вах. Предложенная методика обоснования состава машинных агрегатов по основным критериям оптимальности: производительность, расход топлива, энергетические затраты и приведенные затраты машинных агрегатов.

Ключевые слова: *технологические процессы, технические средства, машинные агрегаты, методика обоснования, мощность, рациональная скорость, коэффициент загрузки, критерии оптимизации, производительность, расход топлива, энергетические затраты, приведенные затраты.*

Sarzhanov O., Tatsenko O. The justification composition machine aggregates to perform mechanized processes in plant based on modern technical tools

The mechanization crop production in Ukraine during the reform and development of agricultural production requires technological upgrading high-performance, reliable hardware. They allow you to meet the demands of modern agriculture. Further development of agriculture greatly depends on the logistics industry.In terms today, the structure market means of agricultural production. It requires new approaches to systems engineering and technical support of modern technologies in agricultural production.Changes in agricultural production in Ukraine and its integration into global processes led to significant changes in agriculture.Reducing the cost of crop production is the actual problem. For engineering service sector is task is to ensure high quality of the machines. Machines should do the job with a maximum load in the short term.To ensure a certain level of quality farm machinery necessary to optimize their acquisition.At the present stage development of agriculture. These issues are of particular relevance. In the scientific paper analyzes famous works by justification composition machine aggregate. The scientific article is devoted to study the composition and use machine aggregate in the performance of mechanized processes the agricultural plant. The results and analysis indicate a sufficiently large number of scientific research aimed at solving this problem.The problem of engineering and technical support agricultural production remains understudied.An important aspect the calculation and the optimal composition machine aggregate in Ukraine is the emergence a large number different types of foreign technical tools for agricultural purposes. Most the information about the specifications data of means rather limited. Available information is not sufficient to justify the existing methods rational structure, parameters and modes operation of machine aggregate. The method optimizing the structure machine aggregate manning the presence of technical information on public facilities.

The technique is conventionally divided into three stages calculations: justification for traction and grip capabilities energy resources; rational justification modes and parameters of machine aggregate; optimization the use technology (machine aggregate) in industrial processes. The technique justification machine aggregate in the main optimality criteria: performance, fuel consumption, energy costs, and given the cost of machine aggregate.

For practical implementation of the proposed technique developed software for computers.

Keywords: *technological processes, technical tools,machine aggregates,methods of study,power, rational speed of the aggregates,engine load factor,criteria for optimization, performance, fuel consumption, energy costs, reduced costs.*

Стаття надійшла в редакцію: 23.03.2015р.
Рецензент: д.т.н., проф. Тарельник В.Б.

УДК629.3.017

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ КОМБІНОВАНОГО МТА

П. М. Ярошенко,к.т.н., доцент? Сумський національний аграрний університет

У статті розглянуто питання математичного моделювання руху комбінованого машинно-тракторного агрегату (МТА) в результаті якого було отримано вісім диференційних рівнянь, що дадуть можливість оцінити параметри руху агрегату.

Ключові слова *– комбінований агрегат, диференційне рівняння, рівняння Лагранжа, кінетична енергія, потенційна енергія, узагальнені координати.*

Постановка проблеми. Складні механічні системи, до яких відноситься і МТА, є пружними системами з нескінченним числом ступенів вільності. Вивчення руху таких суцільних пружних систем пов'язане з великими труднощами. Технічна практика виробила багато різних прийомів побудови спрощених схем, які використовуються при аналізі. Одним з таких прийомів, особливо широко використовуваний в машинобудуванні, є заміна реальної складної системи еквівалентною приведеною системою з кінцевим числом ступенів вільності. Цей прийом доцільно використати і в даному випадку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питаннями досліджень руху складних сільськогосподарських агрегатів займалось багато вчених.

Так Авдеев В. М. в своїй роботі [1] досліджував складний рух посівного агрегату в складі трактора з шарнірно-зчленованою рамою, зчіпки і трьох зернових сівалок. Рух посівного агрегату було описано у вигляді декількох диференційних рівнянь.

Антощенков Р. В. [2] в якості математичного апарата при складанні диференціальних рівнянь руху комбінованого ґрунтообробно-посівного агрегату в складі трактора ХТЗ-150К-09 і сівалки АПП-6 прийняв рівняння Лагранжа другого роду. В якості узагальнених координат системи, що розглядаються, були прийняті відповідні кути повороту елементів агрегату.

Артьомовим М. П. [3] для створення математичної моделі руху орного агрегату було використано поширену серед дослідників формулу рівняння Лагранжа другого роду. Після складання виразів кінетичної та потенційної енергії врахування сил і моментів, що діють на орний агрегат і використання рівнянь Лагранжа, одержано математичну модель руху у вигляді системи диференційних рівнянь.

Формулювання цілей статті. Проаналізувавши публікації останніх років зроблено висновок про те, що дослідниками для описання руху складних агрегатів використовувались рівняння Лагранжа другого роду. Однак дослідники не використовували в своїх агрегатах передню начіпну систему трактора. Метою даної статті є моделювання руху комбінованого агрегату з використанням передньої навіски за допомогою системи диференційних рівнянь.

Виклад основного матеріалу. До складу МТА входять енергонасичений трактор типу ХТЗ-121, передня і задня навісні сільськогосподарські машини. Розглядатимемо рух МТА в двох вимірах, вважаючи, що вертикальні сили і переміщення не роблять великого впливу на рух в цілому. Положення трактора повністю визначається координатами центру мас (у двох вимірах) і кутом повороту подовжньої осі трактора відносно осі $\boldsymbol{x}$. Крім цього, напрям руху визначає кут повороту керованих коліс. Для моделювання різкого збільшення випадкових опорів навісними машинами агрегату, необхідно також допускати кутові і поперечні переміщення навісних машин. Поздовжні переміщення навісних машин відносно трактора вважаються дуже малими [4]. Схема руху МТА, при врахуванні перелічених вище чинників, представлена, на рис. 1. Деформації елементів, що зв'язують трактор з навісними машинами, для наочності не вказані.

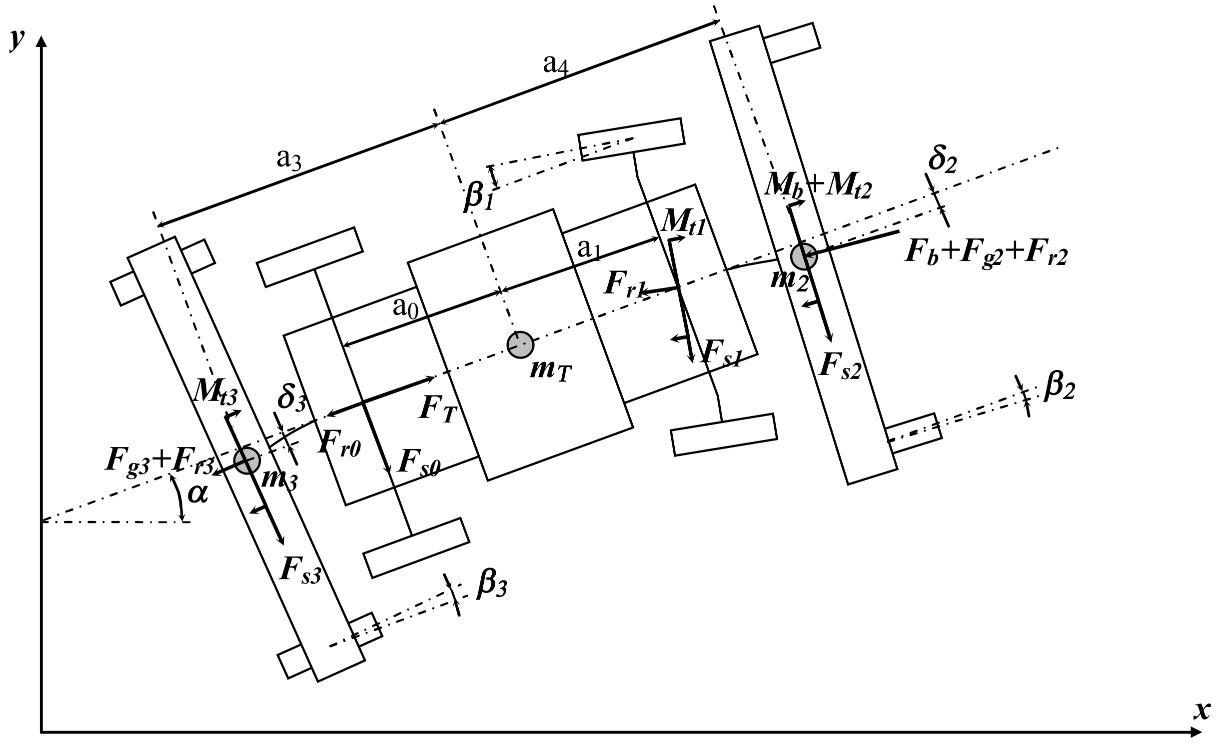

Рис. 1. Схема руху МТА

До наведеної схеми вводяться вісім узагальнених координат: координати центру мас трактора – $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; кут повороту поздовжньої осі трактора – $\boldsymbol{\alpha}$; кут повороту напрямних коліс – $\boldsymbol{\beta_1}$; поперечні переміщення передньої і задньої начіпних машин – $\boldsymbol{\delta_2}$ і $\boldsymbol{\delta_3}$ відповідно; кутові переміщення передньої і задньої начіпних машин – $\boldsymbol{\beta_2}$ і $\boldsymbol{\beta_3}$ відповідно.

На запропонованій схемі агрегату символ $\boldsymbol{m}$ характеризує масу, $\boldsymbol{F}$ – силу, $\boldsymbol{M}$ – момент. Цифрові індекси 0, 1, 2, і 3 вказують на належність до заднього ведучого мосту, переднього мосту, передньої і задньої начіпних машин відповідно. Символьні індекси розподілені наступним чином:

сила і момент, що описують випадкові (ударні) впливи – ***b***; сили тертя кочення – ***r***; бічні сили – ***s***; моменти опору повороту – ***t***; сили опору, що виникають під час виконання сільськогосподарських операцій – ***g***; величини, що характеризують трактор в цілому – ***T*** (***m*$_T$**– маса трактора, ***F*$_T$**– сила тяги трактора).

Для виведення диференційних рівнянь руху в узагальнених координатах, як правило, використовують рівняння Лагранжа другого роду [2, 3, 4, 6]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = 0 \tag{1}$$

де T – кінетична енергія системи; q_k – узагальнені координати; Q_k – узагальнені сили.

Для неконсервативної системи с потенційною енергією Π і зовнішніми впливами P_k, узагальнені сили записуються так:

$$Q_k = P_k - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \tag{2}$$

Якщо використати функцію Лагранжа

$$L = T - \Pi \tag{3}$$

то систему рівнянь (1) можна записати наступним чином:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = P_k \tag{4}$$

Координати центрів мас передньої і задньої начіпних систем залежать від координат центру мас трактора і поперечних переміщень начіпних систем:

$$\begin{aligned} x_2 &= x + a_2\cos\alpha + \delta_2\sin\alpha \\ y_2 &= y + a_2\sin\alpha - \delta_2\cos\alpha \\ x_3 &= x - a_3\cos\alpha + \delta_3\sin\alpha \\ y_3 &= y + a_3\sin\alpha - \delta_3\cos\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

Кутові переміщення β_i пов'язані з поздовжньою віссю трактора. Для знаходження кінетичної енергії системи необхідні повні кутові переміщення відносно осі x. Позначимо ці переміщення φ_i.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_1 - \beta_1 \\ \varphi_2 &= \alpha_2 - \beta_2 \\ \varphi_3 &= \alpha_3 + \beta_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Маса трактора є змінною величиною. В загальному вигляді вона залежить як від часу, так і від швидкості:

$$m_T = m_T(t, \dot{x}, \dot{y}) \tag{7}$$

Кінетична енергія системи рівна:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_T\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + m_3\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + I_0\dot{\alpha}^2 + I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2 + I_3\dot{\varphi}_3^2\right) \tag{8}$$

де I_i – моменти інерції відносно вертикальної осі.

Підставляючи отримані співвідношення (5) і (6) у вираз для кінетичної енергії (8), отримаємо:

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}\Big(& m_T\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m_2\Big(\left(\dot{x} - a_2\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\delta}_2\sin\alpha + \delta_2\dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\ & + \left(\dot{y} + a_2\dot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\delta}_2\cos\alpha + \delta_2\dot{\alpha}\sin\alpha\right)^2\Big) + \\ & + m_3\Big(\left(\dot{x} + a_3\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\delta}_3\sin\alpha + \delta_3\dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\ & + \left(\dot{y} + a_3\dot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\delta}_3\cos\alpha + \delta_3\dot{\alpha}\sin\alpha\right)^2\Big) + \\ & + I_0\dot{\alpha}^2 + I_1\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2\right) + I_2\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_2^2\right) + I_3\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_3^2\right)\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

Пружні сили діють на навісні машини (змушуючи їх повернутися в початкове положення по відношенню до трактора) і на керовані колеса трактора. Коефіцієнти жорсткості пружних зв'язків позначимо через ***C*$_{ij}$**. При цьому перший індекс 1 характеризує поворотну (або кутову) жорсткість зв'язків, а 2 – гнучку жорсткість.

Потенційна енергія системи може бути записана так

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(C_{11}\beta_1^2 + C_{21}\beta_2^2 + C_{31}\beta_3^2 + C_{22}\delta_2^2 + C_{32}\delta_3^2\right) \tag{10}$$

Узагальнені зовнішні впливи знаходяться по наступній методиці. Відповідній узагальненій координаті дають нескінченно малу зміну δq_k. Коефіцієнт при δq_k у виразі роботи всіх активних зовнішніх впливів і буде узагальненим зовнішнім впливом. При цьому необхідно враховувати, що кути β_2 і β_3 дуже малі внаслідок великої жорсткості пружних елементів, що зв'язують начіпні машини з трактором, а кут β_1, навпаки, в загальному випадку, може бути достатньо великим. Іншими словами, кутами β_2 и β_3 можна знехтувати при знаходженні проекцій сил на координатні вісі и на поздовжню вісь трактора.Виходячи із сказаного вище і керуючись наведеною схемою руху МТА, запишемо узагальнені зовнішні впливи:

$$
\begin{aligned}
&P_\alpha = F_{s_0} a_0 - F_{s_1} a_1 \cos\beta_1 + F_{r_1} a_1 \sin\beta_1 \\
&P_\beta \ = M_{t_1} \\
&P_{\beta_2} = M_b + M_{t_2} \\
&P_{\beta_3} = M_{t_3} \\
&P_{\delta 2} = F_{s2} \\
&P_{\delta 3} = F_{s3} \\
&P_x = \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\cos\alpha - F_{r1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\sin(\alpha - \beta_1) + F_{s0}\sin\alpha \\
&P_y = \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\sin\alpha - F_{r1}\sin(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s0}\cos\alpha
\end{aligned} \tag{11}
$$

Необхідно відмітити, що сила і момент F_b і M_b, які моделюють різке збільшення випадкових опорів навісними машинами агрегату, мають тимчасовий характер впливу, тобто в початковий, доволі короткий період часу, вони матимуть відмінні від нуля значення, а потім на протязі доволі довгого періоду часу вони можуть дорівнювати нулю. Цей факт дає можливість застосувати в наступному, після виводу диференційних рівнянь руху, загальні положення теорії стійкості руху, так як одні й ті ж рівняння описують рівняння збуреного і незбуреного рухів.

Функція Лагранжа в розгорнутому вигляді запишеться так:

$$
\begin{aligned}
L = \frac{1}{2}\Big(& m_T\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m_2\Big(\left(\dot{x} - a_2\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\delta}_2\sin\alpha + \delta_2\dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\
& + \left(\dot{y} + a_2\dot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\delta}_2\cos\alpha + \delta_2\dot{\alpha}\sin\alpha\right)^2\Big) + \\
& + m_3\Big(\left(\dot{x} + a_3\dot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\delta}_3\sin\alpha + \delta_3\dot{\alpha}\cos\alpha\right)^2 + \\
& + \left(\dot{y} + a_3\dot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\delta}_3\cos\alpha + \delta_3\dot{\alpha}\sin\alpha\right)^2\Big) + \\
& + I_0\dot{\alpha}^2 + I_1\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2\right) + I_2\left(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_2^2\right) + I_3\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_3^2\right)\Big) - \\
& - \frac{1}{2}\left(C_{11}\beta_1^2 + C_{21}\beta_2^2 + C_{31}\beta_3^2 + C_{22}\delta_2^2 + C_{32}\delta_3^2\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Для виведення диференційних рівнянь руху МТА необхідно вирахувати похідні від функції Лагранжа по узагальнених координатах і узагальнених швидкостях, а потім підставити отримані значення разом зі значеннями узагальнених сил в рівняння Лагранжа (у вигляді системи (4)).

Похідна функції Лагранжа по α:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \alpha} = & -m_2\dot{x}a_2\dot{\alpha}\cos\alpha + m_2\dot{x}\dot{\delta}_2\cos\alpha - m_2\dot{x}\delta_2\dot{\alpha}\sin\alpha - \\
& - m_2\dot{y}a_2\dot{\alpha}\sin\alpha + m_2\dot{y}\dot{\delta}_2\sin\alpha + m_2\dot{y}\delta_2\dot{\alpha}\cos\alpha + \\
& + m_3\dot{x}a_3\dot{\alpha}\cos\alpha + m_3\dot{x}\dot{\delta}_3\cos\alpha - m_3\dot{x}\delta_3\dot{\alpha}\sin\alpha + \\
& + 4m_3a_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha - 2m_3a_3\dot{\alpha}^2\delta_3 + 4m_3a_3\delta_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \\
& - m_3\dot{y}a_3\dot{\alpha}\sin\alpha + m_3\dot{y}\dot{\delta}_3\sin\alpha + m_3\dot{y}\delta_3\dot{\alpha}\cos\alpha
\end{aligned} \tag{13}
$$

по $\dot{\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = & \ m_3\dot{x}a_3\sin\alpha + m_3\dot{x}\delta_3\cos\alpha + 4m_3a_3\delta_3\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \\
& + m_3\dot{y}a_3\cos\alpha + m_3\dot{y}\delta_3\sin\alpha - 2m_3a_3\dot{\delta}_3\cos^2\alpha - \\
& - m_2a_2\dot{x}\sin\alpha + m_2\dot{x}\delta_2\cos\alpha + m_2\dot{y}a_2\cos\alpha - \\
& - m_2a_2\dot{\delta}_2 + m_2a_2^2\dot{\alpha} + m_3\delta_3^2\dot{\alpha} + m_3a_3\dot{\delta}_3 + m_3a_3^2\dot{\alpha} + \\
& + m_2\delta_2^2\dot{\alpha} + I_0\dot{\alpha} - I_2\dot{\beta}_2 + I_2\dot{\alpha} - I_1\dot{\beta}_1 + I_1\dot{\alpha} + \\
& + I_3\dot{\beta}_3 + m_2\dot{y}\delta_2\sin\alpha + I_3\dot{\alpha}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Підставляючи вираз для P_α із (11) разом з отриманими значеннями похідних функції Лагранжа по α і $\dot{\alpha}$ в систему (4) отримаємо перше диференційне рівняння руху:

$$
\begin{aligned}
& -2m_3a_3\dot{\alpha}^2\delta_3 + 4m_3a_3\delta_3\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + 4m_3a_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \\
& + m_2a_2^2\ddot{\alpha} + m_3a_3\ddot{x}\sin\alpha + m_3a_3\ddot{\delta}_3 + m_2\delta_2^2\ddot{\alpha} + \\
& + m_3a_3^2\ddot{\alpha} + m_3\delta_3^2\ddot{\alpha} + m_3a_3\ddot{y}\cos\alpha + I_3\ddot{\beta}_3 - m_2a_2\ddot{\delta}_2 + \\
& + m_3\ddot{x}\delta_3\cos\alpha + 4m_3a_3\ddot{\alpha}\delta_3\sin\alpha\cos\alpha - m_2a_2\ddot{x}\sin\alpha + \\
& + I_2\ddot{\alpha} - I_1\ddot{\beta}_1 - 2m_3a_3\ddot{\delta}_3\cos^2\alpha + m_3\ddot{y}\delta_3\sin\alpha + I_1\ddot{\alpha} + \\
& + 2m_3\delta_3\dot{\alpha}\dot{\delta}_3 + I_0\ddot{\alpha} + m_2a_2\ddot{y}\cos\alpha + m_2\ddot{x}\delta_2\cos\alpha - \\
& - I_2\ddot{\beta}_2 + m_2\ddot{y}\delta_2\sin\alpha + I_3\ddot{\alpha} + 2m_2\delta_2\dot{\alpha}\dot{\delta}_2 = \\
& = F_{s0}a_0 - F_{s1}a_1\cos\beta_1 + F_{r1}a_1\sin\beta_1
\end{aligned} \tag{15}
$$

Похідні функції Лагранжа по β_1 і $\dot{\beta}_1$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -C_{11}\beta_1 \\
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_1} = -I_1\dot{\alpha} + I_1\dot{\beta}_1
\end{aligned} \tag{16}
$$

Отже, друге рівняння руху запишеться так:

$$
-I_1\ddot{\alpha} + I_1\ddot{\beta}_1 + C_{11}\beta_1 = M_{t1} \tag{17}
$$

Похідні функції Лагранжа по β_2 і $\dot{\beta}_2$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \beta_2} = -C_{21}\beta_2 \\
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_2} = -I_2\dot{\alpha} + I_2\dot{\beta}_2
\end{aligned} \tag{18}
$$

Третє рівняння руху:

$$
-I_2\ddot{\alpha} + I_2\ddot{\beta}_2 + C_{21}\beta_2 = M_b + M_{t2} \tag{19}
$$

Похідні по β_3 і $\dot{\beta}_3$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial L}{\partial \beta_3} = -C_{31}\beta_2 \\
& \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_3} = I_3\dot{\alpha} + I_3\dot{\beta}_3
\end{aligned} \tag{20}
$$

Відповідно, четверте рівняння руху :

$$
I_3\ddot{\alpha} + I_3\ddot{\beta}_3 + C_{31}\beta_3 = M_{t3} \tag{21}
$$

Похідна функції Лагранжа по δ_2:

$$
\frac{\partial L}{\partial \delta_2} = m_2\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + m_2\dot{y}\dot{\alpha}\sin\alpha + m_2\dot{\alpha}^2\delta_2 - C_{22}\delta_2 \tag{22}
$$

по $\dot{\delta}_2$:

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_2} = m_2\dot{x}\sin\alpha - m_2a_2\dot{\alpha} + m_2\dot{\delta}_2 - m_2\dot{y}\cos\alpha \tag{23}
$$

Звідси, п'яте диференційне рівняння руху :

$$m_2\ddot{x}\sin\alpha - m_2a_2\ddot{\alpha} + m_2\ddot{\delta}_2 - m_2\ddot{y}\cos\alpha - m_2\dot{\alpha}^2\delta_2 + C_{22}\delta_2 = F_{s2} \qquad (24)$$

Аналогічно запишемо похідну функції Лагранжа по δ_3 :

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_3} = m_3\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + 2m_3a_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha + m_3\dot{y}\dot{\alpha}\sin\alpha + m_3\dot{\alpha}^2\delta_3 - C_{32}\delta_3 \qquad (25)$$

і по $\dot{\delta}_3$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_3} = m_3\dot{x}\sin\alpha + m_3a_3\alpha - 2m_3a_3\dot{\alpha}\cos^2\alpha + m_3\dot{\delta}_3 - m_3\dot{y}\cos\alpha \qquad (26)$$

Шосте рівняння руху :

$$\begin{aligned} &m_3\ddot{x}\sin\alpha + m_3a_3\ddot{\alpha} + 2m_3a_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha - \\ &- 2m_3a_3\ddot{\alpha}\cos^2\alpha + m_3\ddot{\delta}_3 - m_3\ddot{y}\cos\alpha - \\ &- m_3\dot{\alpha}^2\delta_3 + C_{32}\delta_3 = F_{s3} \end{aligned} \qquad (27)$$

Похідна функції Лагранжа по x дорівнює нулю, а по $\dot{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = &m_T\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{y}^2 + m_2\dot{x} - m_2a_2\dot{\alpha}\sin\alpha + \\ &+ m_2\dot{\delta}_2a\sin\alpha + m_2\delta_2\dot{\alpha}\cos\alpha + m_3\dot{x} + \\ &+ m_3a_3\dot{\alpha}\sin\alpha + m_3\dot{\delta}_3\sin\alpha + m_3\delta_3\dot{\alpha}\cos\alpha \end{aligned} \qquad (28)$$

Отже, сьоме диференційне рівняння руху можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &m_T\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{x}}\dot{y}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{y}\ddot{y} + m_2\ddot{x} - m_2a_2\dot{\alpha}^2\cos\alpha - m_2a_2\ddot{\alpha}\sin\alpha + \\ &+ m_2\ddot{\delta}_2\sin\alpha + 2m_2\dot{\delta}_2\dot{\alpha}\cos\alpha - m_2\delta_2\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_2\delta_2\ddot{\alpha}\cos\alpha + m_3\ddot{x} + m_3a_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \\ &+ m_3a_3\ddot{\alpha}\sin\alpha + m_3\ddot{\delta}_3\sin\alpha + 2m_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\cos\alpha - m_3\delta_3\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_3\delta_3\ddot{\alpha}\cos\alpha = \\ &= \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\cos\alpha - F_{r1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\sin(\alpha - \beta_1) + F_{s0}\sin\alpha \end{aligned} \qquad (29)$$

Похідна функції Лагранжа по y, як і по x, дорівнює нулю. Похідна по $\dot{y}$ записується так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = &m_T\dot{y} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{y}^2 + m_2\dot{y} + m_2a_2\dot{\alpha}\cos\alpha - \\ &- m_2\dot{\delta}_2\cos\alpha + m_2\delta_2\dot{\alpha}\sin\alpha + m_3\dot{y} + \\ &+ m_3a_3\dot{\alpha}\cos\alpha - m_3\dot{\delta}_3\cos\alpha + m_3\delta_3\dot{\alpha}\sin\alpha \end{aligned} \qquad (30)$$

Відповідно, останнє восьме диференційне рівняння руху буде таким:

$$\begin{aligned} &m_T\ddot{y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{y}}\dot{x}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{y}}\dot{y}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{y}\ddot{y} + \\ &+ m_2\ddot{y} - m_2a_2\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_2a_2\ddot{\alpha}\cos\alpha - \\ &- m_2\ddot{\delta}_2\cos\alpha + 2m_2\dot{\delta}_2\dot{\alpha}\sin\alpha + m_2\delta_2\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \\ &+ m_2\delta_2\ddot{\alpha}\sin\alpha + m_3\ddot{y} - m_3a_3\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \\ &+ m_3a_3\ddot{\alpha}\cos\alpha - m_3\ddot{\delta}_3\cos\alpha + 2m_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\sin\alpha + \\ &+ m_3\delta_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha + m_3\delta_3\ddot{\alpha}\sin\alpha = \\ &= \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\sin\alpha - \\ &- F_{r1}\sin(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s0}\cos\alpha \end{aligned} \qquad (31)$$

Отже, застосовуючи функцію Лагранжа і рівняння Лагранжа було отримано усі вісім диференційних рівнянь руху для приведеної системи.

Запишемо повну систему диференційних рівнянь руху МТА:

$$\begin{aligned} &- 2m_3a_3\dot{\alpha}^2\delta_3 + 4m_3a_3\delta_3\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + 4m_3a_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + \\ &+ m_2a_2^2\ddot{\alpha} + m_3a_3\ddot{x}\sin\alpha + m_3a_3\ddot{\delta}_3 + m_2\delta_2^2\ddot{\alpha} + \\ &+ m_3a_3^2\ddot{\alpha} + m_3\delta_3^2\ddot{\alpha} + m_3a_3\ddot{y}\cos\alpha + I_3\ddot{\beta}_3 - m_2a_2\ddot{\delta}_2 + \\ &+ m_3\ddot{x}\delta_3\cos\alpha + 4m_3a_3\ddot{\alpha}\delta_3\sin\alpha\cos\alpha - m_2a_2\ddot{x}\sin\alpha + \\ &+ I_2\ddot{\alpha} - I_1\ddot{\beta}_1 - 2m_3a_3\ddot{\delta}_3\cos^2\alpha + m_3\ddot{y}\delta_3\sin\alpha + I_1\ddot{\alpha} + \\ &+ 2m_3\delta_3\dot{\alpha}\dot{\delta}_3 + I_0\ddot{\alpha} + m_2a_2\ddot{y}\cos\alpha + m_2\ddot{x}\delta_2\cos\alpha - \\ &- I_2\ddot{\beta}_2 + m_2\ddot{y}\delta_2\sin\alpha + I_3\ddot{\alpha} + 2m_2\delta_2\dot{\alpha}\dot{\delta}_2 = \\ &= F_{s0}a_0 - F_{s1}a_1\cos\beta_1 + F_{r1}a_1\sin\beta_1 \end{aligned} \qquad (32)$$

$$- I_1\ddot{\alpha} + I_1\ddot{\beta}_1 + C_{11}\beta_1 = M_{t1} \qquad (33)$$

$$- I_2\ddot{\alpha} + I_2\ddot{\beta}_2 + C_{21}\beta_2 = M_b + M_{t2} \qquad (34)$$

$$I_3\ddot{\alpha} + I_3\ddot{\beta}_3 + C_{31}\beta_3 = M_{t3} \qquad (35)$$

$$m_2\ddot{x}\sin\alpha - m_2a_2\ddot{\alpha} + m_2\ddot{\delta}_2 - m_2\ddot{y}\cos\alpha - m_2\dot{\alpha}^2\delta_2 + C_{22}\delta_2 = F_{s2} \qquad (36)$$

$$\begin{aligned} &m_3\ddot{x}\sin\alpha + m_3a_3\ddot{\alpha} + 2m_3a_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha - \\ &- 2m_3a_3\ddot{\alpha}\cos^2\alpha + m_3\ddot{\delta}_3 - m_3\ddot{y}\cos\alpha - \\ &- m_3\dot{\alpha}^2\delta_3 + C_{32}\delta_3 = F_{s3} \end{aligned} \qquad (37)$$

$$\begin{aligned} &m_T\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{x}}\dot{x}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{x}}\dot{y}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{x}}\dot{y}\ddot{y} + \\ &+ m_2\ddot{x} - m_2a_2\dot{\alpha}^2\cos\alpha - m_2a_2\ddot{\alpha}\sin\alpha + \\ &+ m_2\ddot{\delta}_2\sin\alpha + 2m_2\dot{\delta}_2\dot{\alpha}\cos\alpha - m_2\delta_2\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \\ &+ m_2\delta_2\ddot{\alpha}\cos\alpha + m_3\ddot{x} + m_3a_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \\ &+ m_3a_3\ddot{\alpha}\sin\alpha + m_3\ddot{\delta}_3\sin\alpha + 2m_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\cos\alpha - \\ &- m_3\delta_3\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_3\delta_3\ddot{\alpha}\cos\alpha = \\ &= \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\cos\alpha - \\ &- F_{r1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\sin(\alpha - \beta_1) + F_{s0}\sin\alpha \end{aligned} \qquad (38)$$

$$\begin{aligned} &m_T\ddot{y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{y}}\dot{x}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{m}_T}{\partial \dot{y}}\dot{y}^2 + \frac{\partial m_T}{\partial \dot{y}}\dot{y}\ddot{y} + \\ &+ m_2\ddot{y} - m_2a_2\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_2a_2\ddot{\alpha}\cos\alpha - \\ &- m_2\ddot{\delta}_2\cos\alpha + 2m_2\dot{\delta}_2\dot{\alpha}\sin\alpha + m_2\delta_2\dot{\alpha}^2\cos\alpha + \\ &+ m_2\delta_2\ddot{\alpha}\sin\alpha + m_3\ddot{y} - m_3a_3\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \\ &+ m_3a_3\ddot{\alpha}\cos\alpha - m_3\ddot{\delta}_3\cos\alpha + 2m_3\dot{\delta}_3\dot{\alpha}\sin\alpha + \\ &+ m_3\delta_3\dot{\alpha}^2\cos\alpha + m_3\delta_3\ddot{\alpha}\sin\alpha = \\ &= \left(F_T - F_b - F_{g2} - F_{r2} - F_{r3}\right)\sin\alpha - \\ &- F_{r1}\sin(\alpha - \beta_1) - F_{s1}\cos(\alpha - \beta_1) - F_{s0}\cos\alpha \end{aligned} \qquad (39)$$

Висновки. Система диференційних рівнянь (32)-(39) є нелінійною, оскільки нелінійні усі її рівняння за виключенням (33)-(35). Обчислити значення функцій (залежностей узагальнених координат від часу), тобто проінтегрувати систему диференційних рівнянь, аналітично не представляється можливим. Маловірогідним буде і використання функцій Ляпунова [5] для оцінки стійкості руху не виконуючи інтегрування системи диференційних рівнянь руху. Отже, найбільш відповідним підходом в рішенні поставленої задачі буде використання чисельних методів.

Список використаної літератури:

1. Авдеев В. М. Устойчивость и управляемость движения колесного шарнирно-сочлененного трактора по грунту в составе сельскохозяйственного агрегата: автореф. дисс. на соискание науч. степени канд. техн. наук: спец. 05.05.03 / В. М. Авдеев. – Харьков, 1985. – 22 с.

2. Антощенков Р. В. Підвищення ефективної експлуатації комбінованих грунтообробно-посівних агрегатів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.05.11 «Машини і засоби механізації с.-г. виробництва» / Антощенков Роман Викторович. – Харків, 2010. – 21 с.

3. Артьомов Н. П. Повышение устойчивости движения пахотного агрегата при изменении технических параметров системы управления: дисс. кандидата техн. наук: 05.05.11 «Машины и средства механизации с.-х. производства» / Артьомов Николай Прокофьевич. – Харьков, 2006. – 179 с.

4. Гячев Л. В. Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов / Л. В. Гячев. – М.: Машиностроение, 1981. – 206 с.

5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения: собрание сочинений в 6 томах / А. М. Ляпунов. – М., 1956. – Т. 2. – 475 с.

6. Рославцев А. В. Экспериментальные исследования устойчивости движения и управляемости многозвенных машинно-тракторных агрегатов / А. В. Рославцев // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1994. – №1. – С. 10-11.

Ярошенко П. Н. Дифференциальные уравнения движения комбинированного МТА

В статье рассмотрен вопрос математического моделирования движения комбинированного машинно-тракторного агрегата (МТА) в результате которого было получено восемь дифференциальных уравнений, которые дадут возможность оценить параметры движения агрегата.

Ключевые слова*-комбинированный агрегат, дифференциальное уравнение, уравнение Лагранжа, кинетическая энергия, потенциальная энергия, обобщенные координаты.*

Yaroshenko P. Differential equalizations of ruh combined MTA

The difficult mechanical systems to that belongs MTA are the resilient systems with the endless number of degrees of liberty. The study of motion of such resilient semilongwalls is related to large difficulties. Technical practice produced many different receptions constructions of the simplified charts, that is used for an analysis. One of such receptions, especially widely used in an engineer, replacement of the real difficult system the equivalent brought system over is with the eventual number of degrees of liberty. This reception it is expedient to use and in this case.

Analysing the publications of the last years drawn conclusion that researchers for description of motion of difficult aggregates were use equalizations of Lagrange the second family. However researchers used the front hand up system of tractor in the aggregates. The aim of this article is a design of motion of the combined aggregate with the use of front hand up by means of the system of differential equalizations.

In the complement of MTA enter the energysaturated tractor as KTP-121, front and back hanging agricultural machines. Will examine motion of MTA in two measuring, considering that vertical forces and moving do not render large influence on motion on the whole. Position of tractor is fully determined by the coordinates of centre-of-mass (in two measuring) and corner of turn of longitudinal axis of tractor in relation to the axis ***x****. Except it, direction of motion determines the corner of turn of the guided wheels. For the design of sharp increase of casual resistances by the hanging machines of aggregate, it is necessary also to assume the angular and transversal moving of hanging machines. The longitudinal moving of hanging machines in relation to a tractor are considered very small. Chart of motion of MTA, at the account of the above enumerated factors, presented. Deformations of elements that bind a tractor to the hanging machines, for evidentness not indicated.*

The got system of differential equalizations is nonlinear, as all her equalizations are nonlinear after an exception three. To calculate the value of functions (dependences of the generalized coordinates on time), id est integrate the system of differential equalizations, analytically is not possible. Improbable will be and the use functions Ljapunova for the estimation of firmness motion not executing integration the system of differential equalizations of motion. Thus, the most corresponding approach in the decision of the put task will be the use numeral methods.

Keywords *– the combined aggregate, differential equalization, equalization of Lagrange, kinetic energy, potential energy, generalized coordinates.*

Стаття надійшла в редакцію: 15.04.2015р.
Рецензент: д.т.н., проф. Ревенко І.І.