moment, rotor of pump.

Стаття надійшла в редакцію 11.10.2014р.
Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.

УДК 621.224

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Н. С. Борозенец
В. И. Пугач
Сумський національний аграрний університет

В статье рассмотрена алгебраическая модель турбулентной вязкости жидкости, которая основана на гипотезе Прандтля.

Ключевые слова: *уравнения Навьє-Стокса, уравнения Рейнольдса, алгебраические модели турбулентности, гипотеза Прандтля, формулы Прандтля.*

Постановка проблемы. Основные параметры гидротурбины, характеризующие ее энергетические и кавитационные качества и гидродинамические нагрузки, определяются характером потока с учетом взаимного влияния всех элементов. В общем случае течение реальной жидкости в гидротурбине является трехмерным неустановившимся и сопровождается различными физическими явлениями, из которых наибольшее влияние на работу машины оказывает кавитация, отрыв потока, а также неравномерность поля скоростей и порождаемая ею нестационарность потока. Для исследования и учета всех проблем рабочего процесса гидротурбины наиболее естественным является решение полных уравнений Навье-Стокса. Однако, состояние теории о методах решения этих уравнений в большинстве случаев вызывает непреодолимые трудности для численного их решения, так как до настоящего времени не доказаны общие теоремы существования и единственности решения полных уравнений Навье-Стокса, а уравнения Рейнольдса вообще являются незамкнутыми, хотя для частных классов движения вязкой несжимаемой жидкости такие теоремы существуют [1].

Нелинейный характер уравнений передает общие физические свойства течений: наличие зон с резким изменением градиентов величин (пограничные слои, ударные волны и т.п.), «отрыв» потока, возможность ламинарного, переходного и турбулентного режимов течений, появление квазипериодических, неустойчивых решений и бифуркации решений. Физическая структура турбулентности носит сложный характер. Изучение осредненной по времени турбулентности, основанное на полуэмпирических моделях замыкания, в настоящее время интенсивно развивается для случая несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Решение полных уравнений Навье-Стокса является трудоемкой задачей. Обычно рассматривают предельные случаи - уравнения идеальной жидкости и пограничного слоя. Физически это соответствует тому, что вязкими силами и теплопроводностью пренебрегают и учитывают их влияние только вблизи поверхностей. С математической точки зрения уравнения идеальной жидкости и пограничного слоя являются внешним и внутренним асимптотическими разложениями уравнений Навье-Стокса при $R_e \to \infty$. В настоящее время численное моделирование течений жидкости в зависимости от характера рассматриваемой задачи проводится в рамках различных математических постановок и приближений.

Цель статьи. На основании гипотезы Прандтля построить алгебраическую модель турбулентной вязкости жидкости.

Изложение основного материала. Алгебраические модели турбулентности жидкости основываются на гипотезе Прандтля:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| , \quad (1)$$

где l - длина пути смешения, y- расстояние от стенки.

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывают для различных турбулентных напряжений по разной длине смешения:

$$\overline{u'v'} = -\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\nu_x}{\nu} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \quad , \quad \overline{v'w'} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\nu_\varphi}{\nu} \left(-\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} + \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{w}{H_2 H_3} \right) \quad , \quad (2)$$

где ν_x и ν_φ- коэффициенты турбулентной вязкости.

В случае простого незакрученного осесимметричного течения жидкости моделировать необходимо только член $\overline{u'v'}$. Все прочие турбулентные члены можно отбросить, проведя анализ порядков величин. Если течение является закрученным, моделированию подлежит также член $\overline{v'w'}$. Член $\overline{u'v'}$ определяет турбулентные напряжения в продольном направлении, а член $\overline{v'w'}$ - в окружном направлении.

Формулы Прандтля для расчета этих коэффициентов после обезразмеривания имеют вид:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\nu_x}{\nu}=\frac{q_2}{Q_2}l_x^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left[q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{w}{q_2}\right)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\nu_\varphi}{\nu}=\frac{q_2}{Q_2}l_\varphi^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)^2+\frac{1}{\sigma}\left[q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{w}{q_2}\right)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

где l_x и l_φ - длина пути смешения в продольном и окружном направлениях соответственно, $\sigma=\frac{\nu_x}{\nu_\varphi}$.

Формула для длины пути смешения l в общем случае зависит от типа рассматриваемого течения: пограничный слой, струя, след и т.п. В данном исследовании приняты общераспространенные формулы для пристенных течений [2]:

- для внутренней области, расположенной в непосредственной близости от стенки гидротурбины - формула Ван-Дриста:

$$l_x=0.41y\left(1-\exp\left(-y^+/A\right)+\exp\left(-60y^+/Ah^+\right)\right), \qquad (5)$$

где A = 26, $h^+=h\left(\mathrm{Re}\tau_{xw}\right)^{1/2}$, h - высота бугорков шероховатости стенок;

- для остальной области - формула Клаузера, не использующая длину пути смешения:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\nu_{x(outer)}}{\nu}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\nu_{\varphi(outer)}}{\nu}=\alpha\delta^*u_{\max}, \qquad (6)$$

где α = 0,0168, u_{max} - максимальная по сечению канала расходная скорость u, $\delta^*=\int_0^{Q_2}\left(1-q_t\right)H_2dq_2$ - толщина вытеснения, $q_t^2=\frac{u^2+w^2}{u_{\max}^2}$.

Формула (6) используется в том случае, когда коэффициенты ν_x и ν_φ рассчитываются по формулам (3) - (5). Для расчета l_x параметр y^+ определяется в виде $y^+=y(Re\tau_{xw})^{1/2}$, для расчета l_φ - в виде $y^+=y(Re\tau_{\varphi w})^{1/2}$, где $\tau_{xw}=\partial u/(H_2\partial q_2)$, $\tau_{\varphi w}=\partial w/(H_2\partial q_2)$ - касательные напряжения на стенке в продольном и окружном направлениях соответственно, y - расстояние от стенки. Кроме того, если стенка является вогнутой (относительно потока), сила трения вдоль нее оказывается несколько большей по сравнению с плоской стенкой, а если выпуклой - меньшей. Учитывая это, в осесимметричных слоях y рекомендуется рассчитывать по формулам:

- вблизи наружной стенки $y=R_0\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)$,

- вблизи внутренней стенки $y=r_0\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$,

где r - радиальная координата, r_0 и R_0 - радиусы внутренней и наружной стенки соответственно.

Турбулентная вязкость по формуле Клаузера (6) рассчитывается отдельно для наружной и внутренней стенки и ее значение в ядре потока определяется путем линейной интерполяции.

Алгебраические модели хорошо зарекомендовали себя для сравнительно простых течений вязкой жидкости, но требуют модификаций для расчета течений более сложного вида. В данном исследовании учитывается анизотропность турбулентной вязкости жидкости, которая присуща закрученным течениям (формулы (3) - (4)). Кроме того, модель требует модификации, если течению свойственны [3]:

- малые числа Рейнольдса Re_0(имеются ввиду числа Рейнольдса, рассчитанные по толщине потери импульса: $\theta=\int_{r_0}^{R_0}q_t\left(1-q_t\right)dr$). Например, если Re<5000 при входе равномерного потока в канал, то в формуле (6) для расчета α используется выражение

$$\alpha=0{,}0168\frac{1{,}55}{1+\pi},$$

где π = 0,55 [1 - exp (- 0.243$z^{1/2}$- 0.298z)], z = Re_0/425-1;

- шероховатость (добавляется член в формулу Ван-Дриста (5));

- проницаемость стенки (не учитывается);

- сливающиеся сдвиговые слои (не учитывается);

- большие градиенты давления (в нашем исследовании наиболее существенный эффект, влияющий на структуру потока в канале). Если в модели турбулентности не учесть повышенный градиент давления, то во время расчета течения в гидротурбине отрыв потока от стенки будет зафиксирован раньше, чем по данным эксперимента.

В нашем исследовании модификации подлежит коэффициент A в формуле (5). Расчет коэффициента A проводился по формуле [4]:

$$A=\frac{26}{\sqrt{1-11{,}8p^+}}, \qquad (7)$$

где $p^{+} = -\frac{\sqrt{\mathrm{Re}}}{\tau_{xw}^{3}} \frac{\partial p}{\partial q_1}$.

При расчете течений, содержащих небольшие локальные зоны отрыва, например, при внезапном расширении канала, в зоне отрыва параметр y^+ в нашем исследовании рассчитывается по формуле, предложенной в [5]:

$$y^{+} = y\left(\mathrm{Re}\,\tau_{xw\max}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

где $\tau_{xw\max} = (\partial u/\partial q_2)_{\max}$ - максимальное по сечению безразмерное напряжение трения. Эта формула позволяет получать удовлетворительные результаты для расчета течений такого класса, учитывающие предысторию течения.

Выводы. В практике расчетов осесимметричных течений в гидротурбинах обычно применяется либо алгебраическая, либо *k-ε* модель турбулентности [6]. В нашем исследовании используется алгебраическая модель турбулентной вязкости. Более трудоемкая в реализации *k-ε* модель турбулентности хотя и отражает большее проникновение в механизм турбулентного обмена, но для слабо закрученных течений в гидротурбине она почти не дает превосходства в точности по сравнению с алгебраической моделью турбулентной вязкости жидкости. В алгебраическую модель турбулентности внесены поправки на малые числа Рейнольдса (на входе в канал), шероховатость, большие градиенты давления, выпуклость и вогнутость стенок канала, учтена анизотропность турбулентной вязкости.

Список використаної літератури:

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. // М.: Наука, 1970, с. 288.
2. Krimmerman Y. Adler D. The Complete Three-Dimensional Calculation of the Compressible Flow Fold in Turboimpellers. // Mech. Eng. Sci 1978. -20, p. 149-158.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х томах. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
4. Зубарев В.М. Исследование предотрывных течений в пограничном слое на основе различных алгебраических моделей турбулентности.// Механика жидкости и газа. 1991, т. 6, с. 36-43.
5. Плетчер Р. Расчет несжимаемого турбулентного отрывного течения. // Теоретические основы инженерных расчетов. Труды американского общества инженеров-механиков. 1978, т. 100, № 4, с. 139-146.
6. LaunderB.E., SpaldingD.B. TheNumericalComputationofTurbulentFlows. // Comput. MethodsAppl. Mech. Eng. 1974. № 3, с. 269-289.

Борозенец Н.С., ПугачВ.І. Алгебраїчна модель турбулентної в'язкості рідини.

Проведено аналіз чисельного моделювання потоку рідини в рамках різних математичних постановок і наближень. Зокрема, зроблено огляд щодо застосування рівнянь Нав'є-Стокса та рівнянь Рейнольдса. Розглянуто алгебраїчну модель турбулентної в'язкості рідини на основі гіпотези Прандтля. Для розрахунків розглянуто формули Прандтля та інші. В алгебраїчну модель турбулентності внесено поправки на малі числа Рейнольдса (на вході в канал), шорсткість, великі градієнти тиску, опуклість і вгнутість стінок каналу, врахована анізотропність турбулентної в'язкості.

Ключові слова: *рівняння Нав'є-Стокса, рівняння Рейнольдса, алгебраїчні моделі турбулентності, гіпотеза Прандтля, формули Прандтля.*

Borozenets N., Pugach V. Algebraic model of turbulence the viscosity of the liquid

The solution of the full Navier-Stokes equations is a time-consuming task. Usually consider the limiting cases of the equations of a perfect fluid and the boundary layer. Physically, this corresponds to viscous forces and heat conduction are neglected and consider their effect only near the surfaces. From a mathematical point of view, the equations of a perfect fluid and boundary layer are the outer and inner asymptotic expansions of Navier-Stokes equations with Re . Currently, numerical simulation of fluid flows, depending on the nature of the problem is carried out in the framework of various mathematical productions and approximations.

The analysis of numerical simulation of fluid flow in various mathematical productions and approximations. In particular, the overview of the application of the Navier-Stokes and Reynolds equations. Considered algebraic model for the turbulent viscosity of the fluid based on the hypothesis of Prandtl. For the calculations discussed formulas Prandtl and others. In the algebraic model of turbulence amended at small Reynolds number (input channel), roughness, large pressure gradients, convexity and gnutt walls of the channel, considered anthropist turbulent viscosity.

Keywords: *equation Navye-Stokes equations, Reynolds equations, algebraic turbulence model, the hypothesis Prandtl, Prandtl formula.*

Стаття надійшла в редакцію 12.09.2014р.
Рецензент: д.т.н., професор Кочмола М.М.