УДК 621.224

ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ В ОСЕРЕДНЕННІ ПАРАМЕТРІВ ПОТОКУ ПРИ ПЕРЕХОДІ ВІД РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА ДО РІВНЯНЬ РЕЙНОЛЬДСА

В. І. Пугач, ст. викладач,
Н. С. Борозенецьст. викладач.
Сумський національний аграрний університет

В статтірозглянутийспосіб осереднення параметрів потоку на основі моделі ідеальної рідини при переході від рівнянь Нав'є-Стокса до рівнянь Рейнольдса.

***Ключові слова**: ідеальна рідина, метод найменших квадратів, рівняння Нав'є-Стокса, рівняння Рейнольдса.*

Постановка проблеми

Практично в усіх потоках, відбуваються вони в природних умовах чи в сучасних механічних системах, існує турбулентність. Відомо, що в турбулентних потоках тиск, температура та інші гідродинамічні величини безладно пульсують, нерегулярно змінюючись у просторі і в часі. Складний характер коливань швидкості і температури при турбулентному потоці, безліч пульсацій різних періодів і амплітуд ілюструють складну внутрішню структуру турбулентних потоків, які різко відрізняються в цьому відношенні від ламінарних.

Прикладаються великі зусилля, щоб зрозуміти це дуже складне фізичне явище і розробити емпіричні і математичні моделі для його опису і надійного розрахунку характеристик турбулентних потоків. Побудувати математичну модель в даному випадку дуже непросто, бо турбулентність така складна і підходи до її вивчення такі різноманітні, що вона не залишає шансів на систематичне і, головне, повне пояснення. Математична модель ніколи не буває тотожна об'єкту, що розглядається. Вона не передає всіх його властивостей та особливостей і є лише наближеним описом об'єкта, бо заснована на спрощенні та ідеалізації. Тому результати, отримані при аналізі моделі, завжди носять для об'єкта наближений характер.

Питання застосування деякої математичної моделі до об'єкта, що вивчається, не є чисто математичним питанням і не може бути розв'язаним лише математичними методами. Головним критерієм істини є експеримент, який дозволяє порівняти різні гіпотетичні моделі і вибрати з них таку, яка є найбільш простою та найбільш правильно передає властивості явища, що вивчається.

В практиці проектування і виробництва гідравлічних машин все ще відсутні строго обгрунтовані методи розрахунку реального потоку рідини.

В загальному випадку потік реальної рідини в гідротурбіні є тривимірним і супроводжується різними фізичними явищами, з яких найбільший вплив на роботу машини мають кавітація, відрив потоку, а також нерівномірність поля швидкостей нестаціонарного потоку. Для дослідження з урахуванням усіх проблем робочого процесу гідротурбіни найбільш природним є розв'язування повних рівнянь Нав'є-Стокса. Вважається, що нестаціонарні рівняння Нав'є-Стокса повністю описують реальні потоки. Однак стан теорії про методи розв'язування цих рівнянь в більшості випадків викликає нездоланні труднощі для чисельного розв'язування їх з використанням ЕОМ, оскільки до сьогоднішнього дня не доведені загальні теореми існування і єдиності розв'язку повних рівнянь Нав'є-Стокса. А рівняння Рейнольдса взагалі є незамкнутими, хоча для деяких класів руху в'язкої рідини, що не стискається, такі теореми існують [1].

Мета статті

На основі моделі ідеальної рідини показати спосіб осереднення параметрів потоку при переході від рівнянь Нав'є-Стокса до рівнянь Рейнольдса.

Виклад основного матеріалу

На сьогоднішній день основний напрямок чисельних методів розрахунку турбулентних потоків полягає в розв'язанні осереднених рівнянь Нав'є-Стокса. При вивченні турбулентності природно вважати компоненти швидкостей і тиск випадковими величинами в розумінні теорії імовірностей. При цьому будемо вважати, що майже всі траєкторії випадкових величин задовольняють рівняння Нав'є-Стокса.

При переході від рівнянь Нав'є-Стокса до узагальнених рівнянь Рейнольдса на основі моделі ідеальної рідини [2] виникає необхідність вибору способу осереднення параметрів потоку або вибору згладжуючої функції $\overline{f}(x)$. Функція $\overline{f}(x)$ повинна задовольняти такі умови: згладжені значення параметрів повинні бути близькі до вихідних; операція згладжування повинна бути зручною для реалізації її на ЕОМ. У загальному випадку спосіб згладжування не може бути однозначним.

Можна запропонувати локально-індивідуальний спосіб згладжування параметрів потоку. Обробка результатів чисельних розрахунків параметрів потоку ідеальної рідини при турбулентному потоці є відповідальною операцією, тому що на основі отриманих даних розрахунків перевіряються гіпотези, робляться висновки і підводяться підсумки про різні закономірності досліджуваних явищ.

Одним з питань обробки чисельних даних на ЕОМ є питання відшукання найімовірніших значень коефіцієнтів функціональної залежності між результатами розрахунків, які попадають, як відомо, під вплив випадкових помилок, що неодмінно супроводжують кожне обчислення на ЕОМ, яким би точним воно не було.

Найкращим методом розв'язування задачі, що дозволяє одночасно зробити оцінку точності розрахункових величин після їхнього визначення, є метод найменших квадратів.

У практиці обробки результатів обчислень прийнято звичайно користуватися при визначенні коефіцієнтів функціональної залежності різними спрощеними способами з метою максимального полегшення обчислювальних робіт хоча б за рахунок деякого зниження точності [3]. Разом з тим спрощені прийоми в багатьох випадках виявляються більш складними і завжди менш точними, ніж урівнювальні обчислення методом найменших квадратів.

Поставимо за мету розробити алгоритм, що максимально спрощує і полегшує обчислення при використанні методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів функціональної залежності, що зв'язують результати чисельних розрахунків параметрів потоку ідеальної рідини методом гідродинамічних особливостей, а також визначити формули для оцінки кінцевих результатів, які будуть отримані після урівнювання.

Нехай маємо два ряди обчислених величин:

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n;$$

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n.$$

Величини пов'язані між собою деякою функціональною залежністю $f(x)$. Кожен з результатів обчислень x_i і y_i є помилковим (за рахунок випадкових помилок). Якщо істинні значення даних величин позначити через X_i і Y_i, а поправки до значень x_i і y_i через Δx_i, Δy_i, то отримаємо:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i + \Delta x_i, \\ Y_i &= y_i + \Delta y_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Задача зрівнювальних величин полягає в наступному:

1) маючи загальний вигляд функціональної залежності, підібраний на основі даних чисельних розрахунків, установити відповідність між прийнятою залежністю і обчисленими величинами;

2) підібрати для загальної формули такі коефіцієнти, щоб при підстановці в цю формулу значень розрахункових аргументів x_i одержувалися значення функції y_i, які б найкраще задовольняли результати розрахунків, тобто щоб обчислені значення коефіцієнтів були найімовірнішими.

Із сформульованої задачі випливає, що при проведенні урівнювальних обчислень значення аргументу вважаються безпомилковими, а всі помилки обчислень відбуваються за рахунок функції. Отже, задача зводиться до знаходження найімовірніших значень функції, що відповідають прийнятим значенням аргументу, які вважаються істинними.

Припустимо, що загальний вигляд залежності $f(x)$ відомий. Нехай функція $f(x)$ буде поліномом ступеня *m*, тобто

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k. \tag{2}$$

Підставляючи в рівняння (1) послідовно всі значення обчислених величин, отримаємо

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + ... + a_m x_1^m - y_1 = x_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + ... + a_m x_2^m - y_2 = x_2, \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + ... + a_m x_3^m - y_3 = x_3, \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .. \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + ... + a_m x_n^m - y_n = x_n. \end{cases} \tag{3}$$

В системі рівнянь (3) число рівнянь *n* більше числа $m+1$ невідомих коефіцієнтів a_i. Система є несумісною і не може бути розв'язана алгебраїчним шляхом. Рівняння (3) називаються початковими рівняннями.

Щоб із цих рівнянь визначити найімовірніші значення коефіцієнтів a_i, які вважаються змінними, необхідно, щоб сума квадратів помилок x_i була мінімальною, тобто

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 = \min. \tag{4}$$

Для виконання умови (4) необхідно, щоб частинні похідні виразу (4), у якому x_i потрібно замінити згідно системи (3), по змінних

$a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ дорівнювали нулю. Якщо позначити цей вираз через f_i, то отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a_0} = 2(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + ... + a_m x_1^m - y_1) + 2(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... \\ + a_m x_2^m - y_2) + ... + 2(a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + ... + a_m x_n^m - y_n) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a_1} = 2(a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_1^m - y_1) x_1 + ... + 2(a_0 + a_1 x_n + ... + a_m x_n^m - y_n) x_n = 0, \\ .... \\ \frac{\partial f}{\partial a_m} = 2(a_0 + a_1 x_1 + ... + a_m x_1^m - y_1) x_1^m + ... + 2(a_0 + a_1 x_n + ... + a_m x_n^m - y_n) x_n^m = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Скоротивши кожне з рівнянь системи на 2, отримаємо

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 (x_1 + x_2 + ... + x_n) + a_2 (x_1^2 + ... + x_n^2) + ... + a_m (x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m) - \\ - (y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n) = 0, \\ a_0 (x_1 + x_2 + ... + x_n) + a_1 (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) + ... + \\ + a_m (x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + ... + x_n^{m+1}) - (y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + ... + y_n x_n) = 0, \\ .... \\ a_0 (x_1^m + x_2^m + x_3^m ... + x_n^m) + a_1 (x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + ... + x_n^{m+1}) + ... + \\ + a_n (x_1^{2m} + x_2^{2m} + ... + x_n^{2m}) - (y_1 x_1^m + y_2 x_2^m + y_3 x_3^m + ... + y_n x_n^m) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Рівняння (6) називаються нормальними рівняннями. Їх число дорівнює $m+1$; число коефіцієнтів a_i, якіпідлягають визначенню, теж дорівнює $m+1$. Застосувавши скорочений запис сум по Гауссу, отримаємо

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 [x] + a_2 [x^2] + ... + a_m [x^m] - [y] = 0, \\ a_0 [x] + a_1 [x^2] + a_2 [x^3] + ... + a_m [x^{m+1}] - [yx] = 0, \\ a_0 [x^2] + a_1 [x^3] + a_2 [x^4] + ... + a_m [x^{m+2}] - [yx^2] = 0, \\ a_0 [x^m] + a_1 [x^{m+1}] + a_2 [x^{m+2}] + ... + a_m [x^{2m}] - [yx^m] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) розв'язна щодо коефіцієнтів a_i. Після визначення з неї найімовірніших значень коефіцієнтів a_i підставимо їх у рівняння (2). Таким чином, основну задачу урівнювальних обчислень можна вважати виконаною.

Для різних випадків вид залежності $f(x)$ буде неоднаковий, але хід визначення найімовірніших значень коефіцієнтів залежності залишається загальним. Спочатку в підібране рівняння підставляють послідовно відповідні пари значень x_i, y_i і одержують *n* початкових рівнянь виду (3). Потім підносять до квадрата ліві частини цих рівнянь і, склавши їх між собою, знаходять частинні похідні отриманого виразу (5) по змінних a_i. Прирівнявши їх до нуля, одержують $m+1$ нормальних рівнянь виду (7). Далі розв'язують нормальні рівняння і отримують найімовірніші значення шуканих коефіцієнтів a_i.

Рівняння (2) виражає параболічну залежність *n*-го порядку.

Аналізуючи рівняння (7), бачимо, що вони побудовані наступним чином:

1) число рівнянь дорівнює числу коефіцієнтів a_i, тобто дорівнює $m+1$;

2) степені рівнянь відносно x_i поступово зростають від першого рівняння до останнього;

3) степінь першого рівняння на одиницю менше числа коефіцієнтів a_i і дорівнює *m*;

4) степінь останнього рівняння вдвічі більше степеня першого рівняння і дорівнює 2*m*;

5) перший член першого рівняння має нульовий степінь і дорівнює коефіцієнту a_0, помноженому на число вимірів *n*;

6) другий член дорівнює другому коефіцієнту a_1, помноженому на суму обчислених значень x_i в першому степені;

7) далі йдуть вирази, складені з наступних коефіцієнтів, помножених на суми значень x_i, причому степені x_i, що входять до сум, послідовно зростають на одиницю;

8) вільний член першого рівняння дорівнює сумі значень y_i;

9) друге рівняння одержується з першого шляхом заміни при відповідних коефіцієнтах сум $\left[x^{i}\right]$ сумами $\left[x^{i+1}\right]$, тобто сумами степеня на одиницю вище, ніж при коефіцієнтах першого рівняння; вільний член представляє суму $[yx]$, тобто також суму степеня на одиницю вище, ніж степінь вільного члена першого рівняння відносно x_i;

10) всі наступні рівняння одержуються аналогічним шляхом з попереднього.

Висновки

Таким чином, знаючи як складаються нормальні рівняння, відпадає необхідність робити проміжні дії, описані вище, пов'язані з підстановкою величин x_i, y_i у рівняння $f(x)$, піднесенням їх до квадрата і т.д. Розв'язування нормальних рівнянь при великій їх кількості доцільно виконувати методом Гаусса.

Іншим можливим способом реалізації методу найменших квадратів є спосіб, в основі якого використовуються ортогональні поліноми Чебишева [4].

Список використаної літератури:

1. Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование на ЭВМ стационарного и нестационарного обтекания телесных профилей и решеток идеальной несжимаемой жидкостью. - ДАН СССР, 1980.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1978.
3. Б.М.Щиголев. Математическая обработка наблюдений. М.: ГИФ-МЛ, 1962.
4. Хотимский В.С. Выравнивание статистических рядов по методу наименьших квадратов. М.: Государственное статистическое издательство, 1959.

Пугач В. І., БорозенецьН. С. К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ОСРЕДНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ПРИ ПЕРЕХОДЕОТ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА К УРАВНЕНИЯМ РЕЙНОЛЬДСА

Рассмотрено применение метода наименьших квадратов в осреднении параметров потока при переходе от уравнений Навье-Стокса к уравнениям Рейнольдса.

***Ключевые слова**: идеальная жидкость, метод наименьших квадратов, уравнения Навье-Стокса, уравнения Рейнольдса.*

Pugach V.I., Borozenets N.S. LEAST-SQUARES METHOD APPLICATION FOR FLOW PARAMETERS DETERMINATION UNDER NAVIER-STOKES EQUATIONS TRANSFER TO THE REYNOLDS EQUATIONS

In the article examine an algorithm which maximally simplifies and facilitates the calculations of coefficients of functional dependence. For this purpose use a least-squares method. The coefficients of functional dependence are linked by the results of numeral calculations of parameters of stream of ideal liquid. For this purpose use the method of hydrodynamic features. In the article formulas are offered for the estimation of end-point of this research. These results turn out after equalization.

In the article examine application of least-squares method for the middle parameters of stream in transition from equalizations of Navier-Stokes to equalizations of Reynolds.

***Keywords**: ideal liquid, least-squares method, equalization of Navier-Stokes, equalization of Reynolds.*

Стаття надійшла в редакцію: 01.09.2013р.
Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.