

УДК 330.4:517.3

Олена Віталіївна ЯРМОШ

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри менеджменту,
Українська інженерно-педагогічна академія, e-mail: elena.iarmosh@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ В МОДЕЛЮВАННІ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ З УРАХУВАННЯМ ПРОБЛЕМИ ДАНИХ

Ярмош, О. В. Застосування інтегрального числення в моделюванні соціально-економічних процесів з урахуванням проблеми даних / Олена Віталіївна Ярмош // Вісник соціально-економічних досліджень: зб. наук. праць; за ред.: М. І. Зверякова (голов. ред.) та ін. (ISSN 2313-4569). – Одеса: Одеський національний економічний університет. – 2015. – Вип. 1. – № 56. – С. 281–287.

Анотація. У статті проаналізовано та узагальнено різні проблеми даних, що виникають під час моделювання процесів в економіці та соціальній сфері, зокрема, неточність, асиметрія інформації, низький рівень адекватності статистичних та експериментальних даних. Наведено підходи, здатні зменшити вплив проблеми даних на якість результатів моделювання. Зазначено можливість переходу від розрізнених даних до порівняних (сумірних), від дискретних до неперервних, що дозволяє поряд з традиційним математичним інструментарієм використовувати також диференціальне та інтегральне числення. Обґрунтовано перспективність таких розділів інтегрального числення, як подвійні та криволінійні інтеграли в моделюванні соціально-економічних процесів, наведено приклади їх застосування.

Ключові слова: економіко-математичне моделювання; проблема даних; типи даних; економічний зміст інтегралу; подвійний інтеграл; криволінійний інтеграл.

Елена Витальевна ЯРМОШ

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры менеджмента,
Украинская инженерно-педагогическая академия, e-mail: elena.iarmosh@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ПРОБЛЕМЫ ДАННЫХ

Ярмош, Е. В. Применение интегрального исчисления в моделировании социально-экономических процессов с учетом проблемы данных / Елена Витальевна Ярмош // Вестник социально-экономических исследований: сб. науч. трудов; под ред.: М. И. Зверякова (глав. ред.) и др. (ISSN 2313-4569). – Одесса: Одесский национальный экономический университет. – 2015. – Вып. 1. – № 56. – С. 281–287.

Аннотация. В статье проанализированы и обобщены различные проблемы данных, возникающие при моделировании процессов в экономике и социальной сфере, в частности, неточность, асимметрия информации, низкий уровень адекватности статистических и экспериментальных данных. Приведены подходы, способные уменьшить влияние проблемы данных на качество результатов моделирования. Отмечена возможность перехода от разрозненных данных к сопоставимым (соизмеримым), от дискретных к непрерывным, что позволяет использовать традиционный математический инструментарий, а также дифференциальное и интегральное исчисление. Обоснована перспективность таких разделов интегрального исчисления, как двойные и криволинейные интегралы в моделировании социально-экономических процессов, приведены примеры их применения.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование; проблемы данных; типы данных; экономический смысл интеграла; двойной интеграл; криволинейный интеграл

Olena IARMOSH

PhD, Associate Professor, Department of Management,
Ukrainian Engineering Pedagogical Academy, e-mail: elena.iarmosh@gmail.com

THE APPLICATIONS OF INTEGRAL CALCULUS IN SOCIO-ECONOMIC PROCESSES MODELING IN VIEW OF DATA PROBLEMS

Iarmosh, O. (2015), *The applications of integral calculus in socio-economic processes modeling in view of data problems*. Ed.: M. Zveryakov (ed.-in-ch.) and others [Zastosuvannia intehralnoho chyslennia v modeliuvanni sotsialno-ekonomichnykh protsesiv z urakhuvanniam problemy danykh; za red.: M. I. Zveriyakova (gol. red.) ta in.], *Socio-economic research bulletin (ISSN 2313-4569)*, Odessa National Economic University, Odessa, Issue 1, No. 56, pp. 281–287.

Abstract. *The various data problems arising in the modeling of processes in the economy and the social sphere, in particular inaccuracy, information asymmetry, low adequacy of statistical and experimental data are analyzed and summarized in the article. Approaches that can reduce the impact of these problems on the quality of the simulation results such as using of formal approaches, estimate of probability of every sources, using of stochastic modeling tools and modern information technologies normalization of multi criteria are given. The possibility of transition from disparate data to comparable, from discrete to continuous, so you can use traditional mathematical tools, as well as differential and integral calculus is noted. The prospect of such sections integral calculus, as double and curvilinear integrals in modeling social and economic processes is substantiated; examples of integral calculus applied for investment processes, the theory marginal functions, average values are given. The application of integral calculus to modeling social and economic processes that can be represented graphically is proposed.*

Keywords: *simulation of social and economic processes; the problem of data; data types; the economic meaning of the integral; double integral; curvilinear integral.*

JEL classification: *P20, C51, C80*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Математичне моделювання знаходить все більш широке застосування при аналізі процесів, які відбуваються в економіці та соціальній сфері, з урахуванням особливостей перехідної економіки країни. Такі моделі, значною мірою, повинні бути оптимізаційними, при цьому оптимізація використовується не лише як інструментарій підтримки прийняття управлінських рішень, але й для опису поведінки окремих суб'єктів.

При цьому такі математичні моделі мають враховувати те, що вхідні дані можуть бути випадковими величинами, заданими з похибками на нерегулярній сітці вузлів або функціями однієї змінної, заданими на нерегулярній системі ліній, а також давати ефективну інтерпретацію отриманих результатів для подальшого використання моделі.

Вибір математичного інструментарію, що дозволить побудувати адекватну модель соціально-економічного процесу, та наповнення створених моделей конкретною і якісною інформацією є однією з головних проблем у моделюванні економічних та соціальних систем.

Аналіз досліджень і публікацій останніх років. Доробок вітчизняних та зарубіжних науковців за змістом можна поділити на три великі групи: спеціальні підручники з вищої математики, математичного аналізу тощо для економістів (А. М. Ахтямов, Т. С. Клебанова, П. Н. Коробов, М. С. Красс, О. Г. Литвин, Т. І. Малютіна, Л. М. Малярець, А. Д. Тевяшев та ін.); видання, присвячені огляду методів та моделей економіко-математичного моделювання, економетрії (В. В. Вітлінський, О. Т. Іващук, Л. І. Краснікова, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, І. Г. Лук'яненко, В. С. Мороз, В. І. Приймак, В. В. Федосєєв та ін.); та видання, присвячені моделюванню окремих економічних або соціальних процесів (В. М. Бурим, М. В. Міхалевич, І. В. Сергієнко, О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк та ін.).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Розвиток економічної думки ХХ ст. пов'язаний з використанням кількісних аналітичних методів та моделей, що описують різні явища та процеси з використанням математичного інструментарію, такого як математичний аналіз, теорія ймовірності, математична статистика. Поступово, завдячуючи розвитку комп'ютерних засобів обчислення, також активно використовується диференціальне числення. Однак інтегральне числення, що має значні перспективи в дослідженні соціально-економічних процесів, залишається недостатньо вивченим. Крім того, необхідні комплексні знання про можливі проблеми даних та шляхи їх вирішення, які сьогодні залишаються розрізненими у літературних джерелах.

Постановка завдання. Метою статті є визначення на основі аналізу проблем даних (неточність, асиметрія, низький рівень адекватності, розрізненість, переважно дискретний характер завдання) перспектив застосування такого математичного інструментарію як інтегральне числення, що сьогодні недостатньо широко застосовується в моделюванні процесів, які відбуваються в економіці та соціальній сфері.

Виклад основного матеріалу дослідження. Під час побудови математичних моделей кожного економічного або соціального процесу виникає проблема даних. Розглянемо можливі труднощі, що виникають в цій проблемі, та шляхи їх вирішення.

Неточності вхідних даних традиційно розглядаються як одні з основних причин, що гальмують більш широке застосування економіко-математичних методів. У країнах з перехідною економікою ця проблема є особливо гострою та має специфічні риси. Це обумовлено дією низки факторів, серед яких автори джерела [1, с.671] виділяють такі:

1. Непогодженість інформації, що надходить із різних джерел.
2. Свідоме перекручування інформації суб'єктами господарювання.
3. Вплив «тіньової» економіки на інформацію.
4. Недосконалість і нестабільність процедур збору статистичних даних.

Варто зазначити, що існують й інші фактори, що загострюють проблему даних, наприклад, асиметрія інформації. Асиметрія інформації – це ситуація, коли одна група економічних агентів володіє необхідною для ведення справ інформацією, а інша – ні. У дійсності економісти здебільшого стикаються з нерівномірним розподілом інформації [2, с.262].

Наявність таких проблем істотно ускладнює застосування кількісних методів аналізу, але не унеможлиблює їх використання, особливо за рахунок застосування різноманітних підходів, здатних зменшити вплив проблеми даних, у тому числі, за рахунок нормалізації.

Так, в роботі [1, с.671] виокремлено низку підходів, здатних зменшити вплив проблеми даних на точність і адекватність результатів моделювання. Зокрема, використання формалізованих підходів, які застосовуються при обробці статистичних вибірок з метою побудови усереднених оцінок економічних показників і регресійних залежностей між такими показниками, проведення оцінки імовірності кожного із джерел інформації, застосування інструментарію стохастичного моделювання для опису досліджуваних процесів і явищ, а також застосування сучасних інформаційних технологій.

Іншим, на думку автора статті, дієвим способом, що може бути використаний при побудові навіть найпростіших математичних моделей з урахуванням великої кількості різних критеріїв є нормалізація мультикритерію, що проводиться для поліпшення подальшої роботи з ним у тих чи інших напрямках переходом до безрозмірних величин, зведенням до однієї розмірності, вирівнюванням масштабів частинних критеріїв тощо. Нормалізація здійснюється через перетворення одного мультикритерію $\{f_\alpha(x), \alpha \in A\}$ в інший $\{\tilde{f}_\alpha(x), \alpha \in A\}$. Деякі поширені способи нормалізації мультикритеріїв наведено в табл. 1.

Водночас повністю усунути вплив вищезазначених факторів неможливо. Тому для одержання обґрунтованих висновків бажано застосування альтернативних джерел інформації й різних підходів до моделювання. Якщо отримані при цьому висновки збігаються в принципових аспектах, хоча й відрізняються в деталях, розумно розглядати їх як основу для теоретико-економічних узагальнень.

Зупинимося на ще одній особливості отримання даних, характерній перш за все макроекономічним процесам. З погляду макроекономічного моделювання, як зазначено в джерелі [3, с.207], в економіці вкрай обмежено застосування локальних експериментів через досить жорстку взаємодію частин економіки, отже, «чистий» експеримент тут неможливий. Тому в національній економіці зазвичай використовують минулий досвід, досвід інших країн, досить небезпечні експерименти з економічною системою в цілому та аналітичне (тобто математичне) моделювання. Перевагою експериментів з економікою в цілому є те, що перші результати економічної політики можна побачити вже через невеликий проміжок часу, проте неможливо передбачити середньо- та довгострокові наслідки прийнятих рішень. Таке передбачення можливе тільки на основі концептуальних моделей розвитку економіки, які

ґрунтуються на минулому досвіді. У свою чергу, ці моделі створюють фундамент для математичних моделей та їх подальшого аналізу. Проте варто пам'ятати, що розроблення аналітичних моделей – трудомісткий процес, до того ж існують вимоги щодо адекватного відображення моделлю дійсності.

Таблиця 1

Деякі способи нормалізації мультикритеріїв [3, с.192]

Назва способу	Математичний вираз
1. Зведення до безрозмірних величин	$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\rho(f_\alpha(x))}$, де ρ – деяка функція
2. Зведення до однієї вимірності	$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\lambda(\alpha)}$, де $\lambda(\alpha)$ – деяка вагова функція
3. Зміна інгредієнта	$\tilde{f}_\alpha(x) = -f_\alpha(x)$ або $\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{1}{f_\alpha(x)}$
4. Природна нормалізація	$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x) - \min_{\alpha \in A} f_\alpha(x)}{\max_{\alpha \in A} f_\alpha(x) - \min_{\alpha \in A} f_\alpha(x)}$
5. Нормалізація порівняння	$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\max_{\alpha \in A} f_\alpha(x)}$
6. Нормалізація усереднення	$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x)}$, де A – зліченна множина

Серед переваг даних в економіці можна відзначити можливість переходу до цінового індексу кількості будь-якого товару чи будь-якої групи товарів [2, с.262]. Подібна операція робить кількісно порівнянними (сумірними) всі якісно різні товари (до них застосовуються ті самі одиниці виміру) і дає можливість доволно агрегувати сукупності товарів, коли це потрібно, розглядаючи їх як один комплексний (складний) товар.

Щодо кількісної характеристики товарів розрізняють дискретні товари, кількість яких набувають окремих числових значень, та необмежено подільні товари, кількість яких можуть бути виражені довільними дійсними числами. В кількісній теорії споживчого вибору, зазвичай, розглядають простори товарів, що складаються з необмежено подільних товарів. Задача споживчого вибору в просторах дискретних товарів малоцікава з математичного погляду і практично зводиться до перебору зі скінченної множини альтернатив [2, с.262]. Іноді через дрібність грошових одиниць припускається, що ціни на товари можуть змінюватися практично безперервно, як і значення цінових індексів кількості товарів [2, с.262]. В цьому випадку дані можуть бути представлені у вигляді функції, що відкриває перспективи застосування таких розділів математики, як диференціальне та інтегральне числення.

В сучасних умовах існує значна кількість економічних та соціальних моделей, побудованих з використанням концептуальних тверджень диференційного числення, чого не можна сказати про інтегральне. Водночас інтегрування в економіці має широке використання для знаходження функцій витрат, прибутку, споживання, якщо відомі відповідно функції граничних витрат, граничного прибутку, граничного споживання тощо [4, с.368].

Враховуючи обмеженість обсягу статті не буде розглянуто всі можливі приклади застосування інтегрального числення в дослідженнях соціально-економічних систем. Розглянемо, так звані, «найпростіші» приклади [5, с.464; 6, с.226; 7, с.296; 8, с.436; 9], що здобули подальшого поглиблення в працях багатьох вітчизняних та зарубіжних дослідників:

1. Якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t , то $U = \int_0^T f(t)dt$ та $U = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

відповідно обсяги продукції, що випускається за проміжок часу $[0, T]$ та $[t_1, t_2]$.

2. У задачі знаходження капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями, якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції відповідно як $f(t)$, то приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2 можна визначити за формулою:

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

3. Нехай щорічно прибуток, що надходить, змінюється за часом і описується функцією $f(t)$ при питомій нормі відсотка i (відсоток нараховується безперервно). У цьому випадку дисконтований прибуток P за період T обчислюється за формулою $R = \int_0^T f(t)e^{-it} dt$.

4. Інтегральне числення застосовуються під час розрахунків коефіцієнта Джині для визначення ступеня нерівномірності розподілу доходів за кривою Лоренца.

5. Для характеристики деякої залежної від часу величини часто використовують поняття середнього значення. Наприклад, якщо відома динаміка вартості $c(t)$ і кількості $N(t)$ проданих акцій на біржі протягом дня, то середнє значення вартості акції визначається як витрати на покупку всіх проданих акцій поділені на кількість проданих акцій. Середня

$$\text{ціна акції може бути представлена виразом } \bar{P} = \frac{\int_0^T c(t)N(t)dt}{\int_0^T N(t)dt}.$$

Більш складним і недостатньо вивченим залишається питання застосування подвійного та криволінійного інтегралів в дослідженнях соціально-економічних процесів. У роботі [9] наведено такі варіанти застосування:

1. Нехай D – область посіву деякої сільськогосподарської культури і в кожній точці $M(x, y) \in D$ відома врожайність $q(x, y)$ цієї культури (наприклад, згідно зі спостереженнями з космосу). Тоді величина $Q = \iint_D q(x, y) dx dy$ є кількістю врожаю, що

можна зібрати з області D за умови відсутності втрат.

2. Якщо $p(x, y)$ – щільність розподілу населення в точці $M(x, y) \in D$ регіону D , то $P = \iint_D p(x, y) dx dy$ – населення регіону D .

Зазвичай спеціалізовані навчальні видання не містять економічного змісту криволінійного інтегралу, що може полягати в такому припущенні: вартість доставки вантажу p_L дорівнює криволінійному інтегралу першого роду від питомої вартості доставки вантажу $u(x, y, z)$ вздовж шляху цієї доставки L довжини l , тобто $p_L = \int_L u(x, y, z) dl$.

Враховуючи геометричний зміст визначеного інтегралу, що полягає в обчисленні площі криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції, а для подвійного – об'єму фігури, обмеженої площинами, можна розглянути її інші приклади ефективного застосування інтегрального числення в дослідженні соціально-економічних процесів. Так, якщо розглянути широко вживаний в економіці графік беззбитковості (рис. 1) деякого підприємства, що має обмеження щодо випуску продукції (через наявну сировинну базу, потужність основних фондів тощо), то загальний обсяг прибутку (область D), отриманого підприємством після досягнення точки беззбитковості, можна визначити за формулою:

$$P = \int_{Q_{кр}}^{Q_{макс}} (R(q) - C_{full}(q)) dq \quad (1)$$

де $R(q)$ – функція виторгу підприємства, що залежить від обсягу виробництва q , $C_{full}(q)$ – функція сукупних витрат ($C_{full}(q) = C_{fix}(q) + C_{var}(q)$, де $C_{fix}(q)$ – функція постійних витрат, $C_{var}(q)$ – функція змінних витрат), $Q_{кр}$, $Q_{макс}$ – відповідно обсяг продукції критичний (беззбитковий рівень) та максимально можливий.

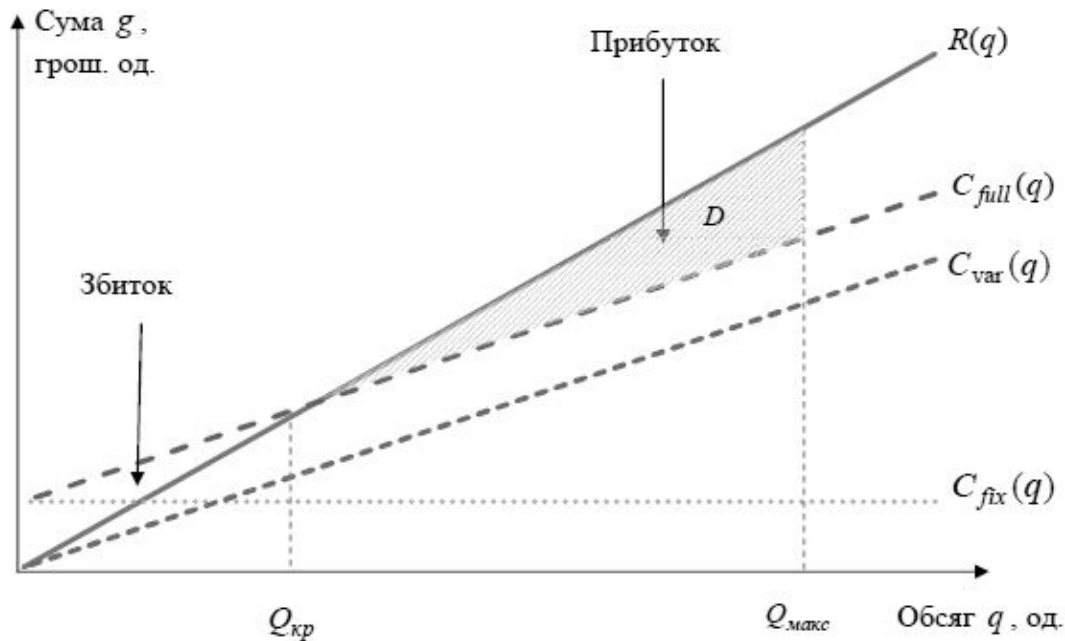


Рис. 1. Графік беззбитковості виробництва продукції

Якщо розглядати геометричну інтерпретацію функцій виторгу та повних витрат як поверхні (тобто вважати, що вони описують залежність для різних видів продукції, що випускається одним підприємством, або для однотипної продукції різних підприємств однієї галузі), то загальна сума отриманого прибутку буде дорівнювати об'єму тіла, яку утворюють відповідні поверхні. Тоді за допомогою подвійного інтегралу отримуємо:

$$PP = \iint_D (Q_{макс} - q) dq dg = \int_{Q_{кр}}^{Q_{макс}} (Q_{макс} - q) dq \int_{C_{full}(q)}^{R(q)} dg = \int_{Q_{кр}}^{Q_{макс}} (Q_{макс} - q)(R(q) - C_{full}(q)) dq \quad (2)$$

Варто врахувати, що функція виторгу та витрат в реальних умовах рідко є лінійною, що суттєво ускладнює процедуру розрахунку прибутку, збитку тощо. У цьому випадку застосування інтегрального числення за формулами (1), (2) значно зменшує похибку в таких розрахунках.

Висновки і перспективи подальших розробок. Дослідження соціально-економічних процесів має комплексний характер і включає кілька етапів: збір та обробку емпіричних даних щодо процесу, побудову моделі залежності, визначенням її аналітичного вигляду. При цьому необхідно врахувати, що вхідні дані та обраний математичний апарат суттєво впливають на якість результатів моделювання.

Вибір підходу до побудови моделі є складним процесом, що вимагає врахування багатьох альтернатив. Під час вибору таких підходів для побудови моделей соціально-економічних процесів, перш за все, варто врахувати обмеження, пов'язані з характером завдання та якістю даних, необхідних для моделювання. Враховуючи дискретний характер завдання даних в економіці та соціальній сфері, сьогодні, під час побудови моделей, незначно використовується такий розділ математики, як інтегральне числення, що в свою чергу має певні переваги та перспективи для опису відповідних процесів та явищ, перш за все оскільки дозволяє зменшити похибку розрахунків.

Тому подальші дослідження мають бути спрямовані на моделювання окремих складових макро- та мікроекономічних систем засобами інтегрального числення, зокрема, з використанням подвійних та криволінійних інтегралів.

Література

1. Михалевич М. В. Моделирование переходной экономики: модели, методы, информационные технологии: монография / М. В. Михалевич, И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2005. – 671 с.
2. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз: у 2 ч.: Ч. 1. Мікроекономіка: навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 262 с.
3. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз: у 2 ч.: Ч. 2. Макроекономіка: навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 207 с.
4. Малярець Л. М. Математика для економістів. Вища математика для економістів: навч. посіб., ч. 2 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків: ХНЕУ, 2011. – 368 с.
5. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов: учеб. пособ. / А. М. Ахтямов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 464 с.
6. Математика для економістів: посіб. для студ. фінансово-економічного профілю / [З. П. Ординська, Л. А. Репа]. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 226 с.
7. Приймак В. І. Математичні методи економічного аналізу: навч. посіб. / В. І. Приймак. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 296 с.
8. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах. Загальний курс / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків: ХНУРЕ, 2008. – 436 с.
9. Соболев С. К. Двойные интегралы [Электронный ресурс] / С. К. Соболев. – М.: МГТУ им. Баумана, 2008. – Режим доступа: <http://wwwcdl.bmstu.ru/fn1/DoubInt.pdf>.

References

1. Mihalevich, M. V., Sergiyenko, I. V. (2005), «Modelling of transition economy: The models, methods, information technology: monograph» [Modelirovanie perehodnoy ekonomiki: modeli, metody, informatsionnye tekhnologii: monografiya], Naukova dumka, Kyiv, 671 p. (rus)
2. Ponomarenko, O. I., Perestyuk, M. O., Buryim, V. M. (2004), Modern economic analysis. Part 1. Microeconomics [Suchasnyi ekonomichnyi analiz. Mikroekonomika], Vyscha shkola, Kyiv, 262 p. (ukr)
3. Ponomarenko, O. I., Perestyuk, M. O., Buryim, V. M. (2004), Modern economic analysis. Part 2. Macroeconomics [Suchasnyi ekonomichnyi analiz. Makroekonomika], Vyscha shkola, Kyiv, 207 p. (ukr)
4. Malyarets, L. M., Afanasyeva, L. M., Ignachkova, A. V. (2011), Mathematics for Economists. Higher Mathematics for Economists. Part 2 [Matematyka dlia ekonomistiv. Vyscha matematyka dlia ekonomistiv], KhNEU, Kharkiv, 368 p. (ukr)
5. Ahtyamov, A. M. (2008), Mathematics for sociologists and economists [Matematika dlya sotsiologov i ekonomistov], Fizmatlit, Moscow, 464 p. (rus)
6. Ordynska, Z. P., Repa, L. A. (2014), Mathematics for economists [Matematyka dlia ekonomistiv], NTUU «KPI», Kyiv, 226 p. (ukr)
7. Pryymak, V. I. (2009), Mathematical Methods of Economic Analysis [Matematychni metody ekonomichnoho analizu], Tsentri uchbovoi literatury, Kyiv, 296 p. (ukr)
8. Tevyashev, A. D., Lytvyn, O. H. (2008), Higher Mathematics in the examples and problems. General Course [Vyscha matematyka u prykladakh ta zadachakh. Zahalnyi kurs], KhNURE, Kharkiv, 436 p. (ukr)
9. Sobolev, S. K. (2008) Double integrals [Dvoynye integraly], Bauman MGTU, Moscow, available at: <http://wwwcdl.bmstu.ru/fn1/DoubInt.pdf> (rus)