Chepyzhniy A. THREE – EDGE OF FRENET

Theequations of traffic of the rectilinear segment of a mechanism in system of an three - edge of Frenet of a directing curve are worked out. The directing curve is the general mechanical trajectory of the end of the previous segment and of the following beginning. Traffic of the second end of a following segment is presented in system of an three - edge of Frenet, and then searched in a motionless system as a trajectory of a compound motion of a point.

The complicated driving of a point which relative transition of which happens in mobile three-edge of a curve given by the natural equations is considered. The portable driving of three-edge is determined by differential performances of a curve. Competence of usage of the Frenet's formulas for determination of absolute velocity of a point in projections to basis vectors of mobile three-edge is proved. The absolute trajectories of driving are retrieved visualization of the obtained outcomes is realized.

Powered provisions set straight segment, one end of which is moving in a circle. To do this, apply a cover tryhrannyk guide curve (circle) in the system which is set pattern of rotation of this segment. The opposite end it has a complex movement relative to the fixed coordinate system. The mathematical apparatus allows you to find the angular velocity of the segment as well as its position at any time. These images contain fragments of bypasses of curves, which touch the set pieces. Prospects for future research is to find the equations of bypasses of curves.

***Key words:** mechanism, kinematics theory, the equation of motion, the guide curve.*

Стаття надійшла в редакцію 10.09.2013р.
Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.

УДК 517.521.8

УЗАГАЛЬНЕННЯ МАТРИЦЬ СІЛЬВЕРМАНА-САССА

В. Ф. Власенко, к.ф.-м.н., доцент,
А. М. Розуменко, к.ф.-м.н., доцент.
Сумський національний аграрний університет

У статті досліджені узагальнення $\tilde{A}_m$ і $\tilde{A}_{m_0}$ на предмет їх ефективності і включення. Зокрема для матриць, у яких $p_0 = 1, p_1 \geq 0, \dots, p_{m-1} \geq 0, p_m = 1, p_n = 0,\ \forall\, n > m \geq 2$ знайдені практично зручні для перевірки критерії їх ефективності та неефективності.

***Ключові слова:** регулярна матриця, розбіжна послідовність, підсумовування (s_n), $(\mathrm{C}, 1)$ – метод.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. У статті [1, с. 32-39] детально досліджена найпростіша регулярна матриця Сільвермана-Сасса: $a_{nn} = \frac{1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, $a_{n-1,n} = \frac{1}{2}$ $(n = 1, 2, \dots)$, $a_{nk} = 0$ для всіх інших n і k. Природним її узагальненням є матриця, у якої $a_{nn} = a_{n,n-1} = \dots = a_{n,n-m} = \frac{1}{m}$, $m \in N, n = m, m+1, \dots$, $a_{nk} = 0$ для всіх інших n і k. Позначимо її через A_m.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для сучасної теорії рядів пріоритетним є дослідження розбіжності рядів, а матриці Сільвермана-Сасса відносяться до методів (WN, p_n).

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є вивчення властивостей матриць A_m.

Виклад основного матеріалу. Наведемо необхідні для подальшого факти теорії підсумовування. Нехай (p_n) - послідовність невід'ємних чисел, $p_0 > 0$, $\mathcal{P}_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $n \in N$. Якщо для послідовності (s_n) має місце рівність $\lim_{n\to\infty} \frac{p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \dots + p_n s_0}{\mathcal{P}_n} = S$, то кажуть, що число S є узагальненою границею послідовності (s_n) в розуміння Вороного-Нерлунда і пишуть $\lim_{n\to\infty} s_n = S(WN, p_n)$.

Для регулярності (WN, p_n) - методу необхідно й достатньо виконання умови $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\mathcal{P}_n} = 0$.

Кажуть, що метод (WN, q_n) включає метод (WN, p_n) і пишуть $(WN, p_n) \subset (WN, q_n)$, якщо з рівності $\lim_{n\to\infty} s_n = S(WN, p_n)$ випливає рівність $\lim_{n\to\infty} s_n = S(WN, q_n)$ для кожної (s_n). Має місце наступний критерій включення.

<u>Теорема 19</u> [2, с. 91]. Нехай (WN, p_n) і (WN, q_n) - два регулярні методи Вороного-Нерлунда. Тоді для включення $(WN, p_n) \subset (WN, q_n)$ необхідно й достатньо виконання умов:

1) $|k_0|\mathcal{P}_n + |k_1|\mathcal{P}_{n-1} + \dots + |k_n|\mathcal{P}_0 \leq HQ_n$, де H не залежить від n;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{Q_n} = 0$, де $\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$.

Якщо $\mathcal{P}_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$, то умову 2) можна опустити.

Якщо всі $p_n = 1$, маємо $(\mathrm{C}, 1)$ – метод, або метод середніх арифметичних, для якого з рівності $\lim_{n\to\infty} s_n = S(\mathrm{C}, 1)$ випливає рівність $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ – так звана лімітуюча теорема для $(\mathrm{C}, 1)$ – методу [2, теорема 46].

Для регулярних матриць (так званих T– матриць) мають місце наступні теореми.

<u>Теорема Мазура-Орлича.</u> Якщо T– матриця $A = (a_{nk})$ підсумовує обмежену розбіжну послідовність, то вона підсумовує деяку необмежену

послідовність [3, с. 375].

Теорема В. Якщо T– матриця $A = (a_{nk})$ підсумовує обмежену розбіжну послідовність із скінченним числом часткових границь, то вона підсумовує деяку обмежену послідовність з нескінченною множиною часткових границь [4, с. 577].

Властивості матриць A_m .

Очевидно, всі матриці A_m регулярні.

Теорема 1. Кожна матриця $A_m, m \geq 2$ сильніша за збіжність.

Доведення. Розбіжна послідовність (s_n), у якої $s_{km} = 1, k = 0, 1, 2, \dots$, інші $s_n = 0$, підсумовується матрицею A_m до числа $\frac{1}{m}$.

Теорема 2. Для включення $A_m \subset A_s$ необхідно й достатньо, щоб $s = cm, c \in N$

Доведення. Очевидно, матриця A_m є частинним випадком матриці Вороного-Нерлунда (WN, p_n), у якої $p_0 = p_1 = \dots = p_{m-1} = \frac{1}{m}$, $p_n = 0$, $\forall n \geq m$.

Для (WN, q_n) – методу, у якого $q_0 = q_1 = \dots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, $q_n = 0$, $\forall n \geq s$,

$k(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1+x+\dots+x^{s-1}}{1+x+\dots+x^{m-1}} = \frac{m}{s} \cdot \frac{1-x^s}{1-x^m}$.

Якщо $s = cm, c \in N$, то $k(x) = \frac{m}{s} \cdot \frac{1-(x^m)^c}{1-x^m} = \frac{m}{cs}\left(1 + x^m + x^{2m} + \dots + x^{(c-1)m}\right)$, звідки $k_0 = k_m = k_{(c-1)m} = \frac{m}{cs}$, решта $k_i = 0$, так що умови теореми 19 виконані і, отже, $A_m \subset A_s$.

Якщо $s \neq cm$, то серед коефіцієнтів k_n, які, очевидно, є цілими, існує нескінченна множина відмінних від нуля, умови теореми 19 не виконані і, отже, A_m не включається в A_s.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Всі методи A_m включаються в $(\mathrm{C}, 1)$ – метод.

Доведення. Для $(\mathrm{C}, 1)$ – методу $q_0 = q_1 = \dots = q_n = \dots = 1$, $Q_n = n + 1$. Тоді

$k(x) = \frac{1+x+x^2+\dots+x^n+\dots}{1+x+x^2+\dots+x^{m-1}} = \frac{x-1}{(1-x)(x^m-1)} = \frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + \cdots$,

звідки $k_0 = 1$, $k_1 = \dots = k_{m-1} = 0$, $k_m = 1$, $k_{mp} = 1, p \in N$, решта $k_n = 0$. Умови теореми 19 виконані, тому $A_m \subset (\mathrm{C}, 1)$.

Теорему 3 доведено.

Наслідок. Якщо послідовність (s_n) підсумовується матрицею A_m, то $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$.

Справедливість наслідку випливає з теореми 3 і лімітуючої теореми для $(\mathrm{C}, 1)$ – методу.

Теорема 4. Кожна матриця $A_m, m \geq 2$ підсумовує деякі необмежені послідовності.

Доведення теореми 4 випливає з теореми 1 і теореми Мазура-Орлича.

Теорема 5. Кожна матриця A_m підсумовує деякі обмежені послідовності з нескінченною множиною часткових границь.

Доведення теореми 5 випливає з теореми 1 і теореми В.

Властивості матриць $\tilde{A}_m$.

Узагальненням матриць A_m є матриці $\tilde{A}_m$, у яких $p_0 > 0$, $p_1 \geq 0$, $\dots, p_{m-2} \geq 0$, $p_{m-1} > 0$, $p_n = 0$, $\forall n \geq m > 2$. На відміну від матриць $A_m, m \geq 2$ не кожна матриця $\tilde{A}_m$ сильніша за збіжність. Нижче буде показано, що матриця $\tilde{A}_2$, у якої $p_0 = 2$, $p_1 = 1$, $p_n = 0$, $\forall n > 1$, рівносильна збіжності.

Матриця $\tilde{B}_2$, у якої $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $p_n = 0$, $\forall n > 1$, підсумовує до нуля необмежену послідовність $s_n = (-2)^n$, $n \in N, s_0 = 0$. Дійсно, $t_n = \frac{1}{3}(s_n + 2s_{n-1}) = \frac{1}{3}((-2)^n + 2 \cdot (-2)^{n-1}) = 0, \forall n \in N$.

Матриця $\tilde{B}_2$ не включається в $(\mathrm{C}, 1)$ – метод, оскільки для послідовності $s_n = (-2)^n$, $n \in N$ не виконується лімітуюча для $(\mathrm{C}, 1)$ – методу теорема: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{n} = \infty$.

Ця матриця цікава і тим, що не підсумовує жодної обмеженої розбіжної послідовності. Якщо припустити існування такої послідовності, яка підсумовується матрицею $\tilde{B}_2$ до числа s, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(2s_{n-1} + s_n) = s$.

Позначимо $\underline{\lim}_{n\to\infty} s_n = a$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} s_n = b$, $a < b$.

Тоді існують послідовності (n_k) і (m_k) натуральних чисел такі, що $\lim_{k\to\infty} s_{n_k-1} = a$, $\lim_{k\to\infty} s_{m_k-1} = b$, звідки $\lim_{k\to\infty}\left(2s_{n_k-1} + s_{n_k}\right) = 3s$, $\lim_{k\to\infty}\left(2s_{m_k-1} + s_{m_k}\right) = 3s$, $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = c_1$, $\lim_{k\to\infty} s_{m_k} = c_2$, $c_1, c_2 \in [a, b]$, $2a + c_1 = 3s$, $2b + c_2 = 3s$, $2(b - a) = c_1 - c_1 < b - a$, $2 < 1$, що неможливо.

Теорема 6. Якщо для матриці $\tilde{A}_m, m \geq 2$, $p_0 > p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1}$, то вона рівносильна збіжності.

Доведення. Припустимо існування розбіжної послідовності (s_n), яка підсумовується матрицею $\tilde{A}_m$. В силу теореми Мазура-Орлича її можна вважати необмеженою. Тоді для неї існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $|s_{n_k}| \geq |s_n|$ для всіх $n \leq n_k$,

$t_{n_k} = \frac{p_0 s_{n_k} + p_1 s_{n_k-1} + \dots + p_{m-1} s_{n_k-m+1}}{\mathcal{P}_{m-1}}$,

$|t_{n_k}| \geq \frac{1}{\mathcal{P}_{m-1}}\left(p_0 |s_{n_k}| - p_1 |s_{n_k-1}| - \dots - p_{m-1} |s_{n_k-m+1}|\right) \geq \frac{1}{\mathcal{P}_{m-1}} |s_{n_k}|(p_0 - p_1 - \dots - p_{m-1}) \to +\infty (k \to \infty)$,

що суперечить підсумовуванню (s_n) матрицею $\tilde{A}_m$. Теорему доведено.

Теорема 7. Для того, щоб матриця $\tilde{A}_m$ була рівносильна збіжності, необхідно й достатньо, щоб усі корені рівняння $p(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_{m-1} x^{m-1} = 0$ лежали зовні круга $|x| \leq 1$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\tilde{A}_m$ рівносильна збіжності. Тоді за теоремою 19 [2, с. 91] $k(x) = \frac{1}{p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$,

$|k_0| \mathcal{P}_n + |k_1| \mathcal{P}_{n-1} + \dots + |k_n| \mathcal{P}_0 \leq (|k_0| + |k_1| + \dots + |k_n|) \mathcal{P}_n \leq H$, $\forall n \in N$,

і, отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$ абсолютно збіжний у крузі $|x| \leq 1$, а функція $k(x)$ – обмежена на ньому. Тому всі корені рівняння $p(x) = 0$ лежать зовні круга $|x| \leq 1$, оскільки інакше при існуванні кореня x_0 у крузі $\lim_{x \to x_0} k(x) = \infty$.

Достатність. Нехай усі корені рівняння $p(x) = 0$ лежать зовні круга $|x| \leq 1$. Тоді функція $k(x)$ аналітична у деякому крузі $|x| \leq r$, $r > 1$, і, отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |k_n|$ збіжний. Звідси, за теоремою 19, матриця $\tilde{A}_m$ рівносильна збіжності.

Теорему 7 доведено.

З останньої теореми випливає, що розглянута вище матриця $\tilde{B}_2$ сильніша за збіжність, оскільки рівняння $1 + 2x = 0$ має корінь $x = -\frac{1}{2}$, що лежить у крузі $|x| \leq 1$. А матриця $\tilde{A}_2$ рівносильна збіжності, оскільки корінь рівняння $2 + x = 0$, $x = -2$ лежить зовні круга $|x| \leq 1$.

Теорема 8. Матриця $\tilde{A}_m$, у якої $p_0 > p_1 > \cdots > p_{m-1} > 0$, $p_n = 0$, $\forall n \geq m \geq 2$, рівносильна збіжності.

Доведення. Відомо [5, с. 114], що в цьому випадку всі корені рівняння $p(x) = 0$ лежать зовні круга $|x| \leq 1$ і справедливість теореми 8 випливає з теореми 7.

Зауважимо, що умова строгої монотонності у теоремі 8 істотна для її справедливості. Так, $\tilde{A}_2$, у якої $p_0 = p_1 = 1$, $p_n = 0$, $\forall n > 1$, сильніша за збіжність. Матриця $\tilde{A}_4$, у якої $p_0 = 6$, $p_1 = 5$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_n = 0$, $\forall n > 3$, підсумовує до нуля розбіжну послідовність $((-1)^n)$. Зауважимо, що рівняння $3x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = 0$ має корінь $x = -1$, що лежить у крузі $|x| \leq 1$.

Властивості матриць $\tilde{A}_{m_0}$.

Розглянемо частинний випадок матриць $\tilde{A}_m$, у яких $p_0 = 1, p_1 = p_2 = \cdots = p_{m-1} = 0$, $p_m = 1$, $p_n = 0, \forall n > m \geq 2$. Позначимо їх $\tilde{A}_{m_0}$.

Теорема 9. Кожна матриця $\tilde{A}_{m_0}$ сильніша за збіжність.

Доведення випливає з теореми 7, оскільки для такої матриці корені рівняння $p(x) = 1 + x^m = 0$ лежать на одиничному колі $|x| = 1$.

Зауваження. Безпосереднім обчисленням можна переконатися, що матриця $\tilde{A}_{m_0}$ підсумовує до числа 0,5 обмежену розбіжну послідовність

$$\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m+1}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{m+1}, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{m+1}, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{m+1}, \ldots .$$

Теорема 10. Всі матриці $\tilde{A}_{m_0}$ включаються у $(\mathrm{C}, 1)$ – метод.

Доведення. Для $(\mathrm{C}, 1)$ – методу $q_0 = q_1 = \cdots = q_n = \cdots = 1$,

$$q(x) = 1 + x + x^2 \ldots + x^n + \cdots$$

$$k(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{1+x+x^2+\cdots}{1+x^m} = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 - x^m + x^{2m} - x^{3m} + \cdots).$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо, що $k_0 = k_1 = \cdots = k_{m-1} = 1$, $k_m = 0$, $k_{m+1} = k_{m+2} = \cdots = k_{2m-1} = 0$, $k_{2m} = 1$, $k_{2m+1} = \cdots = k_{3m-1} = 1$, $k_{3m} = 0$, і т.д., тобто числа k_n приймають значення 0 або 1. Тим самим всі умови теореми 19 [2, с. 91] виконані і, $\tilde{A}_{m_0} \subset (\mathrm{C}, 1)$.

Теорему 10 доведено.

Зауважимо, що для матриць $\tilde{A}_{m_0}$ справедливі теореми 4 і 5.

Список використаної літератури:

1. Давыдов Н.А., Михалин Г.А. О последовательностях действительных чисел, суммируемых и не суммируемых одной регулярной матрицей.-Сборник научных трудов «Теоремы тауберова типа и дифференциальные уравнения с малым параметром».-К. КГПИ, 1983. – с. 32-39.
2. Харди Г. Расходящиеся ряды.-М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.- М.: ФМ, 1960. – 471 с.
4. Власенко В.Ф. Суммирование ограниченных расходящихся последовательностей с конечными и бесконечными множествами частичных пределов.–Математические заметки, т.26, выпуск 4, 1979. – с.575-581.
5. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа, ч.1.– М.: Наука, 1978. – 391 с.

Власенко В.Ф., Розуменко А.М. ОБОЩЕНИЕ МАТРИЦ СИЛЬВЕРМАНА-САССА

В статье исследованы обобщения $\tilde{A}_m$ и $\tilde{A}_{m_0}$ на предмет их эффективности и включения. В частности, для матриц, у которых $p_0 = 1, p_1 \geq 0, \ldots, p_{m-1} \geq 0, p_m = 1, p_n = 0$, $\forall\, n > m \geq 2$ указаны практически удобные для проверки критерии их эффективности и неэффективности.

Ключевые слова: *регулярная матрица, расходящаяся последовательность, суммирование (s_n), $(\mathrm{C}, 1)$ – метод.*

Vlasenko V.F., Rozumenko A.M. GENERALIZATIONS MATRIX SILVERMAN-SASSO

The article explores generalizations $\tilde{A}_m$ and $\tilde{A}_{m_0}$ for their effectiveness and on. In particular, the matrices in which $p_0 = 1, p_1 \geq 0, \ldots, p_{m-1} \geq 0, p_m = 1, p_n = 0$, $\forall\, n > m \geq 2$ are practically useful to check the criteria for their effectiveness and ineffectiveness.

Keywords*: regular matrix, divergent sequence, summation (s_n), (C, 1) - method.*

Стаття надійшла в редакцію 10.09.2013 р.
Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.