Работа шпиндельного узла осуществляется при оптимальных технических параметрах, управляемых со стороны электронно-вычислительной машиной, позволяет получить повышенную параметрическую надежность узла, а следовательно использовать в составе гибкого автоматизированного производства. Шпиндельные узлы данного типа открывают новые перспективы при проектировании прецизионных станков 4-гопоколения, являются составными элементами станков, оснащенных системой адаптивного программного управления.

Ключевые слова:*прецизионный станок, шпиндельный узел, технологические системы станков, сверхтвердые материалы, адаптивная производственная система, оптимальные технические параметры.*

Bondarev S., Rebriy A., Rybenko I., Ryasna O. Conceptual directions precision machine tool design

Cylinder units of this type opens new perspectives in the design of precision machine tools 4th generation, is an integral element of machine tools rigging system adaptive program control (APC), have a high resistance to external influences, both the cutting forces and elements of the machine. Work spindle unit carried out under optimal technical parameters controlled by the electron computer, allows to obtain high reliability parametric node, and thus used as part of a flexible automated production. Spindle unit is designed for surface treatment lezviynoyi rotation pieces as metal and made of cast iron. This unit is designed for finishing operations and can be used for processing workpieces cutters from superhard materials. The peculiarity of this spindle unit is that it can reach a speed of 10,000 rev / min and more, dazvolyaye use superhard materials from natural and synthetic diamonds Heksonitu, ELBOR-R, Bilboru and others. In order to structurally increase speed away as the reference, may be used such as aerostatic bearings.

It should also be emphasized feature of the given design for increased reliability of the design. The system automatically allows you to create systemic gaps in pishypnykah sliding, thus maintaining the necessary rigidity of the system "machine - tool – workpiece" which allows no masters - nalahodzhuvalnykiv operate the system throughout the life cycle.

The system can also be from the very beginning to put in the best relative position relative to longitudinal axis of symmetry of the cutting tool, which allows not take into account the thermal "dreyfuvannya" front and tailstock relatively Machine cutting tools.

The above features make it possible to virtually eliminate the probability of marriage when processing workpieces to finishing operations.

Keywords: *precision machine spindle, technological systems of machine tools, superhard materials, adaptive manufacturing system, the optimal technical parameters.*

Стаття надійшла в редакцію 4.05.2015р.
Рецензент: д.т.н., професор Тарельник В.Б.

УДК 531.32

ТЕОРІЯ СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ НА ПЛОЩИНІ. АБСОЛЮТНЕ ПРИСКОРЕННЯ. ЗАДАЧІ НА ДИНАМІКУ ТОЧКИ

С. Ф. Пилипака, д.т.н, професор, Національний університет біоресурсів і природокористування України

А. В. Чепіжний, Сумський національний аграрний університет

Розглянуто складний рух точки, відносне переміщення якої відбувається в рухомому триграннику кривої, заданої натуральними рівняннями. Переносний рух тригранника визначається диференціальними характеристиками кривої. Доведена правомірність використання формул Френе для знаходження абсолютного прискорення точки в проекціях на орти рухомого тригранника. Розв'язано задачі на динаміку матеріальної точки, здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: *тригранник, крива, матеріальна точка, прискорення Коріоліса, система координат, швидкість руху, абсолютне прискорення.*

Постановка проблеми. Теорія складного руху матеріальної точки має чітку завершену форму і наведена в усіх підручниках із теоретичної механіки. Однак застосування супровідного тригранника Френе певної кривої (траєкторії переносного руху), у якому здійснює відносний рух матеріальна точка, дає можливість знаходити кінематичні параметри руху з використанням широко відомих в диференціальній геометрії формул Френе. У цьому випадку змінним параметром служить не час руху t, як загальноприйнято в класичній теоретичній механіці, а дугова координата s – довжина дуги траєкторії переносного руху. Більш широко постановка проблеми розглянута в праці [1].

Аналіз останніх досліджень. Натураль-

ний або природній спосіб задання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії для простого руху точки загальновідомий. Відомі приклади із застосуванням тригранника і формул Френе при розгляді руху твердого тіла в його системі, наприклад, літака [2]. В [3] розглянуто кінематику супровідного тригранника гвинтової лінії. Між тим, як показано в працях [1, 4], тригранник і формули Френе можна успішно використовувати в задачах кінематики і динаміки складного руху матеріальної точки.

Формування цілей статті. Показати доцільність застосування супровідного тригранника кривої і формул Френе в теорії складного руху матеріальної точки на площині.

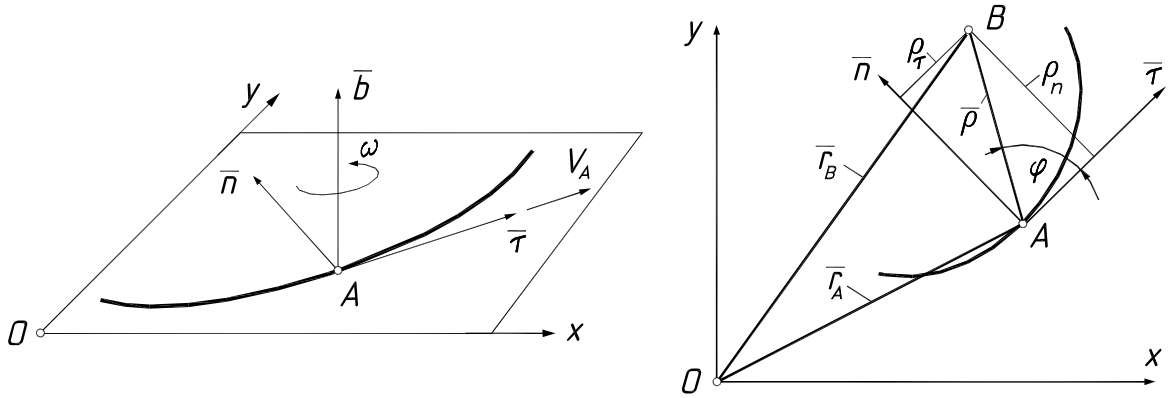
Виклад основного матеріалу досліджень. Розглянемо плоску криву, вздовж якої у напрямі зростання дугової координати s рухається супровідний (натуральний) тригранник Френе. Два одиничні орти (дотична $\bar{\tau}$ і головна нормаль $\bar{n}$) знаходяться в площині кривої, а третій орт – бінормаль $\bar{b}$ – перпендикулярний до неї (рис. 1,а). В стичній площині супровідного тригранника по відношенню до ортів $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ точка *B* здійснює відносний рух, а по відношенню до нерухомої системи координат *Oxy* – складний. В праці [1] показано, що положення точки *B* в системі тригранника у векторній формі запишеться:

$$\overline{R_B} = \overline{r_A} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n, \qquad (1)$$

де $\overline{r_A}$ – радіус-вектор початку координат тригранника;

ρ_τ і ρ_n - проекції радіус-вектора ρ на одиничні орти тригранника $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ (рис.1,б). Якщо перейти до полярної системи координат і положення точки *B* задавати відстанню ρ і кутом φ, відлік якого починається від орта $\bar{\tau}$, то рівняння (1) набуває вигляду:

$$\overline{R_B} = \bar{r}_A + \bar{\tau}\rho\cos\varphi + \bar{n}\rho\sin\varphi. \qquad (2)$$



а б

Рис. 1. Супровідний тригранник Френе кривої:
а) наглядне зображення тригранника Френе в точці А плоскої кривої;
б) вигляд зверху на тригранник Френе в нерухомій системі координат.

Зауважимо, що проекції ρ_τ і ρ_n в (1), а також ρ і φ в (2) є функціями дугової координати s траєкторії переносного руху, що обґрунтовано в праці [1]. Там також показано, що із застосуванням формул Френе можна дуже просто одержати вираз для абсолютної швидкості точки *B* в проекціях на орти супровідного тригранника. Для виразів (1) і (2) вона відповідно запишеться:

$$\overline{v_B} = v_A\left[\bar{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \bar{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)\right]. \qquad (3)$$

$$\overline{v_B} = v_A\left\{\bar{\tau}\left[1 + \rho'\cos\varphi - \rho(k + \varphi')\sin\varphi\right] + \bar{n}\left[\rho'\sin\varphi + \rho(k + \varphi')\cos\varphi\right]\right\}, \qquad (4)$$

де v_A – швидкість руху вершини *A* тригранника по кривій.

Знайдемо абсолютне прискорення точки *B* за класичною теорією складного руху. Воно визначається сумою трьох векторів:

$$\overline{w_B} = \overline{w_e} + \overline{w_r} + 2\bar{\omega} \times \overline{v_r}, \qquad (5)$$

Перший вектор із (5) носить назву переносного прискорення і визначається за формулою [[5], стор. 208, формула (13.17)]:

$$\overline{w_e} = \overline{w_A} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}), \qquad (6)$$

де $\bar{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення.

Знайдемо вирази для всіх складових (6) та їх суму. Перший вектор $\overline{W_A}$ прискорення початку координат тригранника знайдемо диференціюванням відповідної швидкості, при цьому від параметра часу t переходимо до дугової координати s:

$$\overline{w_A} = \frac{d\overline{v_A}}{dt} = \frac{d\overline{v_A}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v_A\frac{d\overline{v_A}}{ds} = v_A\frac{d}{ds}\left(v_A\bar{\tau}\right) = v_A\left(\frac{dv_A}{ds}\bar{\tau} + v_A\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right). \qquad (7)$$

Вираз в (7) $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ є однією із відомих в диференціальній геометрії формул Френе, які мають кінематичну інтерпретацію [6]. Для плоскої кривої, у якої скрут рівний нулю, вони запишуться:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=k\bar{n};\ \frac{d\bar{n}}{ds}=-k\bar{\tau};\qquad \frac{d\bar{b}}{ds}=0, \tag{8}$$

де *k=k(s)* - кривина кривої в поточній точці *A*.

Із врахуванням (8) вираз (7) запишеться:

$$\overline{w_A}=v_A\cdot v'_A\cdot\bar{\tau}+v_A^2\cdot k\cdot\bar{n}. \tag{9}$$

У випадку, коли $v_A=const$ прискорення вершини тригранника матиме одну складову, спрямовану по головній нормалі $\bar{n}$, а його модуль матиме значення $v_A^2\cdot k$ або v_A^2/r, оскільки $k=1/r$, де r – радіус кривини кривої. Це відоме так зване нормальне прискорення. Якщо ж швидкість руху тригранника змінна, то виникає ще одна складова, спрямована по дотичній – тангенціальне прискорення. Отже, вираз (9) є відомою формулою для визначення прискорення руху точки по кривій, в якій замість змінної часу служить дугова координата s.

До другої складової (6) входить вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$. Для його визначення продиференціюємо вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$. В [1] знайдено величину $\omega:\omega=v_A\cdot k$. Оскільки він спрямований по бінормалі $\bar{b}$, то диференціювання дає:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\frac{d\bar{\omega}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v_A\frac{d\bar{\omega}}{ds}=v_A\frac{d}{ds}\left(\bar{b}\cdot v_A\cdot k\right)=v_A\left[\bar{b}'\cdot v_A\cdot k+\bar{b}(v_A\cdot k)'\right]. \tag{10}$$

Із врахуванням формул Френе (8) і після подальшого диференціювання одержимо:

$$\bar{\varepsilon}=\bar{b}\cdot v_A\left(v'_A\cdot k+v_A\cdot k'\right). \tag{11}$$

Тепер знайдемо векторний добуток $\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}$:

$$\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}=\begin{vmatrix}\bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b}\\ 0 & 0 & v_A(v'_A\cdot k+v'_A\cdot k')\\ \rho_\tau & \rho_n & \rho_b\end{vmatrix}= \tag{12}$$

$$=-\bar{\tau}\cdot v_A\cdot\rho_n(v'_A\cdot k+v_A\cdot k')+\bar{n}\cdot v_A\cdot\rho_\tau(v'_A\cdot k+v_A\cdot k').$$

Останню складову у виразі (6) – векторний добуток $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})$ – знаходимо аналогічно. Нижче наводимо готовий результат:

$$\bar{\omega}\times\bar{\rho}=-\bar{\tau}\cdot\rho_n\cdot v_A\cdot k+\bar{n}\cdot\rho_\tau\cdot v_A\cdot k. \tag{13}$$

$$\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})=-\bar{\tau}\cdot v_A^2\cdot k^2\cdot\rho_\tau-\bar{n}\cdot v_A^2\cdot k^2\cdot\rho_n. \tag{14}$$

Підставивши вектори (9), (12) і (14) в (6), після групування членів по відповідних напрямках ортів одержимо вектор переносного прискорення:

$$\overline{w_e}=\bar{\tau}v_A\left[v'_A-\rho_n(v'_Ak+v_Ak')-v_Ak^2\rho_\tau\right]+\bar{n}v_A\left[v_Ak+\rho_\tau(v'_Ak+v_Ak')-v_Ak^2\rho_n\right]. \tag{15}$$

Наступна складова у формулі (5) носить назву відносного прискорення, тобто це є прискорення точки *B* по відношенню до системи тригранника Френе. Його ми одержимо диференціюванням виразу відносної швидкості. Саму ж відносну швидкість v_r одержимо, як похідну радіус-вектора $\bar{\rho}$ в системі супровідного тригранника:

$$\overline{v_r}=\frac{d\bar{\rho}}{dt}=\frac{d\bar{\rho}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v_A\frac{d\bar{\rho}}{ds}. \tag{16}$$

Після диференціювання виразу (16) одержимо:

$$\overline{w_r}=\frac{d}{dt}\left(v_A\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right)=\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d}{ds}\left(v_A\frac{d\bar{\rho}}{ds}\right)=v_A(v'_A\bar{\rho}'+v_A\bar{\rho}''). \tag{17}$$

Розклавши вектор (17) по напрямках ортів тригранника, одержимо:

$$\overline{w_r}=v_A\left[\bar{\tau}(v'_A\rho'_\tau+v_A\rho''_\tau)+\bar{n}(v'_A\rho'_n+v_A\rho''_n)\right]. \tag{18}$$

Нарешті третій, останній вектор із (5), носить назву коріолісового прискорення. Його знаходимо, як подвоєний векторний добуток векторів кутової швидкості $\bar{\omega}=\bar{b}\cdot v_A\cdot k$ і відносної швидкості v_r (16):

$$2\bar{\omega}\times\overline{v_r}=\begin{vmatrix}\bar{\tau} & \bar{n} & \bar{b}\\ 0 & 0 & v_Ak\\ v_A\rho'_\tau & v_A\rho'_n & 0\end{vmatrix}=2v_A^2k(-\bar{\tau}\rho'_n+\bar{n}\rho'_\tau). \tag{19}$$

Підставивши (15), (18) і (19) в (5) і згрупувавши складові векторів за напрямками ортів тригранника, остаточно одержимо вираз для абсолютного прискорення точки *B*:

$$\begin{aligned}\overline{w_B}=\bar{\tau}v_A&\left[v'_A(1-k\rho_n+\rho'_\tau)+v_A(\rho''_\tau-k'\rho_n-k^2\rho_\tau-2k\rho'_n)\right]+\\ &+\bar{n}v_A\left[v'_A(k\rho_\tau+\rho'_n)+v_A(\rho''_n-k'\rho_\tau-k^2\rho_n+k+2k\rho'_\tau)\right].\end{aligned} \tag{20}$$

За формулою (20) можна знайти абсолютне прискорення точки *B* у складному русі, якщо відомий закон її руху у стичній площині тригранника $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$, $\rho_n=\rho_n(s)$, а сам тригранник рухається із заданою швидкістю $v_A=v_A(s)$ вздовж плоскої кривої із відомим натуральним рівнянням *k=k(s)*. Слід підкреслити, що абсолютне прискорення ми одержуємо в проекціях на осі рухомого супровідного тригранника кривої.

Знайдемо формулу абсолютного прискорення точки *B*, коли її рух задано рівнянням (2), тобто:

$$\rho_\tau=\rho\cos\varphi;\qquad \rho_n=\rho\sin\varphi. \tag{21}$$

Диференціюємо двічі (21):

$$\begin{aligned}
&\rho'_\tau = \rho'\cos\varphi - \rho\varphi'\sin\varphi;\\
&\rho'_n = \rho'\sin\varphi + \rho\varphi'\cos\varphi;\\
&\rho''_\tau = \left(\rho'' - \rho\varphi'^2\right)\cos\varphi - \left(2\rho'\varphi' + \rho\varphi''\right)\sin\varphi;\\
&\rho''_n = \left(\rho'' - \rho\varphi'^2\right)\sin\varphi + \left(2\rho'\varphi' + \rho\varphi''\right)\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Підстановкою (22) у (20) одержуємо вираз для знаходження абсолютного прискорення точки *B* у випадку, коли її відносний рух заданий відстанню $\rho = \rho(s)$ і кутом $\varphi = \varphi(s)$:

$$\begin{aligned}
\overline{w}_B &= \overline{\tau} v_A \{ v'_A [1 + \rho'\cos\varphi - \rho(k+\varphi')\sin\varphi] +\\
&+ v_A \left[\rho'' - \rho(k+\varphi')^2\right]\cos\varphi - \left[2\rho'(k+\varphi') + k'\rho + \rho\varphi''\right]\sin\varphi \} +\\
&+ \overline{m} v_A \{ v'_A [\rho'\sin\varphi + \rho(k+\varphi')\cos\varphi] +\\
&+ v_A \left[\rho'' - \rho(k+\varphi')^2\right]\sin\varphi + \left[2\rho'(k+\varphi') + k'\rho + \rho\varphi''\right]\cos\varphi + k \}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Модуль вектора абсолютного прискорення точки *B* (20), (23) визначається, як геометрична сума його проекцій на орти $\overline{\tau}$ і $\overline{n}$:

$$w_B = \sqrt{\overline{w}_{B\tau}^{\,2} + \overline{w}_{Bn}^{\,2}}. \tag{24}$$

Формули (20), (23) для знаходження абсолютного прискорення одержані методами класичної теорії із знаходженням кожної складової: переносного прискорення, відносного прискорення і прискорення Коріоліса.

А тепер покажемо, як просто ці формули отримати за допомогою формул Френе, не вдаючися до знаходження кожної окремої складової абсолютного прискорення. В цьому полягає ціль статті, доведення суті якої і оцінки її є нашою задачею.

Знаходження вектора абсолютного прискорення точки *B* здійснюється диференціюванням виразів (3) або (4) абсолютної швидкості, так як ми це робимо при звичайному русі. Щоправда, диференціюємо при цьому по дуговій координаті s, оскільки вирази (3), (4) є її функціями. Диференціювання, наприклад, виразу (3) розпишемо детально із використанням формул Френе (8):

$$\begin{aligned}
\overline{v_B}' &= v'_A\left[\overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)\right] + v_A\left[\overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)\right]' =\\
&= v'_A\left[\overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)\right] +\\
&+ v_A\left[\overline{\tau}'(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau)' + \overline{n}'(k\rho_\tau + \rho'_n) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)'\right] =\\
&= v'_A\left[\overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n)\right] + v_A\left[\overline{n}k(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) +\right.\\
&\left.+ \overline{\tau}(-k'\rho_n - k\rho'_n + \rho''_\tau) - \overline{\tau}k(k\rho_\tau + \rho'_n) + \overline{n}(k'\rho_\tau + k\rho'_\tau + \rho''_n)\right].
\end{aligned} \tag{25}$$

Групуючи у виразі (25) складові за напрямками ортів $\overline{\tau}$ і $\overline{n}$, одержимо:

$$\begin{aligned}
\overline{v_B}' &= \overline{\tau}\left[v'_A(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + v_A(\rho''_\tau - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho'_n)\right] +\\
&+ \overline{n}\left[v'_A(k\rho_\tau + \rho'_n) + v_A(\rho''_n + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + k + 2k\rho'_\tau)\right].
\end{aligned} \tag{26}$$

Порівнюючи вирази (20) і (26) бачимо, що вони відрізняються тільки множником v_A. Це і зрозуміло, оскільки вираз (3) ми диференціювали по дуговій координаті s. При диференціюванні по часу t, як це потрібно робити для знаходження прискорення, ми одержимо:

$$\overline{w}_B = \frac{d\overline{v}_B}{dt} = \frac{d\overline{v}_B}{ds}\frac{ds}{dt} = v_A\frac{d\overline{v}_B}{ds}, \tag{27}$$

тобто із виразу (27) видно, що одержаний результат (26) потрібно помножити на швидкість v_A. Після цього вираз (26) буде аналогічний виразу (20). Таким же шляхом диференціювання виразу (4) можна одержати вираз (23).

Отже ми показали, як просто знаходити вектор абсолютного прискорення точки *B* у складному русі із застосуванням супровідного тригранника переносної траєкторії і формул Френе. Одержаний результат можна сформулювати у вигляді наступного правила:

Якщо точка в системі рухомого супровідного тригранника кривої задана радіус-вектором у формі (1), то для знаходження її абсолютного прискорення в проекціях на орти цього ж тригранника необхідно продиференціювати вираз абсолютної швидкості (3) по дуговій координаті s із застосуванням формул Френе і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника по кривій.

Таким чином, при користуванні наведеним правилом відпадає потреба знаходження кожної складової абсолютного прискорення за формулою (3) із наступними громіздкими обчисленнями вектора кожної складової. Достатньо скласти рівняння траєкторії відносного руху в системі супровідного тригранника у формі (1) або (2) і потім двічі поступово продиференціювати із застосуванням формул Френе (8). Після першого диференціювання по дуговій координаті s отриманий вектор в проекціях на орти супровідного тригранника потрібно помножити на швидкість v_A руху тригранника по кривій, після чого отримаємо вектор абсолютної швидкості. Отриманий вектор ще раз диференціюємо по параметру s і одержаний вектор множимо на v_A. Після цього ми маємо вектор абсолютного прискорення в проекціях на орти супровідного тригранника. Якщо $v_A = const$, тобто швидкість переносного

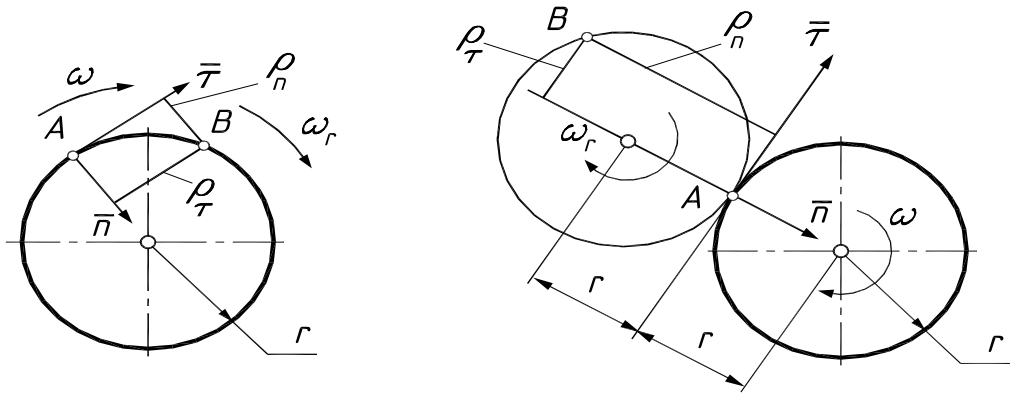
руху незалежна від параметра s, то в такому випадку можна поступити простіше: двічі продиференціювати рівняння відносного руху (1) або (2) по параметру s, після чого перший вектор помножити на v_A, а другий – на v_A^2. Одержані вектори будуть відповідно вектором абсолютної швидкості і вектором абсолютного прискорення.

Розглянемо практичне застосування одержаних теоретичних результатів.

Приклад 1. Візьмемо відому задачу із курсу теоретичної механіки (задача 13.3 на стор. 211 в підручнику [5]). По ободу диска радіуса r, що обертається із постійною кутовою швидкістю ω, рухається точка *B* з постійною за модулем відносною швидкістю v_r (рис.2,а). Знайти абсолютне прискорення точки *B*.

В підручнику наведена відповідь для випадку, коли кутова швидкість переносного руху ω і відносного ω_r мають однаковий напрям:

$$w_B = \omega^2 r + \frac{v_r^2}{r} + 2\omega v_r. \qquad (28)$$



а б

Рис. 2. Відносна траєкторія руху точки *B* по ободу диска радіуса *r*: а) траєкторія переносного руху (коло радіуса *r*) і траєкторія відносного руху (теж коло радіуса *r*) збігаються; б) центр кола - траєкторії відносного руху - розташований на головній нормалі кола - траєкторії переносного руху.

Кожна складова у (28) відповідає формулі (5), причому величину і напрям цих складових визначено шляхом певних міркувань із застосуванням класичної теорії. Спростимо вираз (28), зважаючи на те, що $v_r = r\omega_r$:

$$w_B = r(\omega + \omega_r)^2. \qquad (29)$$

Покажемо, як отримати результат (29) за сформульованим правилом.

Траєкторією відносного руху в триграннику Френе є коло, центр якого розташований на орті $\bar{n}$ на відстані $r = 1/k$ від початку координат (рис.2,а). Отже, його рівняння будуть:

$$\rho_\tau = \frac{1}{k}\cos\alpha;\ \rho_n = \frac{1}{k}\sin\alpha + \frac{1}{k}, \qquad (30)$$

де α - кут повороту точки *B* – змінний параметр. Однак рівняння (30) повинні бути залежними від дугової координати *s*, що є необхідною умовою для застосування формул Френе. Знайдемо кутову швидкість відносного руху ω=*const* диференціюванням кута α із переходом від параметра часу *t* до дугової координати – змінної величини *s*:

$$\omega_r = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v_A\frac{d\alpha}{ds} \quad \text{звідки} \quad \alpha = \frac{\omega_r}{v_A}s. \qquad (31)$$

Перепишемо рівняння (30) із врахуванням (31) і знайдемо їх похідні:

$$\begin{aligned}
&\rho_\tau = \frac{1}{k}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s; && \rho_n = \frac{1}{k}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s + \frac{1}{k};\\
&\rho'_\tau = -\frac{\omega_r}{kv_A}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s; && \rho'_n = \frac{\omega_r}{kv_A}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s;\\
&\rho''_\tau = -\frac{\omega_r^2}{kv_A^2}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s; && \rho''_n = -\frac{\omega_r^2}{kv_A^2}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s.
\end{aligned} \qquad (32)$$

Підставимо (32) в (20), маючи на увазі, що $v'_A = 0;\ k' = 0;\ 1/k = r;\ v_A = r\omega$ і отримаємо:

$$w_B = -\bar{\tau}r(\omega+\omega_r)^2\cos\frac{\omega_r}{v_A}s - \bar{n}r(\omega+\omega_r)^2\sin\frac{\omega_r}{v_A}s. \qquad (33)$$

Знайшовши за формулою (24) модуль вектора (33), бачимо, що він повністю збігається із (29).

Якщо надати дуговій координаті знак «мінус», то кутові швидкості відносного і переносного рухів будуть спрямовані у протилежні сторони. Аналогічні обчислення дадуть знак «мінус» у формулі (29). При однакових по моду-

лю кутових швидкостях абсолютне прискорення буде рівним нулю. Це означає, що обід обертається в одну сторону, а точка на ньому з тією ж кутовою швидкістю обертається в протилежну, в результаті чого точка залишається нерухомою, тобто абсолютна швидкість дорівнює нулю, в чому можна переконатися за допомогою формули (3).

Слід зазначити, що для знаходження вектора абсолютного прискорення не обов'язково користуватися формулою (20). Достатньо записати рівняння відносного руху у формі (1) і послідовно диференціювати його з множенням кожного результату на v_A, про що говорилося раніше.

Розглянутий нами приклад є простий, оскільки і в переносному і у відносному рухах точка рухається по одному і тому ж колі з постійними швидкостями. В результаті і абсолютна швидкість і абсолютне прискорення за модулем теж є сталими величинами. Однак варто ці кола (траєкторії відносного і переносного рухів) розділити, як задача значно ускладнюється при розв'язуванні традиційними методами. Для розглянутого підходу це не має принципового значення. На рис.2,б показано складний рух точки *B*, яка у відносному русі обертається по колу радіуса r, яке в свою чергу теж обертається, причому центр кола відносної траєкторії знаходиться на відстані $-\bar{n}r$ від початку координат супровідного тригранника. Радіуси кіл однакові, кутові швидкості постійні і мають однаковий напрям обертання (в зазначеному підручнику).

Знайдемо вектор абсолютного прискорення розробленим методом. Рівняння відносного руху запишуться:

$$\rho_\tau = \frac{1}{k}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s; \qquad \rho_n = \pm\frac{1}{k}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s - \frac{1}{k}. \tag{34}$$

Знак «+» у другому виразі (34) означає, що напрям обертання відносного руху збігається із напрямом обертання переносного руху, а «-» – що кутові швидкості мають протилежний напрям. Таким чином, є можливість паралельно розглядати два складних рухи точки.

Абсолютну швидкість і прискорення знайдемо диференціюванням виразу (1) із врахуванням (34) без використання формули (20). Оскільки $v_A = \omega\cdot r - const,$ то спочатку продиференціюємо двічі вираз відносного руху із застосуванням формул Френе (8), а потім знайдемо $\bar{v}_B$ і $\bar{w}_B$:

$$\begin{aligned}
\bar{R}'_B &= r'_A + \left(\bar{\tau}\frac{1}{k}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s\right)' \pm \left(\bar{n}\frac{1}{k}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s\right)' - \left(\bar{n}\frac{1}{k}\right)' = \\
&= \bar{\tau} + \frac{1}{k}\left(\bar{\tau}'\cos\frac{\omega_r}{v_A}s - \bar{\tau}\frac{\omega_r}{v_A}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s\right) \pm \frac{1}{k}\left(\bar{n}'\sin\frac{\omega_r}{v_A}s + \bar{n}\frac{\omega_r}{v_A}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s\right) - \frac{1}{k}\bar{n}' = \\
&= \bar{\tau} + \frac{1}{k}\left(\bar{n}k\cos\frac{\omega_r}{v_A}s - \bar{\tau}\frac{\omega_r}{v_A}\sin\frac{\omega_r}{v_A}s\right) \pm \frac{1}{k}\left(-\bar{\tau}k\sin\frac{\omega_r}{v_A}s + \bar{n}\frac{\omega_r}{v_A}\cos\frac{\omega_r}{v_A}s\right) + \frac{1}{k}\bar{\tau}k = \\
&= \bar{\tau}\left[2 - \left(\frac{\omega_r}{kv_A} \pm 1\right)\sin\frac{\omega_r}{v_A}s\right] + \bar{n}\left(1 \pm \frac{\omega_r}{kv_A}\right)\cos\frac{\omega_r}{v_A}s.
\end{aligned} \tag{35}$$

Аналогічно диференціюємо другий раз (наводимо готовий результат):

$$\begin{aligned}
\bar{R}''_B &= -\bar{\tau}\left[\frac{\omega_r}{v_A}\left(\frac{\omega_r}{kv_A} \pm 1\right) + k\left(1 \pm \frac{\omega_r}{kv_A}\right)\right]\cos\frac{\omega_r}{v_A}s + \\
&+ \bar{n}\left\{2k - \left[k\left(\frac{\omega_r}{kv_A} \pm 1\right) + \frac{\omega_r}{v_A}\left(1 \pm \frac{\omega_r}{kv_A}\right)\right]\sin\frac{\omega_r}{v_A}s\right\}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Помножимо вираз (35) на v_A, а вираз (36) на v_A^2 і після підстановки $v_A = \omega r$ і $k = 1/r$ одержимо відповідно вектори абсолютної швидкості і абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_B &= \bar{\tau}\omega r\left[2 - \left(\frac{\omega_r}{\omega} \pm 1\right)\sin\frac{\omega_r}{\omega r}s\right] + \bar{n}\omega r\left(1 \pm \frac{\omega_r}{\omega}\right)\cos\frac{\omega_r}{\omega r}s; \\
\bar{w}_B &= \bar{\tau}\omega^2 r^2\left[\frac{\omega_r}{\omega r}\left(\frac{\omega_r}{\omega} \pm 1\right) + \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right]\cos\frac{\omega_r}{\omega r}s + \\
&+ \bar{n}\omega^2 r^2\left\{\frac{2}{r} - \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\omega_r}{\omega} \pm 1\right) + \frac{\omega_r}{\omega r}\left(1 \pm \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right]\sin\frac{\omega_r}{\omega r}s\right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Результат (37) можна було одержати також за допомогою формули (20).

Аналізуючи вирази (37), можна зробити висновок, що при однакових за величиною і протилежно спрямованих кутових швидкостях ω і ω_r круглі дужки перетворюються в нуль і вектори абсолютної швидкості і прискорення стають сталими за величиною (і за напрямом в системі супровідного тригранника). Знаходження абсолютної траєкторії за формулою (27) [1] дає коло із радіусом, вдвічі більшим, ніж у колах на рис. 2,б.

Приклад 2. Знайти відносну та абсолютну траєкторії матеріальної частинки, яка попадає на горизонтальний диск, що обертається навколо вертикальної осі із заданою кутовою швидкістю ω. Коефіцієнт тертя *f* відомий.

Оскільки задача має відношення до роботи розсіювальних апаратів відцентрового типу, то вона розглянута у монографіях академіків УААН П.М. Василенка [7] і П.М. Заїки [8]. Розв'язання задачі зводиться до інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Їх розв'язок П.М. Василенко шукає наближено у вигляді ймовірних траєкторій, а П.М.

Заїка, окрім наближеного розв'язку, здійснив інтегрування рівнянь чисельними методами, отримавши при цьому відносну траєкторію руху частинки по диску.

Розглянемо розв'язання задачі за допомогою розробленого підходу. Єдиною прикладеною силою в площині диска буде сила тертя *fmg*, де *f* – коефіцієнт тертя, *m* – маса частинки, *g=9,81 м/с²*. Вектор сили тертя буде спрямований в сторону, протилежну вектору відносної швидкості, тобто по дотичній до відносної траєкторії (до траєкторії ковзання частинки по диску).

Розташуємо тригранник із ортами $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ жорстко по відношенню до диска так, щоб його вершина *A* була на відстані r_o від осі обертання, орт $\bar{n}$ був спрямований в радіальному напрямі до осі обертання, а орт $\bar{\tau}$ показував напрям руху вершини тригранника (рис. 3,а). Орт $\bar{b}$ при цьому проекціюється в точку і збігається із вершиною *A*. При обертанні диска вершина *A* опише коло радіуса r_o, отже тригранник $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ можна вважати супровідним тригранником Френе кривої, якою є коло радіуса r_o. При попаданні частинки на диск, який обертається із постійною кутовою швидкістю ω, частинка почне рухатися в системі тригранника за умови, що кутова швидкість буде більша за критичну, тобто $\omega > \sqrt{fg/r_0}$ [8]. Відносний рух частинки почнеться із точки *A* (точки попадання). Через певний час частинка переміститься в нове положення – точку *B*, координати якої можна описати по різному: проекціями на орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ або ж відстанню ρ і кутом φ, як показано на рис. 3,а. Таким чином, при русі вершини *A* тригранника по колу частинка *B* одночасно буде здійснювати відносний рух в системі тригранника, тобто перебуватиме у складному русі.

Для складання рівняння руху у вигляді $m\overline{w_B} = \bar{F}$ потрібно знайти вираз абсолютного прискорення частинки *B*. Оскільки точка *A* – вершина тригранника – обертається із постійною кутовою швидкістю ω і $k=1/r_o$ – *const,* то W_B ми одержимо із (23) при $v_A = k' = 0$.

скільки прикладена сила *F=fmg* діє в напрямі, протилежному відносній швидкості, то потрібно знайти проекції одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії. Його проекції на орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ матимуть таке ж співвідношення, що і складові відносної швидкості ρ'_τ і ρ'_n із (22), тобто:

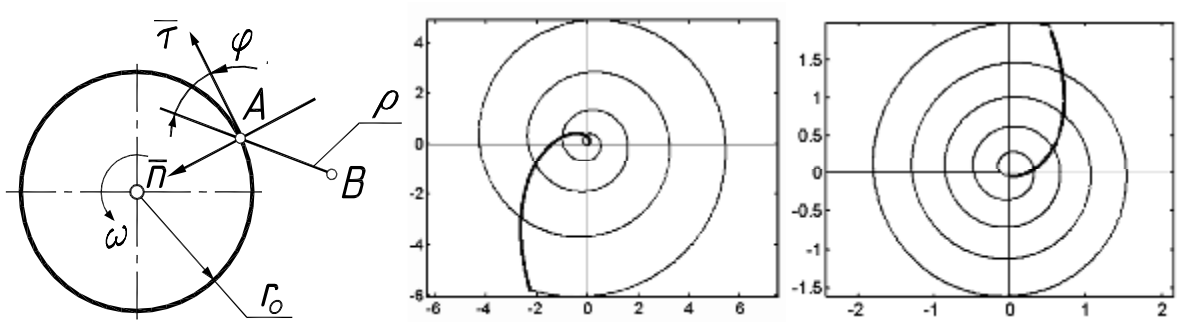
$$\frac{\rho'\cos\varphi - \varphi'\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}} \text{ і } \frac{\rho'\sin\varphi + \varphi'\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}}. \quad (38)$$

Розпишемо векторне рівняння $m\overline{w_B} = \bar{F}$ в проекціях на орти тригранника, взявши до уваги (23) і (38), а також те, що $v_A=\omega r_o=\omega/k$. Після скорочення на масу *m* частинки, одержимо систему двох диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{\omega^2}{k^2}\left\{\left[\rho'' - \rho(k+\varphi')^2\cos\varphi\right] - \left[2\rho'(k+\varphi') + \rho\varphi''\right]\sin\varphi\right\} = -fg\frac{\rho'\cos\varphi - \varphi'\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}}; \\ &\frac{\omega^2}{k^2}\left\{\left[\rho'' - \rho(k+\varphi')^2\sin\varphi\right] + \left[2\rho'(k+\varphi') + \rho\varphi''\right]\cos\varphi + k\right\} = -fg\frac{\rho'\sin\varphi + \varphi'\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Система диференціальних рівнянь (39) руху частинки має громіздкий вигляд. Однак не важко замітити, що вона має певну симетрію: в лівих частинах при $\sin\varphi$і $\cos\varphi$ стоять однакові вирази. Розв'язуючи систему (39) відносно них, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\rho'' - \rho(k+\varphi')^2 = -fg\frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}} - k\sin\varphi; \\ &\rho\varphi'' + 2\rho'(k+\varphi') = -fg\frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\rho\varphi'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2}} - k\cos\varphi. \end{aligned} \quad (40)$$



а б в

Рис.3. До знаходження відносної і абсолютної траєкторій руху частинки, яка рухається по горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі: а) положення частинки *B* в системі тригранника задане відстанню ρі кутом φ (вигляд зверху); б) абсолютна і відносна траєкторії руху частинки при ω*=10 рад/с* і *f=0,3;* в) абсолютна і відносна траєкторії руху частинки при ω*=25 рад/с* і *f=0,3*

Залежності *ρ=ρ(s)* і *φ=φ(s)* як розв'язок системи диференціальних рівнянь (40) є параметричними рівняннями траєкторії відносного руху, а їх підстановка у (30) праці [1] дасть параметричні рівняння абсолютної траєкторії. На жаль, таких залежностей в аналітичному вигляді отримати не

вдається, тому інтегрування системи (40) здійснюємо чисельними методами за допомогою пакета *SimuLink* програмного середовища *MatLab*. Його характерною особливістю є те, що одержані внаслідок чисельного інтегрування залежності *ρ=ρ(s)* і *φ=φ(s)* можна представити графічно, що дає можливість побудувати траєкторію відносного і абсолютного руху, як графіки розв'язку відповідних рівнянь (рис. 3,б,в).

Приклад 3. Вантажний автомобіль із плоским вантажем на кузові рухається із постійною швидкістю v_A по кривій, якою є ланцюгова лінія, задана натуральним рівнянням $k=a/(a^2+s^2)$. В певний момент часу, по мірі зростання кривини кривої, він починає рухатися відносно кузова автомобіля. Знайти відносну і абсолютну траєкторії руху вантажу, а також його швидкість, якщо місцезнаходження його в кузові до початку ковзання і коефіцієнт тертя *f* відомі.

Нехтуючи розмірами вантажу, приймемо його за матеріальну точку, що знаходиться у передньому лівому куту кузова по ходу автомобіля. Цей кут приймаємо за вершину тригранника, який жорстко прив'язаний до кузова, причому орт $\bar{\tau}$ спрямуємо по дотичній до ланцюгової лінії, вздовж якої рухається вказана точка кузова, а орт $\bar{n}$ - в сторону центра кривини кривої. Отже, задача подібна до попередньої з тією різницею, що замість кола в ролі кривої виступає ланцюгова лінія, параметричні рівняння якої після переходу від натурального рівняння до параметричних рівнянь приймають вигляд [1]:

$$x = a\,\mathrm{Arsh}\frac{s}{a}; \qquad y = \sqrt{a^2+s^2}. \tag{41}$$

Ця крива має вісь симетрії, яка проходить через вершину (при *s=0*), у якій кривина найбільша і приймає значення *k=1/a*. При русі тригранника по кривій із постійною швидкістю в напрямі вершини буде рости кривина ланцюгової лінії, отже і відцентрова сила. В такому випадку може наступити момент, коли сила тертя буде подолана і почнеться відносний рух вантажу в системі тригранника (або кузова). Складемо систему диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Вираз абсолютного прискорення одержимо із (20) при $v'_A = 0$. Взявши до уваги, як і в попередній задачі, те, що прикладена сила *F=fmg* діє в напрямі, протилежному відносній швидкості, запишемо:

$$\begin{aligned} v_A^2(\rho''_\tau - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho'_n) &= -fg\cdot\frac{\rho'_\tau}{\sqrt{\rho'^2_\tau+\rho'^2_n}};\\ v_A^2(\rho''_n + k + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\rho'_\tau) &= -fg\cdot\frac{\rho'_n}{\sqrt{\rho'^2_\tau+\rho'^2_n}}, \end{aligned} \tag{42}$$

де $k = \dfrac{a}{a^2+s^2}$; $\qquad k' = -\dfrac{2as}{(a^2+s^2)^2}$.

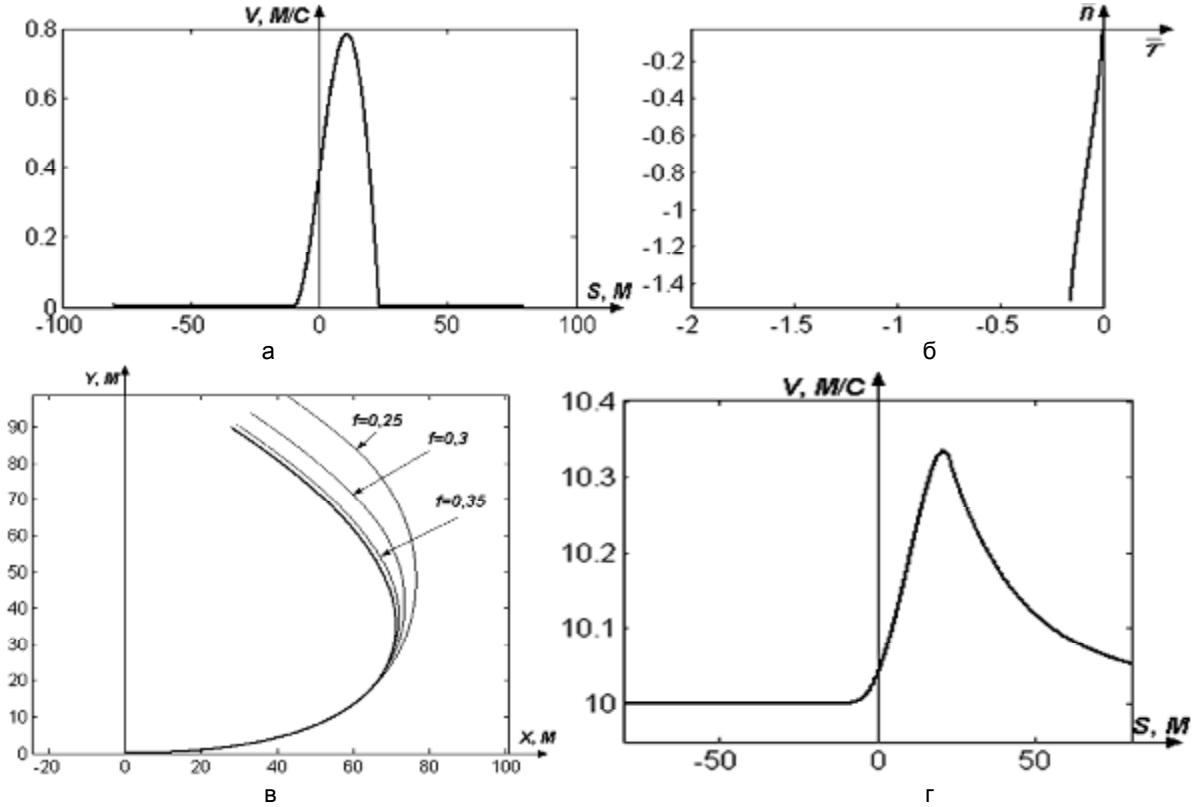


Рис. 4. Графіки залежностей, одержаних в результаті інтегрування системи (42):
а) графік зміни відносної швидкості; б) траєкторія відносного руху в системі тригранника;
в) ланцюгова лінія і абсолютні траєкторії руху (додатково показано при *f=0,3* і*f=0,25*);
г) графік зміни абсолютної швидкості

Графічне представлення результатів чисельного інтегрування системи (42) показано на

рис. 4. Інтегрування здійснювалося при зміні дугової координати *s* від *-80 м* до *80 м*. Значення постійних прийнято: *a=25; f=0,35;* v_A*=10 м/с*. Із рис. 4,а видно, що відносний рух вантажу почався приблизно при *s≈ -10 м* і закінчився при *s≈25 м*, при цьому максимальна відносна швидкість досягла значенняv_r*≈ 0,8 м/с*. Значення дугової координати *s*, при якому почався відносний рух, можна визначити аналітичним шляхом. Відносний рух почнеться тоді, коли відцентрова сила у вершині тригранника (тобто при $\rho_\tau=\rho_n=0$) $F_в = mv_A^2 k$ перевищить силу тертя $F_m=fmg$. Прирівнявши ці сили і підставивши вираз *k=k(s)*, одержимо рівняння із невідомим значенням дугової координати *s*:

$$\frac{m\cdot v_A^2\cdot a}{a^2+s^2}=fmg, \quad \text{звідки} \quad s=\sqrt{\frac{a}{fg}\left(v_A^2-afg\right)}. \qquad (43)$$

Розв'язок рівняння (43) при зазначених постійних показує, що відносний рух вантажу почнеться при *s>-10,15 м*. Пройшовши шлях до симетричної точки при *s=10,15 м*, вантаж продовжує рух по кузові, але уже із сповільненням, оскільки величини відцентрової сили недостатньо для продовження такого руху.

Графік траєкторії відносного руху (рис. 4,б) показує, що вантаж у кузові зміститься приблизно на *1,5 м* в сторону протилежного борта і приблизно на*0,2 м*в сторону, протилежну напряму руху.

Графіки абсолютної траєкторії (рис. 4,в) показують, що для різних коефіцієнтів тертя відносний рух вантажу починається із різних точок ланцюгової лінії. Після припинення відносного руху абсолютною траєкторією вантажу є крива, паралельна ланцюговій лінії.

Із графіка зміни абсолютної швидкості (рис. 4,г) видно, що після припинення відносного руху абсолютна швидкість вантажу буде більшою, ніж була до нього, оскільки займає інше положення в системі тригранника.

Висновки. Застосування супровідного тригранника плоскої кривої як рухомої системи координат, по відношенню до якої здійснюється відносний рух точки, дає можливість швидко і просто знаходити абсолютне прискорення точки у складному русі в проекціях на орти тригранника та розв'язувати задачі на динаміку матеріальної точки в цій же рухомій системі. Розроблений підхід значно спрощує розв'язання задач складного руху точки, що обумовлює його подальший розвиток.

Список використаної літератури:

1. *Пилипака С.Ф.* Теорія складного руху матеріальної точки на площини. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія // Електротехніка і механіка. –К., 2006. -№1. –С. 84-94.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. –М.: ФМ, 1961. -823 с.
3. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. В двух томах –Т. 1: Статика и кинематика. –М.: ГИТТЛ, 1954. -379 с.
4. *Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф.* Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. –Глеваха, 2005. –Вип.89. –С.49-60.
5. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах –Т. 1: Статика и кинематика. -4-е изд., исправл. –М.: Наука, 1985. -240 с.
6. *Пилипака С.Ф.* Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих // Науковий вісник Національного аграрного університету. –К.: НАУ, 1998. –Вип.4. –С. 143-146.
7. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. -К.: УАСХН, 1960. -283 с.
8. *Заика П.М.* Избранные задачи земледельческой механики. –К.: Изд-во УСХА, 1992. –507 с.

Пилипака С.Ф., Чепижный А.В. Теория сложного движения материальной точки на плоскости. Абсолютное ускорение. Задачи на динамику точки

Рассмотрено сложное движение точки, относительное перемещение которой происходит в подвижном трехграннике кривой, заданной натуральными уравнениями. Переносное движение трехгранника определяется дифференциальными характеристиками кривой. Доказана правомочность использования формул Френе для нахождения абсолютного ускорения точки в проекциях на орты подвижного трехгранника. Решены задачи на динамику материальной точки, осуществлено визуализацию полученных результатов.

Ключевые слова: *трехгранник, кривая, материальная точка, ускорение Кориолиса, система координат, скорость движения, абсолютное ускорение.*

Pylypaka S.F. Chepizhnii A.V. The theory of complex motion of a point on the plane. Absolute acceleration. Tasks on the dynamics of points

The complicated driving of a point which relative transition of which happens in mobile three-edge of a curve given by the natural equations is considered. The portable driving of three-edge is determined by differential performances of a curve. Competence of usage of the Frenet's formulas for determination of absolute speed-up of a point in projections to basis vectors of mobile three-edge is proved. Problems on particle dynamics are solved, visualization of the obtained outcomes is realized.

The complicated driving of a point which relative transition of which happens in mobile three-edge of a curve given by the natural equations is considered. The portable driving of three-edge is determined by differential performances of a curve. Competence of usage of the Frenet's formulas for determination of absolute velocity of a point in projections to basis vectors of mobile three-edge is proved. The absolute trajectories of driving are retrieved visualization of the obtained outcomes is realized.

Application of the accompanying three-edge plane curve as moving system of coordinates relative to which is carried the relative movement of the point, makes it possible to quickly and easily find the point of absolute acceleration in difficult driving in projections on orty three-edge and solve problems on the dynamics of a point moving in the same system. The developed approach greatly simplifies the solution of problems of complex traffic point, which makes its further development.

Keywords:*three-edge, a material point, Coriolis acceleration, the system of coordinates, speed, absolute acceleration.*

Стаття надійшла в редакцію: 05.05.2015р.
Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.