

УДК 539.3/8

## ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ В ШАРНИРАХ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СТЕРЖНЕЙ

БОГОМАЗ В. Н.<sup>1\*</sup>, к. ф.-м. н.,БОНДАРЕНКО Л. Н.<sup>2\*</sup>, к. т. н., доц.,ЩЕКА И. Н.<sup>3</sup>, к. т. н., доц.,СЕМЕНЮК Л. О.<sup>4</sup>, студ.

<sup>1\*</sup> Кафедра военной подготовки, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: wbogomas@i.ua, ORCIDID: 0000-0001-5913-2671

<sup>2\*</sup> Кафедра прикладной механики, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID0000-0002-2212-3058

<sup>3\*</sup> Кафедра военной подготовки, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCIDID: 0000-0002-4608-3898

<sup>4\*</sup> Кафедра прикладной механики, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (093) 532-36-19, e-mail: leo.sam@mail.ru, ORCIDID:0000-0001-7164-6309

**Аннотация. Постановка проблемы.** Величина критической силы стержня по традиционной методике расчета определяется в предположении идеального шарнира в месте закрепления стержня. В реальных шарнирах существует как сопротивление качению шарнира при повороте концов стержня, так и их перемещение. Таким образом, существует необходимость определения характера влияния этих несовершенств шарнира на величину критической силы. В существующих научных трудах, посвященных подобным проблемам, не учитывалось влияние трения в шарнирах крепления стержня на величину критической силы. При определении устойчивости стержней с учетом неидеальности шарниров трение в них можно учесть эксцентричным приложением нагрузки или приложением момента. Однако при таком подходе достаточно сложно определить величину приложенных силы или момента. **Цель статьи** - установить влияние трения в шарнире крепления стержня на величину его критической силы в смысле Эйлера, а также построить зависимости для определения критической силы стержня с учетом механических характеристик материалов шарниров. **Вывод.** Для задачи определения величины критической силы стержня с шарнирным креплением на концах получены зависимости, которые учитывают механические характеристики материалов шарнира. Полученные зависимости позволяют определить более точное значение критической силы для стержней. Приведены примеры расчета цельного стержня и стержня с вырезкой в середине, которые показывают, что значения критической силы, определенные по традиционной методике, являются завышенными.

**Ключевые слова:** трение, стержень, шарнир, критическая сила, контакт

## ВПЛИВ ТЕРТЯ В ШАРНІРАХ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧНОЇ СИЛИ СТРИЖНІВ

БОГОМАЗ В. М.<sup>1\*</sup>, к. ф.-м. н.,БОНДАРЕНКО Л. М.<sup>2\*</sup>, к. т. н., доц.,ЩЕКА І. М.<sup>3</sup>, к. т. н., доц.,СЕМЕНЮК Л. О.<sup>4</sup>, студ.

<sup>1\*</sup> Кафедра військової підготовки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: wbogomas@i.ua, ORCIDID: 0000-0001-5913-2671

<sup>2\*</sup> Кафедра прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 373-15-18, e-mail: bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID0000-0002-2212-3058

<sup>3</sup> Кафедра військової підготовки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCIDID: 0000-0002-4608-3898

<sup>4</sup> Кафедра прикладної механіки, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, 49010, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (093) 5323619, e-mail: leo.sam@mail.ru, ORCIDID:0000-0001-7164-6309

**Анотація. Постановка проблеми.** Величина критичної сили стрижня за традиційною методикою розрахунку визначається в припущенні ідеального шарніра в місці закріплення стрижня. У реальних шарнірах існує як опір коченню шарніра при повороті кінців стрижня, так і їх переміщення. Таким чином, існує

необхідність визначення характеру впливу цієї недосконалості шарніра на величину критичної сили. В існуючих наукових працях, присвячених схожим проблемам, не враховувався вплив тертя в шарнірах кріплення стержня на величину критичної сили. Для визначення стійкості стержнів з урахуванням неідеальності шарнірів тертя в них можна врахувати ексцентричним прикладенням навантаження або прикладенням моменту. Проте за такого підходу досить складно визначити величину прикладених сили або моменту. **Мета статті** - встановити вплив тертя в шарнірі кріплення стержня на величину його критичної сили в сенсі Ейлера, а також побудувати залежності для визначення критичної сили стержня з урахуванням механічних характеристик матеріалів шарнірів. **Висновок.** Для задачі визначення величини критичної сили стержня з шарнірним кріпленням на кінцях одержано залежності, які враховують механічні характеристики матеріалів шарніра. Одержані залежності дозволяють обчислити точніше значення критичної сили для стержнів. Наведено приклади розрахунку цільного стержня і стержня з вирізкою у середині, які показують, що значення критичної сили, обчислені за традиційною методикою завищені.

**Ключові слова:** *тертя, стержень, шарнір, критична сила, контакт*

## INFLUENCING OF FRICTION IN HINGES ON CRITICAL FORCE SIZE OF BARS

BOHOMAZ V. N.<sup>1\*</sup>, *Cand. Sci. (Phys.Math.),*

BONDARENKO L. N.<sup>2\*</sup>, *Cand. Sci. (Tech.), Ass. Prof.,*

SHCHEKA I. N.<sup>3</sup>, *Cand. Sci. (Tech.), Ass. Prof.,*

SEMENYUK L. O.<sup>4</sup>, *Stud.*

<sup>1\*</sup>Department of Military Preparation, Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, Lazaryan str., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793-19-09, e-mail wbogomas@i.ua, ORCID 0000-0001-5913-2671

<sup>2\*</sup>Department of Applied Mechanics, Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, Lazaryan str., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 18, e-mail bondarenko-l-m2015@yandex.ua, ORCID0000-0002-2212-3058

<sup>3\*</sup>Department of Military Preparation, Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, Lazaryan str., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793-19-09, e-mail: shcheka1961@mail.ru, ORCIDID: 0000-0002-4608-3898

<sup>4\*</sup>Department of Applied Mechanics, Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after academician V. Lazaryan, Lazaryan str., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (093) 5323619, e-mail: leo.sam@mail.ru, ORCIDID: 0000-0001-7164-6309

**Abstract.** *Formulation of the problem.* The size of critical force of bar on the traditional method of calculation is determined in supposition of ideal hinge in the place of fixing of bar. There are both a hinge resistance at the turn of bar ends and their moving in the real hinges. Thus, there is the necessity of influencing character determination of these hinge imperfections on the size of critical force. In the existent scientific labours is devoted the alike problems, influencing of friction in the hinges of bar fastening on the size of critical force was not taken into account. At determination of bars stability with no ideality of hinges friction in them it is possible to take into account by the eccentric appendix of loading or appendix of moment. However at such approach it is difficult enough to define the size of attached force or moment. **Purpose.** To set influencing of friction in the hinge of bar fastening on of his critical force size in sense of Euler, and also build dependences for determination of bar critical force taking into account mechanical descriptions of hinges materials. **Conclusion.** For the task of determination the size of bar critical force with the joint fastening on ends are got the dependences which take into account mechanical descriptions of material hinge. The received dependences allow to define more exact meaning of critical force for bars. The examples of calculation of whole bar and bar with undercutting in the middle are resulted that values of critical force, certain on a traditional method are overpriced.

**Keywords:** *friction, bar, hinge, critical force, contact*

**Постановка проблеми.** Величина критической силы стержня («ломающей силы»), по выражению профессора А. Феппля [11]) по традиционной методике расчета определяется в предположении идеального шарнира в месте закрепления стержня. В реальных шарнирах существует как сопротивление качению шарнира при повороте концов стержня, так и их

перемещение. Поскольку при повороте концов стержня возникает сопротивление качению шарнира и вследствие этого его перемещение, существует необходимость определения характера влияния этих несовершенств шарнира на величину критической силы. В существующих научных трудах [2; 3; 5; 7; 8-10; 12; 13; 14], посвященных подобным проблемам, не

учитывалось влияние трения в шарнирах крепления стержня на величину критической силы.

При определении устойчивости стержней с учетом неидеальности шарниров трение в них можно учесть эксцентричным приложением нагрузки или приложением момента. Однако при таком подходе достаточно сложно определить величину приложенных силы или момента.

**Цель статьи** - установить влияние трения в шарнире крепления стержня на величину его критической силы в смысле Эйлера, а также предложить способы приведения расчетов сложных механических систем к более простым с точки зрения реализации расчетов стержней с учетом механических характеристик материалов шарниров.

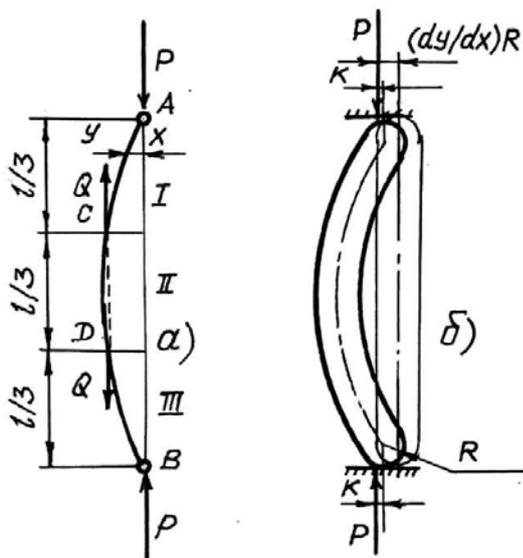


Рис. 1. Расчетная схема стержней:  
а – классическая; б – с учетом реального шарнира

**Материал исследований.** Рассмотрим две известные задачи проф. А. Феппля [11], посвященные продольному изгибу стержней.

Первая задача состоит в следующем: стержень прямоугольного сечения длиной  $l = 1,5$  м со сторонами 30 и 50 мм, имеющий свободные вращающиеся концы, сжимается силами  $P$ , приложенными в точках  $A$  и  $B$  (рис. 1 а). Кроме того, в точках  $C$  и  $D$  действует еще нагрузка  $Q$ , заставляющая среднюю часть работать на сжатие.

Необходимо определить величину критической силы («ломающего груза»)  $P$  для случая, когда  $Q=0,5P$  и  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

При исследованиях А. Феппля [11] уже была построена теория контактных деформаций, полученная Герцем, однако он в своих работах принял идеальный шарнир, пренебрегая как изменением геометрии шарнира, так и напряжениями в месте контакта. Для учета их влияния рассмотрим шарнир со схемой касания, показанной на рисунке 1 б (схема цилиндр-плоскость).

Дифференциальное уравнение упругой линии стержня для ветви I с учетом его реальности имеет вид:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = Pk, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент трения качения (рис. 1 б).

Если материалы стержня и плоскости одинаковые, а коэффициент Пуассона их материалов равен 0,3, то связь между радиусом  $R$  закругления стержня и силой  $P$  будет иметь следующий вид [4]:

$$R = \frac{0,175PE}{B\sigma^2}. \quad (2)$$

Величина коэффициента трения качения может быть найдена как часть статической полуширины пятна контакта  $b$ :

$$b = 0,64 \frac{P}{B\sigma}. \quad (3)$$

При первоначальном линейном контакте и величине  $R \leq 50$  мм коэффициент трения качения находится по формуле [1; 6; 15]:

$$k = 0,225b = 0,1435 \frac{P}{B\sigma}. \quad (4)$$

Таким образом, формула (1) принимает вид:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0,1435 \frac{P^2}{B\sigma}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения запишем в виде:

$$y_1 = A \sin ax + D \cos ax + 0,1435 \frac{P}{B\sigma}. \quad (6)$$

Отметим, что в решении Феппля второй и третий члены правой части уравнения (6) отсутствуют.

Постоянные А и D найдем из выражения (6) при граничных условиях

$y(0) = 0$  и  $y' = \left(\frac{dy}{dx}\right)R$ , указывающие на перемещение всего стержня за счет качения.

Подчинив уравнение (6) указанным граничным условиям, получим

$$y_1 = 0,1435 \frac{P}{B\sigma(1 - \cos \alpha x)}, \quad (7)$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ .

Прогиб стержня в точке С

$$\alpha = 0,1435 \frac{P}{B\sigma} \left(1 - \cos \frac{1}{3} \alpha\right). \quad (8)$$

Для ветви II примем за ось x линию I, а за начало координат точку С. На этом участке уравнение упругой линии находится аналогично [1] и его решение имеет вид:

$$y_2 = \frac{\alpha}{1 - \frac{Q}{P}} \left[ \left( 1 - \frac{\cos \left[ \frac{\beta l}{3} \right] \sin \beta x}{\sin \frac{\beta x}{3}} + \cos \beta x - \right) \right] \quad (9)$$

где  $\beta = \sqrt{\frac{P-Q}{EI}}$ .

Однако, в этой задаче необходимо соблюсти еще одно условие, а именно то, что обе ветви должны иметь в точках С и D общий угол наклона касательной к упругой линии, т.е.

$$\frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=l/3} = \frac{dy_2}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (10)$$

Подставляя в (10) первые производные от выражений для  $y_1$  и  $y_2$ , после некоторых преобразований приходим к уравнению:

$$\frac{\alpha}{\beta} \sin \alpha \frac{l}{3} = \frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{3}}{\left(1 - \frac{Q}{P}\right) \left[ 1 - \frac{\cos \left[ \frac{\beta l}{3} \right] 1}{\sin \frac{\beta l}{3}} \right]}, \quad (11)$$

которое существенно отличается (по структуре) от уравнения, полученного Фепплом. Отметим, что, положив  $Q = 0$ , а следовательно  $\alpha = \beta$ , Фепплом для критической силы получил формулу Эйлера

$P_E = \pi^2 EI/l^2$ . В нашем случае критическая сила имеет значение:

$$P_E^* = 0,955 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (12)$$

что на 4,5 % меньше значения, полученного Эйлером  $P_E = \pi^2 EI/l^2$ .

Перейдя к конкретной задаче, получим,

что при  $Q = 0,5P$  и  $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$  и уравнение для  $\alpha$  принимает вид: (13)

Вычисление методом последовательных приближений дает, что  $cd = 4,9$  м или

$$P_{EQ} = \frac{2,45\pi^2 EI}{l^2}. \quad (14)$$

Таким образом, от присоединения силы Q постоянная  $\alpha$  увеличивается в  $4,9 : 3 = 1,6$  раза.

Если использовать данные, приведенные в начале, получим, что значение критической силы по Эйлеру составит  $P_E = 150$  кН, а  $P_E^* = 140$  кН и .

Если в решении Феппля величина  $P_{EQ}$  превышает  $P_E$  на 3 %, то в нашем случае эта разница составляет 1,6 раза.

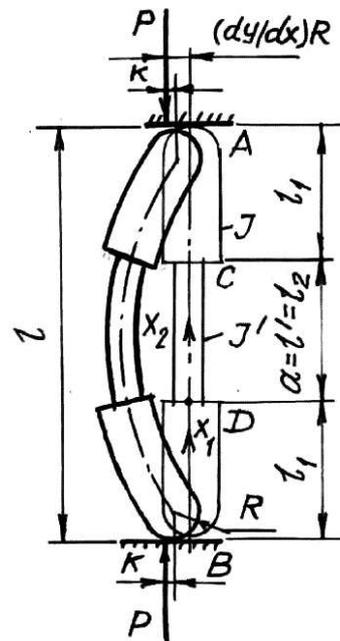


Рис. 2. Расчетная схема стержня с ослаблением

Далее рассмотрим еще одну задачу, решенную А. Фепплом в [11] с учетом условий, принятых в первой задаче. Если середину стержня ослабить вырезкой, сделанной на небольшой длине l с моментом

его инерции, составляющим 1/4...1/5 от основного сечения, то это ослабление оказывает такое же действие, как если бы сечение стержня оставалось без ослабления на длине  $l'' = (l - l')l'/l''$ . Это явление автор объясняет тем, что части стержня, непосредственно прилегающие к среднему участку, не могут сразу работать полным сечением, а края, граничащие с вырезкой вначале, остаются ненапряженными. К такому выводу Феппл пришел после экспериментальных исследований.

Частично поддерживая эту мысль, мы все же считаем, что главной причиной этого явления является дополнительный момент, появляющийся в результате качения шарнира, например, по плоскости.

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси для каждой части стержня. Будем считать координату  $x_1$  от конца  $B$  стержня, а для  $x_2$  – от точки сопряжения нижних участков

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} + P x_1 &= P k, \\ EI \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} + P x_2 &= P k. \end{aligned} \quad (15)$$

Введя обозначения

$$\frac{P}{EI} = \alpha_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{P}{EI'} = \alpha_2^2. \quad (16)$$

запишем интегралы этих уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin \alpha_1 x_1 + B_1 \sin \alpha_1 x_1 + 0,1435 \frac{P}{B\sigma}, \\ y_2 &= A_2 \sin \alpha_2 x_2 + B_2 \sin \alpha_2 x_2 + 0,1435 \frac{P}{B\sigma}. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничные условия по концам и в точке сопряжения участков:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0; \quad (0); \\ \frac{dy_1}{(dx_1)}(l) &= \frac{dy_2}{(dx_2)}(0); \quad \frac{dy_2}{dx_2}(l_2) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из этих условий находим:

$$\begin{aligned} A_1 \sin \alpha_1 l_1 &= B_2 + 0,1435 \frac{P}{B\sigma} \cos \alpha_1 l_1, \quad B_1 = -0,1435 \frac{P}{B\sigma}, \\ A_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 l_1 + 0,1435 \frac{P}{B\sigma} \alpha_1 \sin \alpha_1 l_1 &= A_2 \alpha_2, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A_2 \cos \alpha_2 l_2 = B_2 \sin \alpha_2 l_2.$$

Используя эти уравнения получим:

$$\begin{aligned} A_1 (\alpha_2 \sin \alpha_1 l_1 \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 - \alpha_1 \cos [\alpha_1 l_1]) &= \\ = 0,1435 \frac{P}{B\sigma (\alpha_1 \sin \alpha_1 l_1 + \alpha_2 \cos [\alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 l_2])} & \end{aligned} \quad (20)$$

Если правая часть равна нулю, то выражение слева тоже должно быть равно нулю, что соответствует идеальному шарниру.

Положив в правой части  $l_2 = 0$ , что соответствует  $\sin \alpha_1 l_1 = 0$ , получим формулу Эйлера.

Положив в (20)  $A = l$ , получим:

$$\alpha_2 \operatorname{tg}(\alpha_2 l_2) = \frac{\alpha_1 \left( 1 - 0,1435 \frac{P}{B\sigma} \operatorname{tg}(\alpha_1 l_1) \right)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 l_1) - 0,1435 \frac{P}{B\sigma}}. \quad (21)$$

Расчеты, проведенные по данным первой задачи, показывают, что величина критической силы, полученная по формуле (21) и в случае классического шарнира, например, при  $l_2 = 2$  м составляет

соответственно 76 и 97 (при  $\frac{EI'}{EI} = 0,2$ ), т. е. отличаются почти на 30 %.

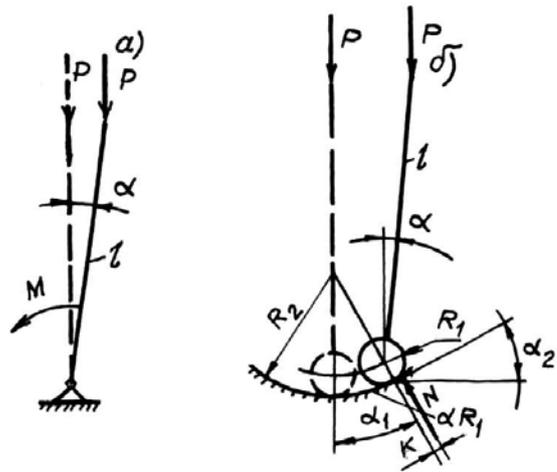


Рис. 3. Классическая (а) и реальная (б) схемы расчета послекритического поведения стержня

Конечно, нам не известно, какое опирание концов стержня было в опытах Феппля, но очевидно, что причина расхождения величин критической силы состоит в том, что не учитывались моменты, возникающие в шарнирах. Таким образом, при предположениях Феппля о неполной напряженности краев большого сечения значение критической силы автором завышено.

Для выяснения поведения систем, которые ведут себя после достижения критической силы иначе, чем при

классической постановке, рассматривается следующая задача (рис. 3 а) [15].

Абсолютно жесткий стержень длиной  $l$  шарнирно (идеальный шарнир, в котором отсутствуют трение и перемещение) закреплен на нижнем конце, а пружина удерживает стержень в равновесии. При отклонении стержня от вертикали на угол  $\alpha$  восстанавливающий момент  $M = c\alpha$ . Если к концу стержня приложена вертикальная сила  $P$ , то отклоненное состояние возможно, если выполняется условие:

$$P = \frac{c}{l} \frac{\alpha}{\sin \alpha} \approx \frac{c}{l}.$$

Как отмечается в [15], этот пример относится к конструкциям, носящим «модельный характер», и служит для исследования более сложных реальных упругих систем, поскольку позволяет воспроизводить на простом примере сложные конструкции.

Показанный на рисунке 3 а классический шарнир относится к кинематическим парам третьего порядка (уничтожает три поступательных движения), с чем трудно согласиться, ибо это предполагает абсолютное равенство диаметров шарниров стержня и основания.

В действительности при радиусе шарнира стержня  $R_1$ , а основания  $R_2$ , при повороте стержня на небольшой угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ;  $\cos \alpha \approx 1$ ) произойдет смещение шарнира стержня по горизонтали на расстояние  $\alpha R_1$  (рис. 3 б).

При отклонении стержня от вертикали на указанный угол  $\alpha$  появится восстанавливающий момент:

$$\begin{aligned} M &= PR_1 \sin \alpha_1 + Pk \cos \alpha_2 \approx \\ &\approx PR_1 \alpha_1 + Pk = PR_1 \left( \alpha \frac{R_1}{R_2} \right) + Pk. \end{aligned} \quad (22)$$

где  $k$  – коэффициент трения качения.

Если к концу стержня приложена вертикальная сила  $P$ , то отклоненное состояние возможно при выполнении уравнения равновесия:

$$Pl \sin \alpha = PR_1 \sin \alpha_1 + Pk \cos \alpha_2, \quad (23)$$

или приближенно:

$$l\alpha = R_1 \alpha \frac{R_1}{R_2} + k. \quad (23a)$$

Таким образом, отклоненное состояние (рис. 3 б) возможно при угле  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{k}{l - \frac{R_1^2}{R_2}}. \quad (24)$$

О каких-либо конкретных величинах угла  $\alpha$  можно судить при наличии не менее конкретной величины коэффициента трения качения.

Примем сначала, что схема касания в шарнире цилиндр-цилиндрическая впадина с параллельными осями. В дальнейшем для сокращения формул будем полагать, что модули упругости материалов шарнира одинаковые, а их коэффициент Пуассона равен 0,3. При известных длине  $B$  шарнира и силе  $P$ , радиус шарнира стержня должен быть [4]:

$$R_1 = \frac{0,418^2 PER_2}{0,418^2 PE + BR_2 [\sigma]^2}, \quad (25)$$

где  $[\sigma]$  – допустимое давление на площадке контакта по линии.

Полуширина пятна контакта:

$$b = 1,522 \sqrt{\frac{P R_1 R_2}{BE R_2 - R_1}}. \quad (26)$$

Если  $R_1$  и  $R_2$  связаны зависимостью

$$R_2 = R_1 + \Delta, \quad (27)$$

то

$$R_1 = \frac{\Delta}{2 \left( \sqrt{1 + \frac{0,7PE}{B\Delta[\sigma]^2}} - 1 \right)} \approx \frac{\Delta}{2[\sigma]} \sqrt{\frac{0,7PE}{B\Delta}} \quad (28)$$

и

$$R_2 = \Delta \left[ 1 + \frac{1}{2 \left( \sqrt{1 + \frac{0,7PE}{B\Delta[\sigma]^2}} - 1 \right)} \right]. \quad (28a)$$

Найдем равновесное состояние в зависимости от материала шарнира (допускаемого давления при его среднем значении от приводимых в [4] значений). Примем, что  $P = 50$  кН,  $l = 2$  м;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, а  $[\sigma]$  изменяется от 900 МПа (сталь 30) до 1 500 МПа (сталь

15ХФ); ширину шарнира  $B$  примем  $B = 10$  мм.

Зависимость  $R_1$  (при  $\Delta=0,2$  мм) от  $[\sigma]$  показана на рисунке 4; здесь показаны зависимости коэффициента трения качения и угла наклона стержня при равновесном положении.

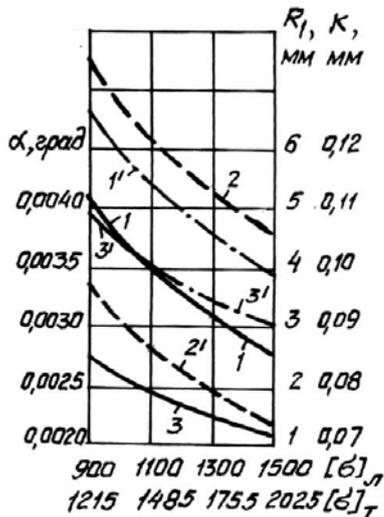


Рис. 4. Зависимость величины  $R_1$  от допустимого давления на площадке контакта:

- 1 – радиус шарнира;
- 2 – коэффициент трения качения;
- 3 – угол равновесного положения стержня (цифры со штрихами – линейный контакт, без штрихов – точечный контакт)

Естественно, что положение стержня, показанного на рисунке 3 б, возможно в том случае, когда коэффициент трения скольжения  $f$  в месте контакта будет удовлетворять условия

$$f > \alpha \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right), \quad (29)$$

при стали 30  $f > 0,0043$ , а при стали 15ХФ  $f > 0,0033$ .

Очевидно, что из формул (24), (25) и (29) может быть найдена величина такой силы  $P$ , при которой произойдет мгновенный срыв контакта в шарнире

$$P \geq \frac{8,53 f^2 \left( l - \frac{R_1^2}{R_2} \right) B E (R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

С учетом, что  $R_1=R_2$ , а  $f \gg R_1$  и  $\Delta$  является малой величиной

$$P \geq \frac{8,53 B E l^2 f^2 \Delta}{R_1^2} \quad (30a)$$

Далее рассмотрим шарнир в виде схемы касания шар – сферическое углубление. В этом случае радиус шарнира стержня определяется из выражения:

$$\left( R_1 = 0,058 \frac{P E^2 R_2}{(R_2^2 [\sigma]^3 - 0,058 P E^2)(1 + \sqrt{1 + \frac{R_2^2 [\sigma]^3}{0,058 P E^2}}} \approx 0,34 \frac{\Delta E}{[\sigma]} \sqrt{\frac{P}{\Delta [\sigma]}} \right) \quad (31)$$

Дальнейшие расчеты остаются аналогичными предыдущим, однако необходимо помнить, что величина  $[\sigma]$  при точечном контакте в 1,3...1,4 раза больше, чем при линейном.

Приняв значение допустимых давлений в 1,34 раза большими, чем в предыдущем примере, получим значения  $R_1$ ,  $k$  и  $\alpha$ . Их величины в зависимости от  $[\sigma]$  показаны на том же рисунке 4.

Коэффициент трения качения при точечном контакте определялся из зависимости [1]:

$$k = 0,16 b e^{0,2 R_1}, \quad (32)$$

а полуширина пятна контакта

$$b = 0,5545 \sqrt[3]{\frac{P R_1 R_2}{E R_2 - R_1}} \quad (33)$$

Точно так же решается задача при других схемах качения.

Сила, соответствующая мгновенному срыву контакта в шарнире:

$$P \geq \frac{1430 f^3 \left( l - \frac{R_1}{R_2} \right)^3 E (R_2 - R_1)}{R_2 R_1}, \quad (34)$$

или приближенно

$$P \geq \frac{1430 l^3 E f^3 \Delta}{R_1^2} \quad (34a)$$

Рассмотрим еще одну аналогичную задачу, рассматриваемую в [4] с той же целью – упрощения перехода к реальным упругим системам типа оболочек с целью численного их расчета на ЭВМ.

Точно так же ведущий себя в шарнире стержень возвращается в исходное вертикальное положение (рис. 5 а), которая пропорциональна горизонтальному

перемещению  $u$  конца стержня:  $R = cu$ . Поскольку  $u = l \sin \alpha \approx l\alpha$ , уравнение равновесия записано в виде:

$$Pl \sin \alpha = cl^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Предположим теперь, что стержень из положения, определенного углом  $\alpha_0$  (рис. 5 а) при помощи силы  $R$  стремится возвратиться в вертикальное положение при реальном шарнире.

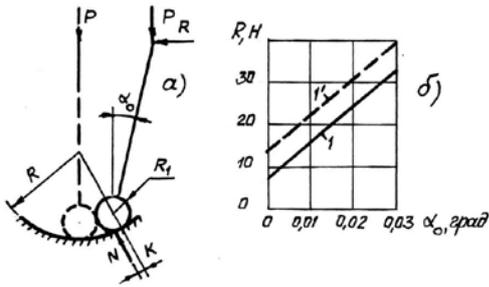


Рис. 5. Схема стержня, возвращаемого в исходное вертикальное положение силой на конце (а) и зависимость возвращающей силы от угла отклонения стержня (б) (1' - линейный контакт; 1 - точечный контакт).

Уравнение равновесия для данного случая:

$$Pl \sin \alpha_0 - Rl \cos \alpha_0 - PR_1 \sin \alpha_0 \frac{R_1}{R_2} + Pk \cos \alpha_0 = 0, \quad (35)$$

откуда приближенно

$$R = P[\alpha_0 + 1/l(k - \alpha_0 (R_1^2/R_2))]. \quad (36)$$

Зависимость  $R$  от  $\alpha_0$  при данных предыдущей задачи показана на рисунке 5 б.

**Выводы.** Для задачи определения величины критической силы стержня с шарнирным креплением на концах получены зависимости, которые учитывают трение в шарнирах. Полученные зависимости позволяют определить более точное значение критической силы для стержней. Рассмотрен пример расчета критической силы стержня, который показывает, что ее величина примерно на 5 % меньше той, которая получается по традиционной методике Эйлера. Аналогичные зависимости для определения критической силы получены для стержней, ослабленных вырезкой в середине. Приведен пример их применения, который показывает, что значения критической силы, определенные по методике Феппля, явно завышены.

Для задач устойчивости стержней с нижней шарнирной опорой при схемах контакта “шар-сферическое углубление” и “шар-цилиндрическая впадина” построены графические зависимости коэффициента трения качения, радиуса шарнира стержня и угла наклона стержня при равновесном положении от допустимого контактного напряжения.

Таким образом, обоснована необходимость учета геометрических размеров и механических характеристик материалов шарнира при решении задач об упрощенном поведении сложных упругих систем на примере стержней.

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко Л. М. Визначення практичних залежностей коефіцієнта тертя кочення / Л. М. Бондаренко, В. Д. Бондаренко // Theoretical foundations of civil engineering : Proc. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions (conference), Warsaw, June, 2006 / Ed. by W. Szczesniak. – Warsaw-Vilnius, 2006. – № 14. – P. 521–524.
2. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : в 2 ч. / Н. Н. Бухгольц. – 10-е изд., стер. – Москва ; Ленинград : Объед. науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 2009. – Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки. – 467 с. ; Ч. 2 : Динамика системы материальных точек. – 332 с.
3. Гафаров Р. Х. Что нужно знать о сопротивлении материалов / Р. Х. Гафаров, В. С. Жернаков. – Москва : Машиностроение, 2001. – 275 с.
4. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1989. – 624 с.
5. Джавадов И. Понятная физика / И. Джавадов. – Санкт-Петербург : Написано пером, 2014. – С. 52–64.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 510 с.
7. Иноземцев В. К. Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно деформируемом основании : монография / В. К. Иноземцев, Н. Ф. Синева, О. В. Иноземцева. – Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2008. – 242 с.

8. Крагельский И. В. Коэффициенты трения : справ. пособие / И. В. Крагельский, И. Э. Виноградова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Машгиз, 1962. – 228 с.
9. Миролюбов И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов : [для вузов] / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1985. – 399 с.
10. Стрельникова К. А. Устойчивость системы «высокий объект - основание» с учетом жесткости основания / К. А. Стрельникова // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – № 1(52), вып. 1. – С. 29–35.
11. Феппль А. Техническая механика / А. Феппль ; пер. с нем. А. Н. Обморшева. – Москва ; Ленинград : ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит., 1937. – Т. 3 : Сопротивление материалов. – 332 с.
12. Эрдеди А. А. Теоретическая механика / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. – 2-е изд., стер. – Москва : Кнорус, 2012. – 203 с.
13. Bazant Z. P. Stability of structures: elastic, inelastic, failure and damage theories : Oxford University Press / Z. P. Bazant, L. Cedolin. – 3rd ed. – New York : World Scientific, 2010. – 1011 p.
14. Hibbeler R. C. Engineering Mechanics: Statics & Dynamics / R. C. Hibbeler, Ashok Gupta. – 11<sup>th</sup> ed. – New York : Pearson Education, 2009. – 852 p.
15. Tabor D. The mechanism of rolling friction / Tabor D. // Proceedings of the Royal Society. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – London, 1955. – Vol. 229, part 2 : The elastic range – P. 198–220.

## REFERENCES

1. Bondarenko L.M. and Bondarenko V.D. *Vyznachennia praktychnikh zalezhnosti koeffitsienta tertia kochennia* [Determination of practical dependences of coefficient of rolling friction]. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. Warsaw-Vilnius, 2006, no. 14, pp. 521-524. (in Ukrainian).
2. Bukhholz N.N. *Osnovnoj kurs teoreticheskoj mekhaniki* [The Basic course of theoretical mechanics]. Moskva; Leningrad: Ob'ed. nauch.-tehn. izd-vo NKTP SSSR, 2009. ( in Russian).
3. Gafarov R.G. and Zhernakov V.S. *Chto nuzhno znat' o soprotivlenii materialov* [What you need to know about the strength of materials]. Moskva: Mashinostroenie, 2001. 275 p. (in Russian).
4. Darkov A.V. and Shpiro G.S. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moskva: Vysshaya shkola, 1989, 22 p. ( in Russian).
5. Dzhavadov I.D. *Ponyatnaya fizika* [Understandable physics]. Sankt Peterburg: Napisano perom, 2014, pp. 52-64. (in Russian).
6. Jonson K. *Mekhanika kontaktogo vzaimodejstviya* [Mechanics of contact cooperation]. Moskva: Mir, 1989, 510 p. (in Russian).
7. Inozemtsev V.K., Sineva N.F. and Inozemtseva O.V. *Obshchaya ustojchivost' sooruzhenij na neodnorodnom nelinejno deformiruemom osnovanii* [General stability of building on the heterogeneous non linear deformed base]. *Sarat. gos. tekhn. Universitet* [Saratov State Technical University]. Saratov, 2008, 242 p. (in Russian).
8. Kragelsky I.V. and Vinogradova I.E. *Koeffitsienty treniya* [The coefficients of friction]. Moskva: Mashgis, 1962, 228 p. ( in Russian).
9. Mirolyubov I.N., Engalychev S.A. and Sergievsky N.D. *Posobie k resheniyu zadach po soprotivleniyu materialov* [The manual for the solution of problems on strength of materials]. Moskva, Vysshaya shkola, 1985, 399 p. (in Russian).
10. Strelnikova K.A. *Ustojchivost' sistemy «vysokij ob'ekt - osnovanie» s uchetom zhestkosti osnovaniya* [Stability of the system "A high object is a base" taking in to account in flexibility of base]. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Saratov Sate Technical University]. 2011, no. 1(52), vol. 1, pp. 29-35. (in Russian).
11. Fepl' A. *Tekhnicheskaya mekhanika* [Technical mechanics]. Moskva, Leningrad: ONTI. Glav. red. tehn.-teoret. lit., 1937, 332 p. (in Russian).
12. Erdedi A.A. and Erdedi N.A. *Teoreticheskaya mekhanika*. [Theoretical mechanics]. Moskva: Knorus, 2012. 203 p. (in Russian).
13. Bazant Z.P. and Cedolin L. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Failure & Damage Theories*. New York: World Scientific, 2010, 1011 p.
14. Hibbeler R.C. and Gupta A. *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics*. New York: Pearson Education, 2009, 852 p.
15. Tabor D. *The mechanism of rolling friction. Proceedings of the Royal Society. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. London, 1955, vol. 229, part 2: The elastic range, pp. 198-220.

*Рецензент: д-р т. н., проф. Заренбін В. Г.*

Надійшла до редколегії: 03.03.2016 р. Прийнята до друку: 03.03.2016 р.