

ing into account damping forces and gyroscopic forces. The condition of existence of the critical velocities is adduced in this paper.

Дата надходження в редакцію: 23.05.2012. р.
Рецензент: д.т.н., професор Тарельник В.Б.

УДК 621.515:62-251:534.1

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ОСЕВОГО УРАВНОВЕШИВАНИЯ РОТОРА ТУРБОКОМПРЕССОРА

А. Корчак, д.т.н., профессор, Политехника Шленская

В. Марцинковский, д.т.н., профессор, Сумской государственный университет

На основании уравнений неразрывности движения жидкости и осевых колебаний ротора построены статические и динамические характеристики новой конструкции автоматического уравновешивающего устройства, исполняющего одновременно функции бесконтактного уплотнения.

Постановка проблемы в общем виде.

Для уравновешивания осевых сил, действующих на ротор центробежного компрессора или насоса, часто используются разгрузочные поршни. Они не обеспечивают стабильного осевого положения ротора, поэтому требуется установка дополнительных двусторонних упорных подшипников.

Анализ последних исследований и публикаций.

Для предотвращения или уменьшения вытоков перекачиваемой среды в атмосферу в полость за разгрузочным поршнем подается запи-

рающая или буферная жидкость. Ее протечки ограничиваются концевыми уплотнениями: щелевыми уплотнениями с плавающими кольцами, или механическими торцовыми уплотнениями [1,2]. Наличие упорных подшипников и сложной системы концевых масляных уплотнений приводит к тому, что система осевого уравновешивания ротора является сложной, неэкономичной и недостаточно надежной.

Здесь рассматривается упрощенная модель новой конструкции уравновешивающего устройства, выполняющего одновременно функции затворного бесконтактного уплотнения [3].

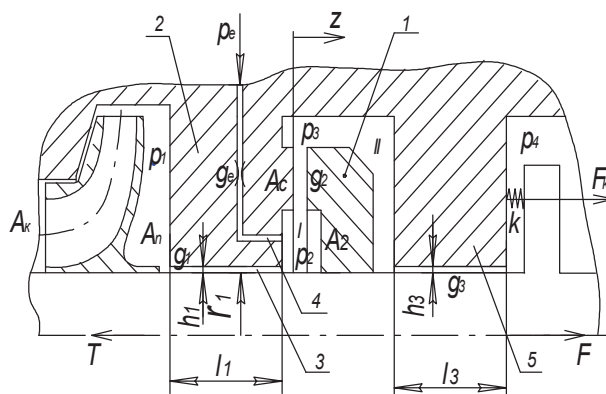


Рисунок 1. Расчетная схема уравновешивающего устройства

Осевая сила, действующая на ротор и измеряемая десятками тонн, воспринимается закрепленным на валу уравновешивающим диском 1 (рис.1), отделенным от давления нагнетания компрессора щелевым втулочным уплотнением 2 и образующим с корпусом торцовый уплотняющий зазор 3. В полость 1 между втулочным и торцовым уплотнениями через дроссель 4 подводится затворная или буферная среда. За диском установлено еще одно уплотнение 5, например втулочное. Давление перед диском и после него (в полости III) зависит от торцового зазора, т.е. от осевого положения ротора. Уменьшение осевой силы, действующей на ротор, приводит к увеличению торцового зазора. При этом давление перед диском уменьшается, а за диском увеличи-

вается. В результате уменьшается осевая сила давления на диск, и ротор возвращается в равновесное состояние с торцовым зазором, близким к исходному номинальному значению. Таким образом, устройство одновременно выполняет функции осевого гидро- или газостатического подшипника и комбинированного саморегулируемого бесконтактного уплотнения.

Систему уравновешивания будем рассматривать как систему автоматического регулирования, для которой торцовый зазор z и расход затворной среды Q_e - регулируемые величины, осевая сила давления на уравновешивающий диск - регулирующее воздействие. Осевая сила T , действующая на ротор, превышение затвор-

ного давления p_e над давлением нагнетания p_1 : $\delta p = p_e - p_1$ и общий перепад давления на уравнивающем устройстве $\Delta p = p_1 - p_4$ являются внешними воздействиями. Затворная среда – вязкая жидкость, течение во всех дросселирующих каналах ламинарное изотермическое.

Формулирование целей статьи (постановка задачи).

Целью данного исследования является получение уравнения динамики, которое даст возможность вычислить собственные частоты осевых колебаний ротора, определить границы динамической устойчивости по основным геометрическим и режимным параметрам, построить частотные характеристики – реакции системы на заданные внешние воздействия.

Изложение основного материала исследований.

Уравнение осевых колебаний ротора с уравнивающим устройством на основании второго закона Ньютона имеет вид

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F - T + k\Delta, \quad (1)$$

где k - коэффициент жесткости отжимного устройства, используемого в некоторых многоступенчатых центробежных машинах для предотвращения возможных задиров торцовых поверхностей на режимах пуска и останова [4]; Δ - величина предварительного сжатия пружин отжимного устройства. F - осевая сила давления, действующая на уравнивающий диск и выполняющая роль регулирующего воздействия. Для линейного изменения давления по радиусу торцового зазора значение регулирующего воздействия

$$F = A_2 p_2 + 0,5 A_c (p_2 + p_3) - (A_2 + A_c) p_3 = A_0 (p_2 - p_3), \quad (2)$$

$A_0 = A_2 + 0,5 A_c$ - эффективная площадь разгрузочного диска.

Приведем силы к безразмерному виду и введем безразмерную осевую координату $u = z/z_n$, z_n - наиболее предпочтительное с точки зрения протечек и надежности значение торцового зазора:

$$\varphi = \frac{F}{A_n p_n} = \sigma (\psi_2 - \psi_3) \\ \tau = \frac{T}{A_n p_n}, \quad \chi = \frac{k\Delta}{A_n p_n}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{A_0}{A_n}, \quad \psi_2 = \frac{p_2}{p_n}, \quad \psi_3 = \frac{p_3}{p_n},$$

A_n, p_n - номинальные значения площади и давления. В качестве A_n будем принимать площадь A_k (рис.1) входной воронки рабочего колеса, в качестве p_n - номинальное давление нагнетания.

Уравнение осевых колебаний в безразмерных переменных в операторной форме приобретает вид

$$D_1(p)u = (T^2 p^2 + T_1 p + \kappa_*)u = \varphi - \tau + \chi, \quad (4)$$

где

$$T^2 = \frac{mz_n}{A_n p_n} [c^2], \quad T_1 = \frac{cz_n}{A_n p_n} [c], \\ \kappa_* = \frac{kz_n}{A_n p_n}, \quad p \equiv \frac{d}{dt} \quad (5)$$

Уравнения баланса расходов. Давления p_2, p_3 , которые входят в выражение силы давления F , находим из уравнений баланса расходов. Для гидравлического тракта, схема которого представлена на рис.2,

$$Q_e = Q_1 + Q_2 + Q_{2\dot{n}\dot{e}} + Q_{2\dot{a}\dot{u}\dot{o}}, \\ Q_2 + Q_{2\dot{n}\dot{e}} + Q_{2\dot{a}\dot{u}\dot{o}} = Q_3 + Q_{3\dot{n}\dot{e}} + Q_{3\dot{a}\dot{u}\dot{o}} \quad (6)$$

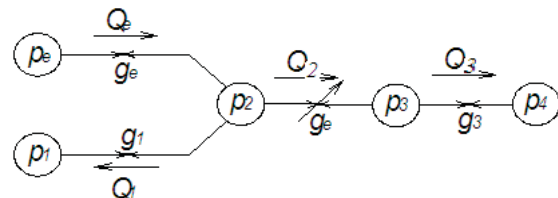


Рисунок 2. Схема гидравлического тракта

Уравнения баланса расходов включают расходы сжатия и вытеснения:

$$Q_{2\text{ сж}} = \frac{V_2}{E} \dot{p}_2, \quad Q_{3\text{ сж}} = \frac{V_3}{E} \dot{p}_3, \\ Q_{2\text{ в\ddot{u}\ddot{o}}} = Q_{3\text{ в\ddot{u}\ddot{o}}} = A_0 \dot{z}, \quad (7)$$

V_2, V_3 - объемы камер перед диском и за ним (рис.1), E - адиабатический модуль упругости запирающей среды.

Для ламинарных режимов течения значения расходов пропорциональны перепадам давления:

$$Q_e = g_e (p_e - p_2), \quad Q_1 = g_1 (p_2 - p_1), \\ Q_2 = g_2 (p_2 - p_3), \quad Q_3 = g_3 (p_3 - p_4).$$

Проводимости кольцевых и торцового дросселей [4]

$$g_1 = \frac{\pi r_1 h_1^3}{6 \mu l_1}, g_3 = \frac{\pi r_1 h_3^3}{6 \mu l_3},$$

$$g_2 = g_{2n} u^3, g_{2n} = \frac{\pi r_m z_n^3}{6 \mu l_2}, \quad (8)$$

μ - коэффициент динамической вязкости.

Подставив выражения отдельных составляющих расхода в уравнения (6), получим

$$g_e(p_e - p_2) = g_1(p_2 - p_1) +$$

$$+ g_{2n} u^3 (p_2 - p_3) + \frac{V_2}{E} \dot{p}_2 + A_0 z_n \dot{u}, \quad (9)$$

$$g_{2n} u^3 (p_2 - p_3) + \frac{V_2}{E} \dot{p}_2 =$$

$$= g_3 (p_3 - p_4) + \frac{V_3}{E} \dot{p}_3.$$

Статический расчет. Расход

$Q_2 = g_{2n} u^3 (p_2 - p_3)$ является нелинейной функцией безразмерного зазора и перепада давления. Чтобы остаться в рамках линейной теории, будем переходить к уравнениям в вариациях, рассматривая малые отклонения переменных от установившихся равновесных значений. Для этого предварительно построим статические характеристики, т.е. установившиеся зависимости зазора и расходов от внешних воздействий.

Статический расчет выполняется на основании уравнения осевого равновесия ротора и уравнений баланса расходов [5]. Эти уравнения получаются из уравнений (4) и (9), если в последних принять равными нулю производные по времени. Кроме того, торцовый зазор z составляет 0,05 – 0,15 мм, поэтому $z \ll \Delta$.

Из уравнений баланса расходов в статике находим

$$p_2 = \frac{g_e p_e + g_1 p_1 + g_u p_4}{g_c + g_u}, \quad (10)$$

$$p_3 = g_u \frac{g_e p_e + g_1 p_1 + \left[g_u + \frac{g_3}{g_2} (g_c + g_u) \right] p_4}{g_3 (g_c + g_u)},$$

где введены обозначения эквивалентной проводимости параллельных g_c и последовательно соединенных g_u дросселей

$$g_c = g_e + g_1, \quad g_u = \frac{g_2 g_3}{g_2 + g_3} = \frac{g_{2n} u^3 g_3}{g_{2n} u^3 + g_3}.$$

Проводимость g_c постоянна, не зависит от

безразмерного торцового зазора u . В дальнейшем для краткости будем использовать относительные проводимости $\alpha_{kl} = (g_k / g_l)_{u=i}$. Эквивалентная проводимость последовательных дросселей приводится к виду

$$g_u = \frac{g_{2n}}{\alpha_{23} + 1/u^3} \quad (11)$$

В системах без дополнительного дросселя ($g_3 \rightarrow \infty$) $g_u = g_{2n} u^3$, а безразмерные про-

водимости $\alpha_{k3} = 0$. Если выход газа в полость I недопустим, то давление затворной жидкости необходимо выбирать из условия $p_2 > p_1, Q_1 > 0$. В этом случае расход Q_1 затворной жидкости попадает в газовую полость.

Из выражения (10) $p_2 > p_1, Q_1 > 0$, если

$$p_e - p_1 > \frac{g_u}{g_e} (p_1 - p_4).$$

Когда недопустимо попадание затворной (буферной) среды в газовую полость, последнее условие нужно заменить неравенством обратного смысла.

После перехода к безразмерным давлениям и относительным проводимостям это условие принимает вид

$$\delta\psi > \frac{\alpha_{2e} \Delta\psi}{\alpha_{23} + 1/u^3}, \quad (12)$$

где

$$\delta\psi = \psi_e - \psi_1, \quad \Delta\psi = \psi_1 - \psi_4, \quad \psi_e = \frac{p_e}{p_n}, \quad \psi_4 = \frac{p_4}{p_n}.$$

Необходимое давление ψ_e затворной среды зависит от торцового зазора, который, в свою очередь, зависит от давления нагнетания ψ_1 и давления ψ_e . В первом приближении можно использовать условие (12) для номинального режима: $\psi_1 = u = 1$. В дальнейшем, при необходимости, возможна корректировка выбранного значения $\delta\psi$. Корректировка может потребоваться, если при некоторых значениях ψ_1 из заданного рабочего диапазона его изменения выбранное ψ_e не удовлетворяет условию (12). Из соотношения (12) видно, что $\delta\psi$ уменьшается с увеличением проводимости g_e и с уменьшением проводимости g_3 дополнительного дросселя.

По формулам (3) найдем безразмерное регулирующее воздействие – силу давления на разгрузочный диск:

$$\varphi = \sigma \frac{\alpha_{e2} \delta\psi + \alpha_{c2} \Delta\psi}{u^3 + \alpha_{cu}}, \quad \sigma = \frac{A_0}{A_n}. \quad (13)$$

Безразмерная гидростатическая жесткость регулятора

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -3 \frac{\sigma u^2}{(u^3 + \alpha_{cu})^2} (\alpha_{e2} \delta\psi + \alpha_{c2} \Delta\psi) < 0 \quad (14)$$

Отрицательное значение жесткости является признаком статической устойчивости системы авторазгрузки.

Воспользовавшись уравнением равновесия $\varphi = \tau - \chi$ с учетом (13) получим выражение безразмерного торцового зазора как функцию уравновешиваемой осевой силы τ и перепадов давления $\delta\psi$, $\Delta\psi$:

$$u = \left(\sigma \frac{\alpha_{e2} \delta\psi + \alpha_{c2} \Delta\psi}{\tau - \chi} - \alpha_{cu} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

Безразмерное усилие χ отжимного устройства можно рассматривать как задающее воздействие, с помощью которого производится настройка системы уравновешивания. Формула (10) позволяет построить статические характеристики по любому из внешних воздействий.

Торцовый зазор сохраняет положительные значения при условии

$$\delta\psi > \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\alpha_{cu}}{\alpha_{e2}} (\tau - \chi) - \alpha_{ce} \Delta\psi \quad (16)$$

Как правило, уравновешиваемая осевая сила пропорциональна давлению нагнетания: $T \approx A_k p_1$, $\tau \approx \psi_1$. Положим $\tau = b\psi_1$, где коэффициент пропорциональности b близок к единице. При этом статическая характеристика (16) приводится к виду

$$u = \left[\alpha_{cu} \left(\alpha_{u2} \frac{\sigma}{b} \cdot \frac{\psi_1 - \psi_4 + \alpha_{ec} \delta\psi}{\psi_1 - \chi/b} - 1 \right) \right]^{1/3}, \quad (17)$$

В полученном выражении внешними воздействиями являются безразмерные давление нагнетания ψ_1 и превышение затворного давления $\delta\psi = \psi_e - \psi_1$. Если потребовать, чтобы при номинальных значениях внешних воздействий торцовый зазор был оптимальным: $z = z_n$ или $u=1$, то из этого условия можно выбрать проводимость g_e канала, по которому затворная жидкость подводится в камеру l . Приравняв единице выражение (17) и учитывая $g_c = g_e + g_1$, найдем

$$g_e = g_1 \frac{(1 + \alpha_{u1})(b\psi_1 - \chi) - \alpha_{u2}\sigma(\psi_1 - \psi_4)}{\alpha_{u2}\sigma(\delta\psi + \psi_1 - \psi_4) - (b\psi_1 - \chi)}. \quad (18)$$

Выбор проводимости g_e нужно проводить для номинального значения давления, т.е. для $\psi_1 = 1$. В данном случае условие положительности торцового зазора накладывает ограничения на диапазон изменения давления нагнетания:

$$\frac{\chi}{b} < \psi_1 < \frac{\sigma(\alpha_{ec}\delta\psi - \psi_4) + \alpha_{2u}\chi}{\alpha_{2u}b - \sigma}. \quad (19)$$

Нужно, однако, помнить, что на основании (12) выход газа в масляную полость для принятого значения $\delta\psi$ не происходит, если

$$\psi_1 < \psi_4 + \alpha_{e2}(\alpha_{23} + 1/u^3)\delta\psi. \quad (20)$$

Последнее условие может накладывать более жесткие ограничения на верхний предел давления нагнетания.

Полный расход затворной жидкости через уравновешивающее устройство определяется выражением $Q_e = g_e(p_e - p_2)$, а после подстановки (10) и перехода к безразмерным давлениям получим безразмерный расход

$$\bar{Q}_e = \frac{Q_e}{Q_n} = \frac{G}{G_n \alpha_{ce}} [(1 + \alpha_{lu})\delta\psi + \Delta\psi],$$

где номинальный расход и эквивалентная проводимость всего гидравлического тракта системы авторазгрузки

$$Q_n = G_n p_n, \quad G = \frac{g_c g_u}{g_c + g_u}, \quad G_n = G(u=1)$$

С учетом (11)

$$G = \frac{g_{2n}}{\alpha_{23} + \alpha_{2c} + 1/u^3},$$

а суммарный безразмерный расход затворной жидкости

$$\bar{Q}_e = \frac{\alpha_{ec} g_{2n}/G_n}{\alpha_{23} + \alpha_{2c} + 1/u^3} \times [(1 + \alpha_{13} + \alpha_{12}/u^3)\delta\psi + \psi_1 - \psi_4]. \quad (21)$$

Расход затворной жидкости в уплотняемую полость $Q_1 = g_1(p_2 - p_1)$ после подобных преобразований принимает следующий безразмерный вид

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{Q_n} = \frac{\alpha_{1c} g_{2n}/G_n}{\alpha_{23} + \alpha_{2c} + 1/u^3} \times [\alpha_{e2}(\alpha_{23} + 1/u^3)\delta\psi - \psi_1 + \psi_4]. \quad (22)$$

Полученные формулы содержат установившееся значение торцового зазора, определяемое

статической характеристикой (15) или (17) для заданного диапазона внешних воздействий.

Вывод линеаризованного уравнения осевых колебаний системы. Линеаризуем уравнения (9) в окрестности положения равновесия (противодавление $p_4 = const, \delta p_4 = 0$):

$$g_e(\delta p_e - \delta p_2) = g_1(\delta p_2 - \delta p_1) + 3g_{2n}u_0^2(p_{20} - p_{30})\delta\dot{e} + g_{20}(\delta p_2 - \delta p_3) + \frac{V_2}{E}\delta\ddot{p}_2 + A_0z_n\delta\dot{u},$$

$$3g_{2n}u_0^2(p_{20} - p_{30})\delta\dot{e} + g_{20}(\delta p_2 - \delta p_3) + \frac{V_2}{E}\delta\ddot{p}_2 = g_3\delta p_3 + \frac{V_3}{E}\delta\ddot{p}_3.$$

Переходя к безразмерным давлениям и опуская для краткости знаки вариаций, приведем полученные уравнения к виду

$$(T_2p + I + \alpha_{c2})\psi_2 - \psi_3 = \alpha_{e2}\psi_e + \alpha_{12}\psi_1 - (\tau_2p + \kappa_2)u,$$

$$-(T_2p + I)\psi_2 + (T_3p + I + \alpha_{32})\psi_3 = \kappa_2u, \quad (23)$$

где

$$T_2 = \frac{V_2}{Eg_{20}}, \quad T_3 = \frac{V_3}{Eg_{20}}, \quad \tau_2 = \frac{A_e z_n}{g_{20}p_n},$$

$$\kappa_2 = 3\frac{\Delta\psi_{20}}{u_0}, \quad \Delta\psi_{20} = \frac{p_{20} - p_{30}}{p_n},$$

$$g_{20} = g_{2n}u_0^3, \quad g_c = g_e + g_1, \quad \alpha_{c2} = g_c/g_{20}. \quad (24)$$

Нулевыми индексами обозначены установившиеся (равновесные) значения переменных, которые определяются в статическом расчете.

Из системы уравнений (23) находим неизвестные давления:

$$\psi_2 = \frac{1}{D_a}[-D_2u + M_2(\alpha_{e2}\psi_e + \alpha_{12}\psi_1)]$$

$$\psi_3 = \frac{1}{D_a}[-D_3u + M_3(\alpha_{e2}\psi_e + \alpha_{12}\psi_1)],$$

$$M_2 = T_3p + I + \alpha_{32}, \quad M_3 = T_2p + I, \quad (25)$$

$$D_a(p) = T_2T_3p^2 + [T_2\alpha_{32} + T_3(I + \alpha_{c2})]p + \alpha_{c2} + \alpha_{32}(I + \alpha_{c2}). \quad (26)$$

$$D_2 = T_3\tau_2p^2 + [(I + \alpha_{32})\tau_2 + \kappa_2T_3]p + \alpha_{32}\kappa_2,$$

$$D_3 = T_2\tau_2p^2 + \tau_2p - \alpha_{c2}\kappa_2.$$

Безразмерное регулирующее воздействие (3) с учетом (25)

$$\varphi = \sigma(\psi_2 - \psi_3) = \quad (27)$$

$$-\frac{\sigma}{D_a}[(D_2 - D_3)u - (M_2 - M_3)(\alpha_{e2}\psi_e + \alpha_{12}\psi_1)]$$

Используя выражения (26), найдем:

$$D_2 - D_3 = (T_3 - T_2)\tau_2p^2 + (\kappa_2T_3 + \alpha_{32}\tau_2)p + (\alpha_{c2} + \alpha_{32})\kappa_2;$$

$$M_2 - M_3 = (T_3 - T_2)p + \alpha_{32}. \quad (28)$$

Уравнение системы ротор-уравновешивающее устройство. Для вывода уравнения системы в операторной форме подставим выражение (27) в (4):

$$D(p)u = -D_a(\delta)(\tau - \chi) + \sigma[(T_3 - T_2)p + \alpha_{32}](\alpha_{\tilde{n}2}\psi_e + \alpha_{12}\psi_1), \quad (29)$$

где собственный оператор системы

$$D(p) = \sigma(D_2 - D_3) + D_aD_1 =$$

$$= a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4, \quad (30)$$

$$a_0 = T^2T_2T_3, \quad a_1 = T^2[(I + \alpha_{c2})T_3 + \alpha_{32}T_2] + T_1T_2T_3,$$

$$a_2 = T_1[(I + \alpha_{c2})T_3 + \alpha_{32}T_2] + \sigma(T_3 - T_2)\tau_2 + [\alpha_{c2} + \alpha_{32}(I + \alpha_{c2})]T^2 + \kappa_*T_2T_3,$$

$$a_3 = \sigma(\alpha_{32}\tau_2 + \kappa_2T_3) + [\alpha_{c2} + \alpha_{32}(I + \alpha_{c2})]T_1 + \kappa_*[(I + \alpha_{c2})T_3 + \alpha_{32}T_2],$$

$$a_4 = \sigma(\alpha_{c2} + \alpha_{32})\kappa_2 + [\alpha_{c2} + \alpha_{32}(I + \alpha_{c2})]\kappa_*. \quad (31)$$

Операторы воздействия по уравновешиваемой силе τ и задающему воздействию χ , уплотняемому давлению ψ_1 и давлению запирающей среды ψ_e соответственно:

$$D_a(p) = c_0p^2 + c_1p + c_2,$$

$$\sigma\alpha_{12}(M_2 - M_3), \quad \sigma\alpha_{\tilde{n}2}(M_2 - M_3);$$

$$c_0 = T_2T_3, \quad c_1 = (I + \alpha_{c2})T_3 - \alpha_{32}T_2,$$

$$c_2 = \alpha_{c2} + \alpha_{32}(I + \alpha_{c2});$$

$$M_2 - M_3 = (T_3 - T_2)p + \alpha_{32}. \quad (32)$$

Из равенства (29) определяются соответствующие передаточные функции:

$$W_\tau(p) = \frac{u}{\tau - \chi} = \frac{D_a(\delta)}{\sigma D(p)},$$

$$W_1(p) = \frac{u}{\psi_1} = -\frac{\alpha_{12}[\dot{I}_2(\delta) - \dot{I}_2(\delta)]}{\sigma D(p)},$$

$$W_e(p) = \frac{u}{\psi_e} = -\frac{\alpha_{c2}[\dot{I}_2(\delta) - \dot{I}_2(\delta)]}{\sigma D(p)} =$$

$$= \frac{\alpha_{\tilde{n}2}}{\alpha_{12}}W_1(p) = \alpha_{\tilde{n}1}W_1(p). \quad (33)$$

Амплитудные и фазовые частотные характеристики. Реакции на гармонические воздействия

$$\tau = \tau_a e^{i\omega t}, \chi = \chi_a e^{i\omega t}, \psi_l = \psi_{1a} e^{i\omega t}, \psi_e = \psi_{ea} e^{i\omega t}$$

для рассматриваемой линейной системы являются гармоническими функциями $u = u_a e^{i(\omega t + \phi)}$, поэтому

$$W_\tau(i\omega) = \frac{u_{a\tau}}{\tau_a - \chi_a} e^{i\phi_\tau} = A_\tau(\omega) e^{i\phi_\tau(\omega)},$$

$$W_l(i\omega) = \frac{u_{al}}{\psi_{al}} e^{i\phi_l} = A_l(\omega) e^{i\phi_l(\omega)},$$

$$A_e(\omega) = \alpha_{\tilde{n}l} A_l(\omega).$$

Если в формулах (27) ввести замену $p = i\omega$, то получим частотные передаточные функции в виде комплексных чисел, модуль которых представляет амплитудные, а аргумент – фазовые частотные характеристики. После указанной замены и выделения вещественных и мнимых частей представим операторы (30) и (32) в виде:

$$D(i\omega) = U + iV, \quad D_a(i\omega) = U_a + iV_a, \\ M_2(i\omega) - \dot{I}_3(i\omega) = U_l + iV_l,$$

где

$$U = a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4, \quad V = -a_1 \omega^3 + a_3 \omega; \\ U_a = -c_0 \omega^2 + c_2, \quad V_a = c_1 \omega; \\ U_l = \alpha_{32}, \quad V_l = (T_3 - T_2) \omega. \quad (34)$$

Теперь можно разделить вещественные и мнимые части (33):

$$W_\tau(i\omega) = \frac{1}{\sigma} [U_\tau(\omega) + iV_\tau(\omega)], \quad W_e(\omega) = \alpha_{\tilde{n}l} W_l(\omega),$$

$$W_l(i\omega) = -\frac{\alpha_{l2}}{\sigma} [U_l(\omega) + iV_l(\omega)],$$

где

$$U_\tau = \frac{UU_a + VV_a}{U^2 + V^2}, \quad V_\tau = \frac{UV_a - VU_a}{U^2 + V^2}; \\ U_M = \frac{UU_l + VV_l}{U^2 + V^2}, \quad V_M = \frac{UV_l - VU_l}{U^2 + V^2}.$$

Амплитудные и фазовые частотные характеристики определяются следующими формулами:

$$A_\tau(\omega) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{U_a^2 + V_a^2}{U^2 + V^2}}, \quad A_l(\omega) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{U_l^2 + V_l^2}{U^2 + V^2}}, \\ A_e(\omega) = \alpha_{\tilde{n}l} A_l(\omega); \quad (35)$$

$$\phi_\tau = \arctg \frac{V_\tau}{U_\tau} = \arctg \frac{UV_a - VU_a}{UU_a + VV_a},$$

$$\phi_l = \phi_e = \arctg \frac{V_M}{U_M} = \arctg \frac{UV_l - VU_l}{UU_l + VV_l}. \quad (36)$$

Оценка устойчивости. Если в уравнении (29) принять равными нулю внешние воздействия, то приходим к уравнению свободных колебаний – однородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) u = 0,$$

решение которого $u = B e^{\lambda t}$, где λ – характеристический показатель. Вводя замену $\dot{u} = pu = \lambda u$, $p = \lambda$, получим характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (37)$$

Мнимые части корней уравнения представляют собственные частоты системы.

Для рассматриваемой системы четвертого порядка алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица (сводится к требованию:

$$a_{0\dots 4} > 0, \quad a_1 a_2 a_3 > a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

Первое требование всегда выполняется. Второе требование, учитывая громоздкие выражения коэффициентов, трудно поддается анализу. Некоторые практические выводы можно сделать, если рассмотреть систему без дополнительного цилиндрического дросселя 5, т.е. принять проводимость $g_3 \rightarrow \infty$. В этом случае второе неравенство приводится к условию

$$(1 + \alpha_{12}) \tau_2 > \kappa_2 T_2,$$

которое после подстановки коэффициентов (24) устанавливает ограничение на объем камеры гидропята:

$$V_2 < \frac{E}{3p_{20}} A_e z_0 (1 + \alpha_{c2}). \quad (38).$$

Приведенный анализ является лишь первым шагом. Необходимо провести расчет для турбулентных режимов течения в дросселирующих каналах с учетом инерционных сопротивлений, рассмотреть систему с регулируемым отбором из камеры после пяты в деаэрактор, исследовать совместные радиально-осевые колебания ротора. Затворная пята, как и другие затворные устройства, требует установки автоматического регулятора перепада давления, поэтому актуальной является задача совместного анализа системы авторазгрузка-регулятор перепада давления.

Выводы.

Рассмотренная система уравнивания осевых сил, действующих на ротор центробежного компрессора, выполненная в виде гидропята с подводом затворной жидкости, объединяет в се-

бе функции осевой бесконтактной опоры и концевой уплотнения. В результате упрощается конструкция, повышается экономичность и надежность по сравнению с системами, в которых используется разгрузочный поршень. Конструкция позволяет отказаться не только от двухступенчатых затворных концевых уплотнений, но и от выносных подшипников.

Выведенное уравнение динамики дает возможность вычислить собственные частоты осевых колебаний ротора, определить границы динамической устойчивости по основным геометрическим и режимным параметрам, построить частотные характеристики – реакции системы на заданные внешние воздействия.

Список использованной литературы:

1. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины. / Рис В.Ф. – Л.: Машиностроение, 1981. – 351 с.
2. Малюшенко В.В. Энергетические насосы: Справочное пособие. / Малюшенко В.В., Михайлов А.К. – М.: Энергоиздат, 1981. – 200 с.
3. Марцинковский В.А. Насосы атомных электростанций. / Марцинковский В.А., Ворона П.Н. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
4. A.Korczak, W.Marcinkowski, Peczkis G.: Tarcza odciążająca siłę osiową w sprzęzarce wirnikowej. P-365432, (Polska), z 20. 02.2004.
5. Корчак А. Использование гидропаты в качестве затворно-уравновешивающего устройства ротора. / Корчак А., Печкис Г., Марцинковский В. - „Вісник СумДУ” – Суми: Вид-во СумДУ, - 2005, №1 (73), с.68-76.

Static, dynamic and flow characteristics of automatic barrier arrangement for axial forces balancing which act to the centrifugal compressor rotor are obtained on based equations of rotor axial equilibrium, rotor axial vibration and flow balance.

На основі рівнянь нерозривності руху рідини і осьових коливань ротора побудовані статичні і динамічні характеристики нової конструкції автоматичного врівноважуючого пристрою, виконуючого одночасно функції безконтактного ущільнення.

Дата надходження в редакцію: 18.04.2012. р.

Рецензент: д.т.н., професор Тарельник В.Б.

УДК 517.17

РОЗРИВНІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

В.Ф. Власенко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський національний аграрний університет

А.М. Розуменко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський національний аграрний університет

У статті наведені маловідомі факти про множину точок розриву функції $f(x)$, детально досліджені класичні розривні функції Діріхле, Рімана, Дірака та їх застосування, а також доведено існування розривних розв'язків функціональних рівнянь Коші.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Функції є основним об'єктом дослідження в математичному аналізі. Вони поділяються на розривні та нерозривні (неперервні) функції. Клас розривних функцій потребує спеціальних методів дослідження, оскільки до них незастосовні методи диференціального та інтегрального числення. Вони мають оригінальні специфічні властивості і використовуються, зокрема, для побудови контр-прикладів.

Математичний аналіз у вищих педагогічних закладах освіти вивчає в основному неперервні функції та розривні функції із скінченною або зчисленною множиною точок розриву. Майбутній учитель математики повинен знати дещо більше про розривні функції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Джерелом розривних функцій є:

1. Алгебраїчні операції над неперервними функціями. Так $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгебраїчні многочлени, мають точками розриву нулі функції $Q_m(x)$.

2. Операція диференціювання неперервних функцій. Так, функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$, і, значить, її похідна розривна при $x = 0$.

3. Розривні розв'язки функціональних рівнянь та їх систем. Так, німецький математик Г.Гамель довів існування розривних розв'язків рівнянь Коші:

$$f(x + t) = f(x) + f(t), f(x + t) = f(x) \cdot f(t), \\ f(x \cdot t) = f(x) + f(t).$$

4. Основним джерелом розривних функцій є операція граничного переходу. Так,