2, а). Ограниченные периодические решения уравнения (9) не существуют.

Если $a > 0$, $b < 0$, полином W_k имеет четыре вещественных корня $\pm f_1$, $\pm f_2$ (рис. 2, б), где

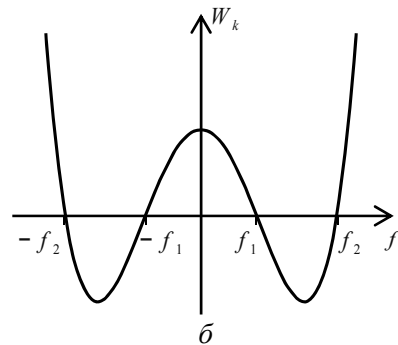
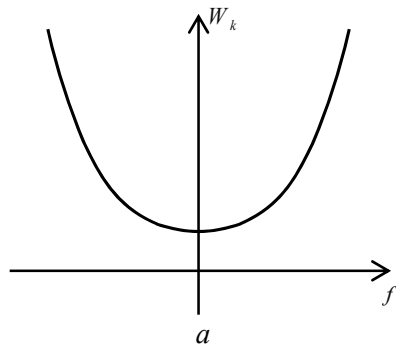
$$f_1^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{-b}, \quad f_2^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{-b}, \quad f_1^2 < f_2^2. \quad (11)$$

Периодическое решение существует при $f_1 \geq f \geq -f_1$.

Выразим полином W_k через его корни $W_k = -(b/4)(f_1^2 - f^2)(f_2^2 - f^2)$ и выполним замену переменных:

$$g^2 = f^2 / f_1^2, \quad 0 \leq g^2 \leq 1; \quad (12)$$

$$s^2 = f^2 / f_2^2, \quad 0 \leq s^2 \leq 1. \quad (13)$$



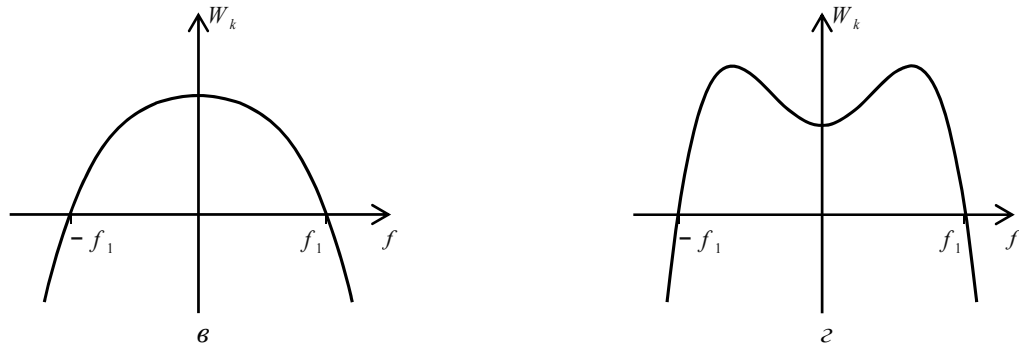


Рис. 2. Кинетическая энергия осциллятора с кубической нелинейностью;
 $a - a < 0, b < 0$; $б - a > 0, b < 0$; $в - a > 0, b > 0$; $з - a < 0, b > 0$

Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2} d\xi = \frac{dg}{\sqrt{(1-g^2)(1-s^2g^2)}}. \quad (14)$$

Интегрируя выражение (14) и обращая эллиптический интеграл, стоящий в правой части, получим:

$$f = f_1 \operatorname{sn}\left(\sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2} \xi, s\right). \quad (15)$$

Введем обозначения:

$$F = 2f_1, \quad \kappa = \sqrt{-\frac{b}{2}f_2^2}, \quad (16)$$

где F – амплитуда, $F > 0$; κ – постоянная распространения. Тогда выражение (15) запишется в виде:

$$f = \frac{F}{2} \operatorname{sn}(\kappa\xi, s). \quad (17)$$

Длина волны равна $L = 4K(s)/\kappa$. На основании соотношений (11), (13), (16) после тривиальных преобразований получим трансцендентное уравнение, из которого можно определить модуль эллиптической функции s :

$$s^2 K(s)^2 = -\frac{\beta F^2 \mu_2}{384 \eta^2 \mu_3 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}, \quad (18)$$

и найдем скорость волны:

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16(1+s^2)K(s)^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \quad (19)$$

Здесь v_0 – эффективная фазовая скорость в линейной однородной среде, $v_0 = \sqrt{\mu_1 / \rho}$.

Жесткая нелинейность. Пусть $b > 0$. Графики функции кинетической энергии изображены на рис. 2, в (при $a > 0$) и на рис. 2, з (при $a < 0$). В обоих случаях полином W_k имеет два вещественных $\pm f_1$ и два мнимых $\pm if_2$ корни, которые равны:

$$f_1^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{b}, \quad f_2^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bW_0}}{b}.$$

Периодическое решение существует, если $f_1 \geq f \geq -f_1$.

Представим W_k в виде $W_k = (b/4)(f_1^2 - f^2)(f_2^2 + f^2)$ и введем переменные: $g^2 = 1 - f^2/f_1^2$, $0 \leq g^2 \leq 1$; $s^2 = (1 + f_2^2/f_1^2)^{-1}$. Здесь $0 \leq s^2 \leq 1/2$ при $a > 0$ и $1/2 \leq s^2 \leq 1$ при $a < 0$. Также обозначим: $F = 2f_1 > 0$, $\kappa = \sqrt{(b/2)(f_1^2 + f_2^2)}$.

Выполнив преобразования, аналогичные описанным выше, найдем:

$$f = \frac{F}{2} \operatorname{cn}(\kappa \xi, s), \quad (20)$$

$$s^2 K(s)^2 = \frac{\beta F^2 \mu_2}{384 \eta^2 \mu_3 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}, \quad (21)$$

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 16(1 - 2s^2) K(s)^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \quad (22)$$

Длина волны равна $L = 4K(s)/\kappa$. Уравнения (18) и (21) переходят друг в друга при изменении знака параметра β .

В рассматриваемой задаче тип нелинейности (мягкая при $\beta < 0$ или жесткая при $\beta > 0$) принципиально влияет на характер решения. Форма периодических волн деформации изображена на рис. 3. Расчеты выполнены на основании выражений (17) и (20). Величина модуля s характеризует интенсивность нелинейных эффектов.

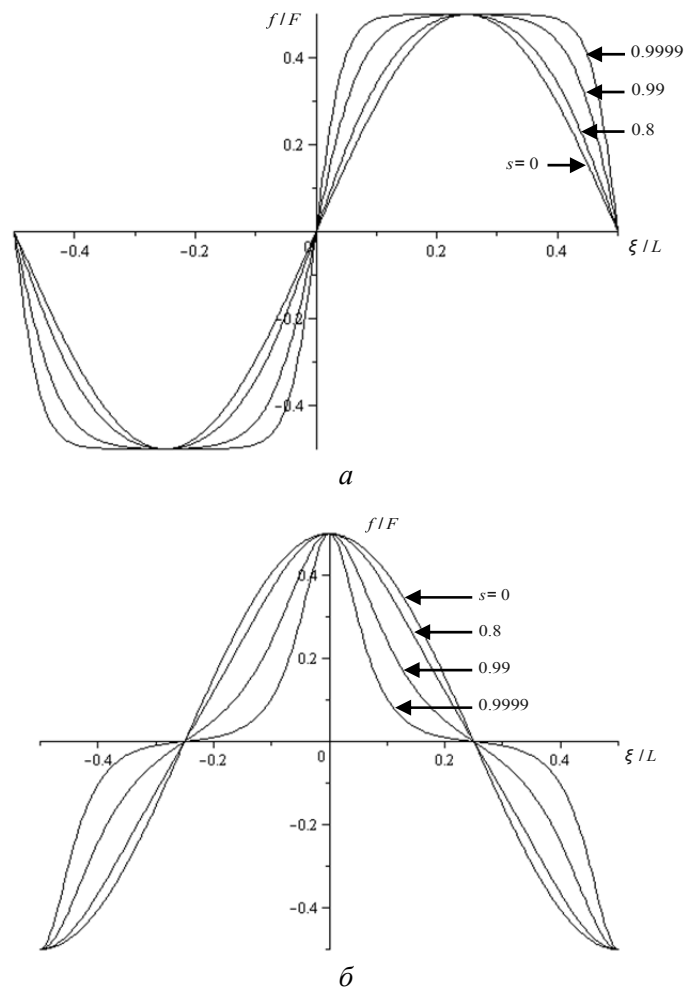


Рис. 3. Периодические нелинейные волны деформации; а – мягкая нелинейность ($\beta < 0$), б – жесткая нелинейность ($\beta > 0$)

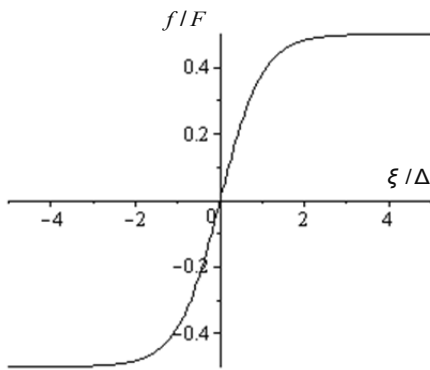
В случае $s = 0$ имеют место предельные переходы к линейному решению:

$$f = \frac{F}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \text{ при } \beta < 0; \quad f = \frac{F}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} \xi\right) \text{ при } \beta > 0;$$

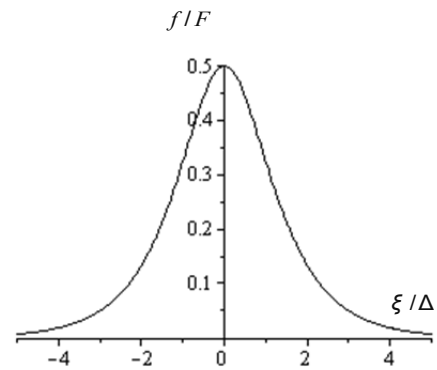
$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 4\pi^2 \frac{\mu_3}{\mu_1} \eta^2 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi).$$

В случае $s=1$ в композиционном материале формируются локализованные волны деформации. Если нелинейность мягкая, образуется волна ударного типа (кинк, рис. 4, а):

$$f = \frac{F}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = -\frac{24\mu_3(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{F^2 \beta \mu_2}, \quad \frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{2\mu_3 l^2}{\mu_1 \Delta^2} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi), \quad \beta < 0.$$



а



б

Рис. 4. Локализованные нелинейные волны деформации; а – мягкая нелинейность ($\beta < 0$), б – жесткая нелинейность ($\beta > 0$)

Кинк распространяется в т. н. «дозвуковом» режиме ($v < v_0$). При этом увеличение амплитуды волны F приводит к уменьшению ее ширины Δ и скорости v .

Если нелинейность жесткая, локализованное решение имеет вид колоколообразной волны (солитона, рис. 4, б):

$$f = \frac{F}{2 \operatorname{ch}(\xi / \Delta)}, \quad \frac{\Delta^2}{l^2} = \frac{24\mu_3(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{F^2 \beta \mu_2}, \quad \frac{v^2}{v_0^2} = 1 + \frac{\mu_3 l^2}{\mu_1 \Delta^2} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi), \quad \beta > 0.$$

В этом случае режим распространения является «сверхзвуковым» ($v > v_0$). Увеличение амплитуды солитона сопровождается уменьшением его ширины и увеличением скорости.

Таким образом, в данной задаче именно тип нелинейности, а не физико-механические свойства материала определяет вид локализованной волны деформации.

Рассмотрим численные результаты для композита, состоящего из алюминиевой матрицы ($\mu^{(1)} = 27.9$ ГПа, $\rho^{(1)} = 2700$ кг/м³) и никелевых волокон ($\mu^{(2)} = 75.4$ ГПа, $\rho^{(2)} = 8940$ кг/м³). Объемная доля волокон $c^{(2)} = 0.4$. Были приняты следующие значения параметров адгезии: $\alpha = 0.1$, $|\beta| = 10^5$. На основании решений, полученных в работе [5], определяем эффективные упругие коэффициенты: $\mu_1 = 33.1$ ГПа, $\mu_2 = 21.6$ ГПа, $\mu_3 = 0.119$ ГПа. Волна распространяется ортогонально по отношению к сторонам ячейки периодичности: $\varphi = 0$.

Зависимость фазовой скорости v от модуля s приведена на рисунке 5. В случае мягкой нелинейности имеет место «дозвуковой» режим, $v < v_0$. В случае жесткой нелинейности $v < v_0$ если $s^2 < 1/2$ и $v > v_0$ если $s^2 > 1/2$. Пороговое значение $s_0^2 = 1/2$, при котором происходит смена скоростного режима, определяется качественными свойствами найденного аналитического решения и не зависит ни от свойств композиционного материала, ни от направления распространения волны.

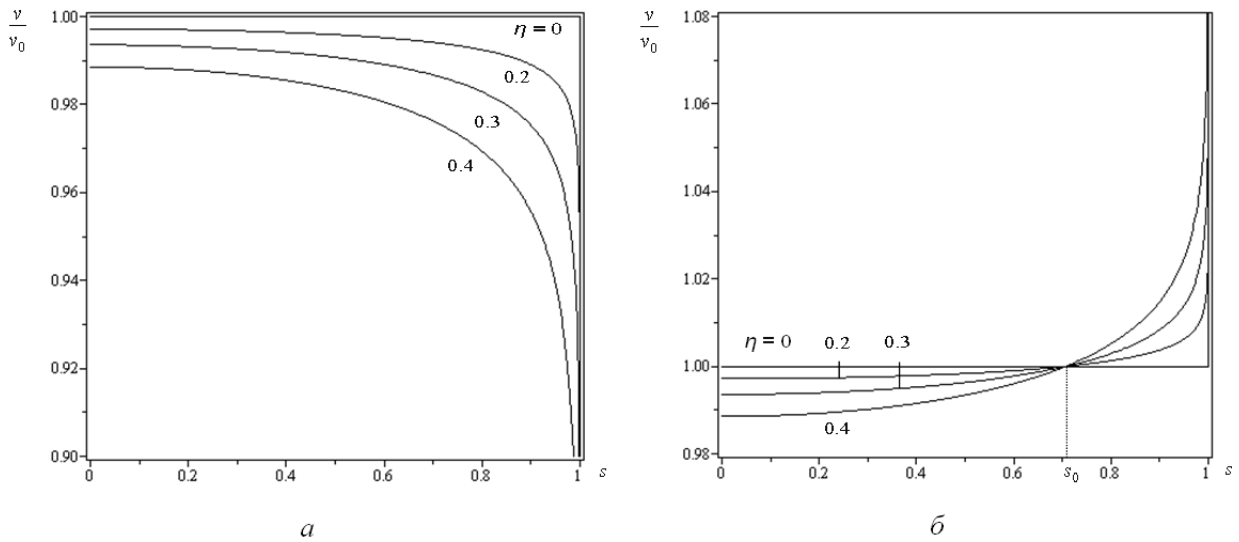


Рис. 5. Фазовая скорость нелинейной волны деформации;
 а – мягкая нелинейность ($\beta < 0$), б – жесткая нелинейность ($\beta > 0$)

На рисунке 6 приведена параметрическая зависимость модуля s от F и η , полученная путем численного решения уравнения (18) (или (21)). Область упругих деформаций ограничена значением $F \leq 10^{-3}$, характерным для большинства конструкционных материалов.

Анализ полученных численных данных показывает, что влияние нелинейности на форму и на скорость волны становится существенным, если $s > 0.6$. При этом $\eta < 0.2$ и, значит, решение можно получить в рамках использованного в работе длинноволнового приближения. Точность осредненной модели (4) ухудшается при $\eta > 0.4$. В этом случае $s < 0.34$ и нелинейными эффектами можно пренебречь.

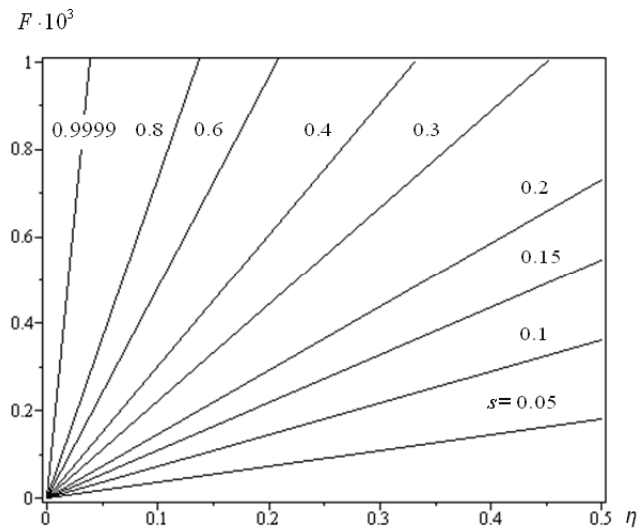


Рис. 6. Модуль s , характеризующий интенсивность нелинейных эффектов

Выводы. В работе получены аналитические решения, описывающие распространение периодических антиплоских нелинейных волн деформации в однонаправленном волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами.

В данной задаче тип нелинейности (мягкая или жесткая) принципиально влияет на характер решения. В случае мягкой нелинейности в композиционном материале могут формироваться локализованные волны деформации ударного типа (кинк), а в случае жесткой нелинейности локализованные волны деформации имеют колоколообразную форму

(солитоны).

Анализ полученных численных результатов позволяет оценить область применимости различных приближенных теорий, которые используются для моделирования упругих волн в твердых телах. Показано, что распространение нелинейных волн можно исследовать в рамках длинноволновых моделей, а при изучении коротких, сильно диспергирующих волн достаточно ограничиться линейным приближением.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М. : Наука, 1975. – 416 с.
2. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М. : Изд. Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
3. **Samsonov A. M.** Strain solitons in solids and how to construct them. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 230 p.
4. **Порубов А. В.** Локализация нелинейных волн деформации. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 208 с.
5. **Рыжков А. И.** Макроскопическое нелинейное волновое уравнение для волокнистого композиционного материала в случае неидеального контакта между компонентами // Вісник ПДАБА. – 2014. – № 2. – С. 43 – 50.

SUMMARY

Problem statement. Elastic waves propagating in micro-composite materials may be exposed to the effects of nonlinearity, dispersion and dissipation. Nonlinearity leads to localization of energy, higher harmonic generation and transfer of energy from low frequency to high frequency portion of the spectrum. Dispersion leads to energy dissipation. The steepness of the wave front is reduced, and thus, the effect becomes less pronounced nonlinearity. If the nonlinearity and dispersion act simultaneously, they compensate each other's influence. In this case, stationary periodic nonlinear waves can propagate. Strengthening of nonlinearity leads to the formation of localized bell-shaped waves (solitons) or impact waves (kinks). Such waves accumulate a lot of energy and are able to travel considerable distances, keeping constant shape and velocity.

Analyzing of the resent research. Nonlinear elastic waves in solids studied by many authors. Usually focused on homogeneous materials and structures, in which the effect of the dispersion part of geometrical factors. The impact of the dispersion on the propagation of nonlinear waves is studied less..

Research objective. This work investigates antiplanar nonlinear deformation waves propagating in a unidirectional fiber composite in the case of non-ideal contact between the components.

Conclusions. In this paper analytical solutions describing the propagation of nonlinear strain waves in a unidirectional fiber composite in the case of non-ideal contact between the components was obtained. Type of nonlinearity (soft or hard) fundamentally affects the nature of the decision. In the case of a soft non-linearity in the composite material can form localized strain wave impactor (kink), and a rigid wave nonlinearity localized deformations have a bell-shaped (solitons). Analysis of the numerical results obtained allows to estimate the range of applicability of various approximate theories that are used for modeling elastic waves in solids.

REFERENCES

1. Kunin I. A. Teorija uprugih sred s mikrostrukturaj. Nelokal'naja teorija uprugosti. – М.: Nauka, 1975. – 416 s.
2. Erofeev V. I. Volnovye processy v tverdyh telah s mikrostrukturaj. – М.: Izd. Mosk. un-ta, 1999. – 328 s.
3. Samsonov A. M. Strain solitons in solids and how to construct them. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. – 230 p.
4. Porubov A. V. Lokalizacija nelinejnyh voln deformacii. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 208 s.
5. Ryzhkov A. I. Makroskopicheskoe nelinejnoe volnovoe uravnenie dlja voloknistogo kompozicionnogo materiala v sluchae neideal'nogo kontakta mezhdju komponentami // Visnyk PDABA. – 2014. – № 2. – S. 44 – 52.