

таких динамічних моделей повинні вирішуватися питання, пов'язані з оптимальними моментами постановки продукції на виробництво, зміни модифікацій, зняття з виробництва і експлуатації і т.д. Ці питання повинні вирішуватися одночасно з вибором оптимальних параметрів продукції. Статичні моделі оптимізації виникають як результат спрощення вихідної динамічної моделі. Статичні моделі використовуються для отримання наближених результатів. Вони застосовуються тому, що для них простіше отримувати необхідні дані і простіше проводити обчислювальні процедури. Однак при цьому ускладнюється інтерпретація понять, що становлять основу моделі, так як ці поняття можуть бути інтерпретовані по-різному в залежності від способу введення вихідної динамічної моделі оптимізації в статичну. Більше того, для застосування готових статистичних моделей необхідно будувати достатньо складні, пристосовані до конкретних умов процедури визначення вихідних даних.

**Ключові слова:** метод, оптимізація, параметр, об'єкт, стандартизація, система машин, рослинництво.

Стаття надійшла в редакцію: 07.10.2016

Рецензент: д.т.н., проф. Ревенко І.І.

УДК 624.138.2.678.063

### РІВНЯННЯ ШВИДКОСТІ КРИВОЛІНІЙНОГО РУХУ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА

**В. І. Мельник.**, д.т.н., професор ХНТУСГ ім.П.М.Василенка,

**М. Я. Довжик**, к.т.н., доцент,

**Б. Я. Татяниченко**, к.т.н., доцент,

**О. О. Соларьов**, асистент,

**Ю. В. Сіренко**, аспірант

Сумський національний аграрний університет

В статті представлено нове вирішення аналітичної задачі динамічного криволінійного руху на прикладі чотирьохколісного трактора з урахуванням всіх діючих сил.

**Ключові слова:** чотирьохколісний трактор, криволінійний рух, рівняння Даламбера, коефіцієнт інтенсивності.

**Постановка задачі.** У даній роботі пропонується метод аналітичного вирішення диференціальних рівнянь криволінійного руху тракторного агрегату і визначення основних параметрів руху з урахуванням всіх зовнішніх навантажень на агрегат, який дозволяє отримати результати з достатньою точністю. В якості вихідних даних для аналізу руху, машино-тракторного агрегату (МТА) прийняті: навантаження на крюк, маса і момент інерції трактора, рушійні сили передніх і задніх коліс трактора, сили опору, геометричні розміри агрегату, а також коефіцієнти, зв'язані з пружними властивостями шин та закономірностями зміни під час повороту сил і кутів, які визначають траєкторію руху.

**Аналіз останніх літературних даних.** Динамічні задачі криволінійного руху колісних машин потребують складання диференціальних рівнянь другого порядку, які містять цілий ряд змінних величин, що мають досить складну і, як правило, невизначену залежність від багатьох факторів. В літературі є багато прикладів складання таких рівнянь, пропонуються математичні моделі, які описують динаміку повороту машин [1, 5]. В роботі [3] отримана система диференціальних рівнянь в узагальнених координатах, яка описує поздовжній рух орного агрегату. Часто використовуються наближені методи рішення. Рівняння, які описують поведінку (МТА), ураховують

динамічні співвідношення по принципу Даламбера або на базі рівнянь Лагранжа другого роду. При цьому приймаються до уваги всі сили взаємодії трактора з ґрунтом і причіпним або навісним обладнанням. У зв'язку із складністю цієї силової гри виникає необхідність у багатьох допущеннях і спрощеннях.

Як правило, вивчення криволінійного руху МТА обмежується оцінкою його стійкості і керуваності, а динамічні характеристики агрегату та їх вплив на його рух при цьому не розкриваються, хоча існують спроби рішення цієї задачі. Так, наприклад, в роботі [2] запропоновані математичні моделі руху МТА, згідно з якими агрегат розглядається як багатоланковий об'єкт, складові частини якого визначаються за допомогою силових факторів з урахуванням режимів руху цих частин і їх взаємодії між собою і з ґрунтом. При цьому використовуються лінійні співвідношення між похідними вільних параметрів і узагальненими швидкостями. Рівняння руху агрегату враховують і бокове ведення еластичних шин та інші взаємодії з опорною поверхнею, а також розміри причіпного знаряддя. Автор стверджує, що виявлені за допомогою розробленого методу закономірності дозволяють вибрати режими руху МТА, які забезпечують високу продуктивність, мінімальні енерговитрати на рух, екологічну сумісність з ґрунтом, а також виконання вимог щодо стійкості

руху і керованості. Представлені у цій роботі математичні моделі руху МТА вирішувалися методами чисельного інтегрування, які дозволили запропонувати пакети прикладних програм для різних швидкостей. Наведений приклад наочно показує, що роботи у цьому напрямку мають велике практичне значення і їх необхідно продовжувати. Для поглиблення аналізу перерахованих вище питань необхідно отримати точні аналітичні рішення диференціальних рівнянь руху МТА. В роботі [4] спроба такого підходу зроблена за допомогою моделювання і аналізу повороту на горизонтальній поверхні з однорідним фоном трьохвісної шарнірно-з'єднаної машини БелАЗ-75281 з використанням методів віртуального моделювання в різних умовах руху. Багато-параметрична система рівнянь вирішувалася методом Рунге-Кутта; при цьому були отримані 18 рівнянь, в результаті рішення яких було визначено момент, необхідний для повороту, та інші параметри. Автор стверджує, що результатів такого роду досліджень у наш час ще не існує.

**Викладення основного матеріалу.** Розрахункова схема чотирьохколісного повнопривідного трактора з передніми керованими колесами на однорідній горизонтальній основі представлена на рис.1,

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + F_2 \cos \varphi - F_{on1} \cos(\alpha_1 + \varphi) - F_{on2} \cos \varphi - F_{\delta 1} \sin(\alpha_1 - \varphi) - F_{\delta 2} \sin \varphi - F_{\kappa} \cos(\varphi - \gamma); \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = F_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + F_2 \sin \varphi - F_{on1} \sin(\alpha_1 + \varphi) - F_{on2} \sin \varphi + F_{\delta 1} \cos(\alpha_1 - \varphi) + F_{\delta 2} \cos \varphi + F_{\kappa} \sin(\varphi - \gamma); \quad (2)$$

В цих рівняннях змінними є величини  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $U$  і час  $t$ , а також майже всі зовнішні сили, тому при інтегруванні для отримання рівнянь

де:  $F_1$  і  $F_2$  – тягові сили переднього і заднього мостів;

$F_{on1}$  і  $F_{on2}$  – сили опору коченню коліс передньої і задньої осі, приведені до центрів мостів – точок  $A$  і  $B$ ;

$F_{\delta 1}$  і  $F_{\delta 2}$  – бокові сили передніх і задніх коліс;

$F_{\kappa}$  – крюкова сила;

$M_{op}$  – момент опору повороту;

$U$  – швидкість руху центра мас  $C$  трактора, дотична до траєкторії руху;

$\alpha$  – кут між вектором швидкості  $U$  і поздовжньою віссю трактора (курсовий кут);

$\varphi$  – кут повороту корпусу трактора відносно осі  $Ox$ ;

$\alpha_1$  – середній кут повороту керованих коліс;

$\alpha_{e1}$  і  $\alpha_{e2}$  – кути ведення передніх і задніх коліс;

$\gamma$  – кут між віссю трактора і вектором крюкової сили в горизонтальній площині;

$R_T$  і  $R$  – теоретичний і дійсний радіуси повороту трактора;

$R_c$  – радіус кривизни траєкторії центра мас

$C$ .

Тоді динамічні рівняння руху в формі Даламбера будуть:

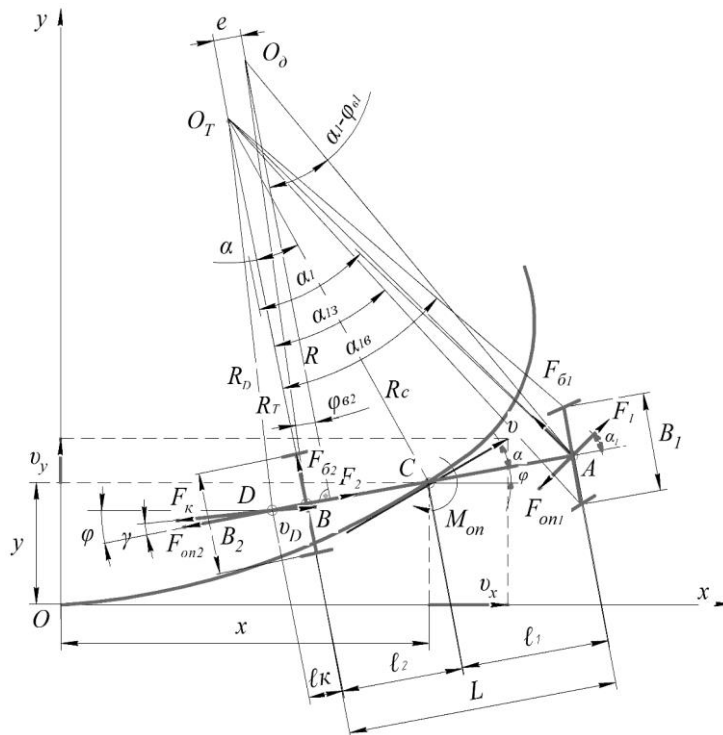


Рис. 1. Розрахункова схема чотирьохколісного трактора з передніми керованими колесами

швидкості і траєкторії необхідно підінтегральні функції привести до одного аргументу. Найпростіше це можна зробити через параметр  $\varphi$ .

Замінити диференціал  $dt$  на диференціал  $d\varphi$  можна, виразивши елементарну дугу-переміщення точки  $B$  відносно точки  $C$  (рис. 2):  $dS = \ell_2 d\varphi = v_{BC} dt$ . Тоді швидкість точки  $B$  у відносному русі відносно точки  $C$  необхідно виразити

через швидкість  $v = v_C$ . З плану швидкостей (рис. 2) маємо:

$$v_{BC} = v \sin \alpha \approx v \alpha = v(\alpha_0 + k_\alpha \varphi).$$

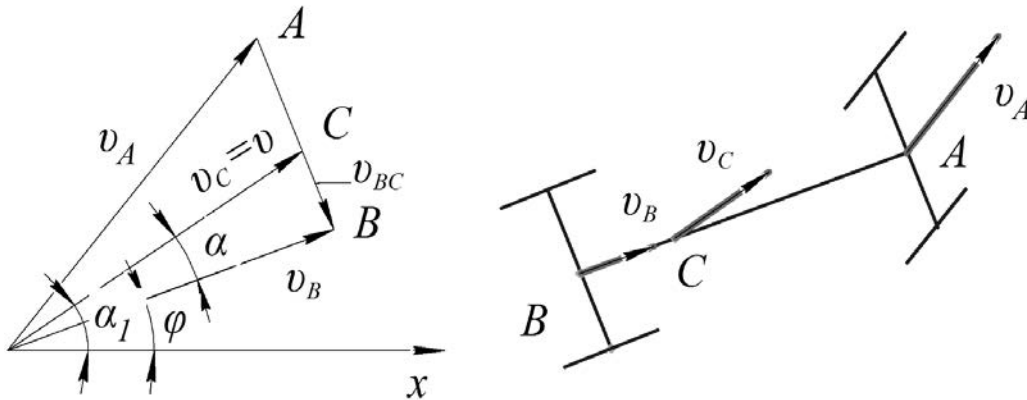


Рис. 2. План швидкостей для характерних точок остова трактора

Тут  $\sin \alpha \approx \alpha$  (радіан), який згідно з [5, с. 215] зв'язаний з кутом повороту керованих коліс  $\alpha_1$  залежністю  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} \operatorname{tg} \alpha_1$ , звідки слідує, що при робочих значеннях кута  $\alpha_1 = 50 \dots 55^\circ$  кут  $\alpha = 25 \dots 30^\circ$ . Тоді

$$dt = \frac{\ell_2}{v_{BC}} d\varphi = \frac{\ell_2}{v(\alpha_0 + k_\alpha \varphi)} d\varphi,$$

де  $k_\alpha = (\alpha_{\max} - \alpha_0) / \varphi_{\max}$  – коефіцієнт інтенсивності зміни кута  $\alpha$  під час повороту;  $\alpha_0$  і  $\alpha_{\max}$  – початкове і кінцеве значення цього кута на ділянці входу в поворот або на ділянці виходу з повороту;  $\varphi_{\max}$  – кут повороту корпуса трактора. Швидкість  $v$  можна виразити через її проекції  $v_x$  і  $v_y$  на осі координат (рис.1).

$$v = \frac{v_x}{\cos(\alpha + \varphi)} = \frac{v_x}{\cos[\alpha_0 + (1 + k_\alpha)\varphi]};$$

$$v = \frac{v_y}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{v_y}{\sin[\alpha_0 + (1 + k_\alpha)\varphi]}.$$

Тепер диференціальні рівняння руху в проєкціях на осі  $Ox$  і  $Oy$  можна записати у вигляді:

$$m v_x d v_x = \frac{\ell_2 \cos[\alpha_0 + (1 + k_\alpha)\varphi]}{\alpha_0 + k_\alpha \varphi} [F_1 \cos(\alpha_1 + \varphi) + F_2 \cos \varphi - F_{on1} \cos(\alpha_1 + \varphi) - F_{on2} \cos \varphi - F_{\delta 1} \sin(\alpha_1 - \varphi) - F_{\delta 2} \sin \varphi - F_k \cos(\varphi - \gamma)] d\varphi.$$

$$m v_y d v_y = \frac{\ell_2 \sin[\alpha_0 + (1 + k_\alpha)\varphi]}{\alpha_0 + k_\alpha \varphi} [F_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + F_2 \sin \varphi - F_{on1} \sin(\alpha_1 + \varphi) - F_{on2} \sin \varphi + F_{\delta 1} \cos(\alpha_1 - \varphi) + F_{\delta 2} \cos \varphi + F_k \sin(\varphi - \gamma)] d\varphi.$$

Оскільки кут повороту корпуса трактора  $\varphi$  прийнято як незалежний аргумент, компоненти швидкості  $v_x$  і  $v_y$ , а також складові траєкторії руху центра ваги  $C$  – координати  $x$  і  $y$  – також можна отримати як функції кута  $\varphi$ . Для рішення

цієї задачі цих двох рівнянь достатньо.

У загальному випадку для визначення повної швидкості центра мас  $C$  необхідно взяти 14 інтегралів. Згідно з диференціальним рівнянням (1) проєкція швидкості  $v_x$  на вісь  $Ox$  має сім складових. Розглянемо їх окремо.

1. Перший інтеграл визначає складову проєкції швидкості центра мас на вісь  $Ox$ , яка залежить від тягової сили переднього моста  $F_1$ .

$$\frac{m v_{x1}^2}{2} = \ell_2 \int \frac{F_1 \cos(\alpha_1 + \varphi) \cos[\alpha_0 + (1 + k_\alpha)\varphi]}{\alpha_0 + k_\alpha \varphi} d\varphi.$$

Задача про розподілення сумарної сили тяги між ведучими мостами детально розглянута в [5, с. 220...227]. У повнопривідних тракторів з блокованим приводом один з ведучих мостів можна відключати. Як правило, це передній міст. Тоді тягове зусилля  $F_1 = 0$ . В усякому разі сили  $F_1$  і  $F_2$  можна вважати відомими, але вони можуть змінюватися під час повороту трактора у значних межах. Таким чином, тягова сила  $F_1$  може змінюватися як завгодно або залишитися постійною, якщо виконувати відповідне керування двигуном. Можна припустити, що у загальному випадку вона монотонно змінюється від початкового значення  $F_{o1}$  до якоїсь величини в кінці повороту за лінійною залежністю від кута  $\varphi$ , тобто  $F_1 = F_{o1}(1 + k_{F1}\varphi)$ , де  $k_{F1}$  – коефіцієнт інтенсивності зміни сили  $F_2$  під час повороту.

Тут і далі тригонометричні функції розкладаються в ряди Маклорена. Якщо обмежитися для синуса одним, а для косинуса двома першими членами ряду і маючи на увазі, що кут повороту керованих коліс  $\alpha_1 = \alpha_{o1} + k_{\alpha 1}\varphi$ , а  $\cos(\alpha_1 + \varphi) = \cos[\alpha_{o1} + (1 + k_{\alpha 1})\varphi]$ , то перший інтеграл приймає вигляд:

$$\frac{mv_{x1}^2}{2} = F_{o1} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F1}\varphi) \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\alpha_{o1} + (1+k_{\alpha 1})\varphi]^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2 \right\}}{\alpha_o + k_{\alpha}\varphi} d\varphi =$$

$$= F_{o1} \ell_2 \int \frac{a_{01} + a_{11}\varphi + a_{21}\varphi^2 + a_{31}\varphi^3 + a_{41}\varphi^4 + a_{51}\varphi^5}{\alpha_o + k_{\alpha}\varphi} d\varphi,$$

де  $a_{01} = \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2} \right)$ ;  $a_{11} = k_{F1} a_{o10} + a'_{11}$ ;

$$a'_{11} = -\alpha_o(1+k_{\alpha}) \left( 1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2} \right) - \alpha_{o1}(1+k_{\alpha 1}) \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right);$$

$$a_{21} = a'_{11} k_{F1} + a'_{21};$$

$$a'_{21} = -\frac{1}{2}(1+k_{\alpha})^2 \left( 1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2} \right) + \alpha_o \alpha_{o1}(1+k_{\alpha})(1+k_{\alpha 1}) -$$

$$-\frac{1}{2}(1+k_{\alpha 1})^2 \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right);$$

$$a_{31} = a'_{21} k_{F1} + a'_{31}; \quad a'_{31} = \frac{1}{2}(1+k_{\alpha})(1+k_{\alpha 1}) +$$

$$+ [\alpha_o(1+k_{\alpha 1}) + \alpha_{o1}(1+k_{\alpha})];$$

$$a_{41} = a'_{31} k_{F1} + a'_{41}; \quad a'_{41} = \frac{1}{4}(1+k_{\alpha})^2(1+k_{\alpha 1})^2;$$

$$a_{51} = a'_{41} k_{F1}.$$

Рішення цього інтегралу отримаємо у вигляді:

$$v_{x1} = A_1 \sqrt{A_{01} \ln |k_{\alpha}\varphi + \alpha_o| + A_{11}\varphi + A_{21}\varphi^2 + A_{31}\varphi^3 + A_{41}\varphi^4 + A_{51}\varphi^5}, \quad (3)$$

де  $A_1 = \sqrt{\frac{2F_{o1}\ell_2}{m}}$ ;

$$A_{01} = \frac{a_{01}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{11}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{21}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{31}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{41}}{k_{\alpha}^5} - \frac{\alpha_o^5 a_{51}}{k_{\alpha}^6};$$

$$A_{11} = \frac{a_{11}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{21}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{31}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{41}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{51}}{k_{\alpha}^5};$$

$$A_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{21}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{31}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{41}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{51}}{k_{\alpha}^4} \right);$$

$$A_{31} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{31}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{41}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{51}}{k_{\alpha}^3} \right);$$

$$A_{41} = \frac{1}{4} \left( \frac{a_{41}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{51}}{k_{\alpha}^2} \right); \quad A_{51} = \frac{a_{51}}{5k_{\alpha}}.$$

2. Другий інтеграл для визначення складової швидкості руху  $U_{x2}$ , яка залежить від тягової сили заднього моста  $F_2$  після заміни диференціала  $dt$  на  $d\varphi$  і прийняття закону зміни тягової сили задньої осі  $F_2 = F_{o2}(1+k_{F2}\varphi)$ , де  $F_{o2}$  – значення цієї сили на початку повороту,  $k_{F2}$  – коефіцієнт інтенсивності зміни сили  $F_2$  під час повороту, а також після заміни тригонометричної функції  $\cos\varphi$  на

$$v_{x2} = A_2 \sqrt{A_{02} \ln |k_{\alpha}\varphi + \alpha_o| + A_{12}\varphi + A_{22}\varphi^2 + A_{32}\varphi^3 + A_{42}\varphi^4 + A_{52}\varphi^5}, \quad (4)$$

де  $A_2 = \sqrt{\frac{2F_{o2}\ell_2}{m}}$ ;

$$A_{02} = \frac{a_{02}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{12}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{22}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{32}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{42}}{k_{\alpha}^5} - \frac{\alpha_o^5 a_{52}}{k_{\alpha}^6};$$

$$A_{12} = \frac{a_{12}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{22}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{32}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{42}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{52}}{k_{\alpha}^5};$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{22}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{32}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{42}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{52}}{k_{\alpha}^4} \right);$$

$$A_{32} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{32}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{42}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{52}}{k_{\alpha}^3} \right);$$

два перші члени ряду Маклорена, має вираз:

$$\frac{mv_{x2}^2}{2} = F_{o2} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F2}\varphi) \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 \right\}}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

який можна записати у вигляді:

$$\frac{mv_{x2}^2}{2} = F_{o2} \ell_2 \int \frac{a_{02} + a_{12}\varphi + a_{22}\varphi^2 + a_{32}\varphi^3 + a_{42}\varphi^4 + a_{52}\varphi^5}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $a_{02} = 1 - \frac{\alpha_o^2}{2}$ ;

$$a_{12} = k_{F2} \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) + a'_{12}; \quad a'_{12} = -\alpha_o(1+k_{\alpha});$$

$$a_{22} = k_{F2} a'_{12} + a'_{22}; \quad a'_{22} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) - \frac{1}{2}(1+k_{\alpha})^2;$$

$$a_{32} = k_{F2} a'_{22} + a'_{32}; \quad a'_{32} = \frac{\alpha_o}{2}(1+k_{\alpha});$$

$$a_{42} = k_{F2} a'_{32} + a'_{42}; \quad a'_{42} = \frac{1}{4}(1+k_{\alpha})^2;$$

$$a_{52} = k_{F2} a'_{42}.$$

Рішення цього інтегралу:

$$A_{41} = \frac{1}{4} \left( \frac{a_{42}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{52}}{k_{\alpha}^2} \right); \quad A_{52} = \frac{a_{52}}{5k_{\alpha}}.$$

3. Сили опору коченню передніх і задніх коліс  $F_{on1}$  і  $F_{on2}$  залежать від швидкості руху та деформації шин і ґрунту, які в процесі повороту змінюються. Врахувати ці зміни в загальному рішенні можливо лише за рахунок ускладнення рішення. Але сили опору коченню коліс незначні порівняно з тяговими силами і силою на крюку, тому в першому наближенні їх можна прийняти постійними. Інтеграл, що враховує силу опору передніх коліс  $F_{on1}$  за прийнятою схемою приво-

ДИТЬСЯ ДО ВИДУ:

$$\frac{m\nu_{x3}^2}{2} = F_{om1} \ell_2 \int \frac{\left\{1 - \frac{1}{2}[\alpha_{o1} + (1+k_{\alpha 1})\varphi]^2\right\} \left\{1 - \frac{1}{2}[\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2\right\}}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

або

$$\frac{m\nu_{x3}^2}{2} = F_{om1} \ell_2 \int \frac{a_{03} + a_{13}\varphi + a_{23}\varphi^2 + a_{33}\varphi^3 + a_{43}\varphi^4}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

$$\text{де } a_{03} = \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2}\right);$$

$$a_{13} = -\alpha_o(1+k_{\alpha}) \left(1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2}\right) - \alpha_{o1}(1+k_{\alpha 1}) \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right);$$

$$a_{23} = -\frac{1}{2}(1+k_{\alpha})^2 \left(1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2}\right) + \alpha_o \alpha_{o1}(1+k_{\alpha})(1+k_{\alpha 1}) - \\ - \frac{1}{2}(1+k_{\alpha 1})^2 \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right);$$

$$a_{33} = \frac{\alpha_{o1}}{2}(1+k_{\alpha 1})(1+k_{\alpha})^2 + \frac{\alpha_o}{2}(1+k_{\alpha}) + \alpha_{o1}(1+k_{\alpha 1})^2;$$

$$a_{43} = \frac{1}{4}(1+k_{\alpha})^2(1+k_{\alpha 1})^2.$$

Рішення цього інтегралу:

$$\nu_{x3} = A_3 \sqrt{A_{03} \ln|k_{\alpha}\varphi + \alpha_o| + A_{13}\varphi + A_{23}\varphi^2 + A_{33}\varphi^3 + A_{43}\varphi^4}, \quad (5)$$

$$\text{де } A_3 = \sqrt{\frac{2F_{om1}\ell_2}{m}};$$

$$A_{03} = \frac{a_{03}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{13}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{23}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{33}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{43}}{k_{\alpha}^5};$$

$$A_{13} = \frac{a_{11}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{23}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{33}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{43}}{k_{\alpha}^4};$$

$$A_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{23}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{33}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{43}}{k_{\alpha}^3} \right);$$

$$A_{33} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{33}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{43}}{k_{\alpha}^2} \right); \quad A_{43} = \frac{a_{43}}{4k_{\alpha}}.$$

4. Інтеграл, що враховує силу опору задніх коліс:

$$\frac{m\nu_{x4}^2}{2} = F_{om2} \ell_2 \int \frac{\left\{1 - \frac{1}{2}[\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2\right\} \left\{1 - \frac{\varphi^2}{2}\right\}}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi = \\ = F_{om2} \ell_2 \int \frac{a_{04} + a_{14}\varphi + a_{24}\varphi^2 + a_{34}\varphi^3 + a_{44}\varphi^4}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

$$\text{де } a_{04} = 1 - \frac{\alpha_o^2}{2};$$

$$a_{14} = -\alpha_o(1+k_{\alpha}); \quad a_{24} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right) - \frac{1}{2}(1+k_{\alpha})^2;$$

$$a_{34} = \frac{\alpha_o}{2}(1+k_{\alpha}); \quad a_{44} = \frac{1}{4}(1+k_{\alpha})^2.$$

Його рішення:

$$\nu_{x4} = A_4 \sqrt{A_{04} \ln|k_{\alpha}\varphi + \alpha_o| + A_{14}\varphi + A_{24}\varphi^2 + A_{34}\varphi^3 + A_{44}\varphi^4}, \quad (6)$$

$$\text{де } A_4 = \sqrt{\frac{2F_{om2}\ell_2}{m}};$$

$$A_{04} = \frac{a_{04}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{14}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{24}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{34}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{44}}{k_{\alpha}^5};$$

$$A_{14} = \frac{a_{14}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{24}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{34}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{44}}{k_{\alpha}^4};$$

$$A_{24} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{24}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{34}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{44}}{k_{\alpha}^3} \right);$$

$$A_{34} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{34}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{44}}{k_{\alpha}^2} \right); \quad A_{44} = \frac{a_{44}}{4k_{\alpha}}.$$

5. Бокові сили зростають при збільшенні кута  $\varphi$  під час входу в поворот, тому приймаємо для бокової сили передніх коліс  $F_{\delta 1} = F_{\delta 10}(1+k_{\delta 1}\varphi)$ , де  $k_{\delta 1}$  - коефіцієнт інтенсивності зміни бокової сили  $F_{\delta 1}$ . За прийнятою схемою отримаємо:

$$\frac{m\nu_{x5}^2}{2} = \\ = F_{\delta 10} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F\delta 1}\varphi)[\alpha_{o1} - (1-k_{\alpha 1})\varphi] \left\{1 - \frac{1}{2}[\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2\right\}}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi = \\ = F_{\delta 10} \ell_2 \int \frac{a_{05} + a_{15}\varphi + a_{25}\varphi^2 + a_{35}\varphi^3 + a_{45}\varphi^4}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

$$\text{де } a_{05} = \alpha_{o1} \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right);$$

$$a_{15} = k_{F\delta 1} a_{05} + a'_{15}; \quad a'_{15} = -(1-k_{\alpha 1}) \left(1 - \frac{\alpha_o^2}{2}\right);$$

$$a_{25} = k_{F\delta 1} a'_{15} + a'_{25}; \quad a'_{25} = \alpha_o(1+k_{\alpha})(1-k_{\alpha 1}) - \frac{\alpha_{o1}}{2}(1+k_{\alpha})^2;$$

$$a_{35} = k_{F\delta 1} a'_{25} + a'_{35}; \quad a'_{35} = \frac{1}{2}(1-k_{\alpha 1})(1+k_{\alpha})^2; \quad a_{45} = k_{F\delta 1} a'_{35}.$$

Тоді

$$\nu_{x5} = A_5 \sqrt{A_{05} \ln|k_{\alpha}\varphi + \alpha_o| + A_{15}\varphi + A_{25}\varphi^2 + A_{35}\varphi^3 + A_{45}\varphi^4}, \quad (7)$$

$$\text{де } A_5 = \sqrt{\frac{2F_{\delta 10}\ell_2}{m}};$$

$$A_{05} = \frac{a_{05}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{15}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{25}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{35}}{k_{\alpha}^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{45}}{k_{\alpha}^5};$$

$$A_{15} = \frac{a_{15}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{25}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{35}}{k_{\alpha}^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{45}}{k_{\alpha}^4};$$

$$A_{25} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{25}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{35}}{k_{\alpha}^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{45}}{k_{\alpha}^3} \right);$$

$$A_{35} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{35}}{k_{\alpha}} - \frac{\alpha_o a_{45}}{k_{\alpha}^2} \right); \quad A_{45} = \frac{a_{45}}{4k_{\alpha}}.$$

6. Бокова сила задніх коліс  $F_{\delta 2} = F_{\delta 20}(1+k_{\delta 2}\varphi)$ , де  $k_{\delta 2}$  - коефіцієнт інтенсивності зміни бокової сили  $F_{\delta 2}$ . Відповідний їй інтеграл:

$$\frac{m\nu_{x6}^2}{2} = F_{\delta 20} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F\delta 2}\varphi) \left\{1 - \frac{1}{2}[\alpha_o + (1+k_{\alpha})\varphi]^2\right\} \varphi}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi = \\ = F_{\delta 20} \ell_2 \int \frac{a_{16}\varphi + a_{26}\varphi^2 + a_{36}\varphi^3 + a_{46}\varphi^4}{k_{\alpha}\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

$$\text{де } a_{16} = 1 - \frac{\alpha_o^2}{2};$$

$$a_{26} = k_{F\delta 2} a_{16} + a'_{26}; \quad a'_{26} = -\alpha_o(1+k_\alpha);$$

$$a_{36} = k_{F\delta 2} a'_{26} + a'_{36}; \quad a'_{36} = -\frac{1}{2}(1+k_\alpha)^2;$$

$$a_{46} = k_{F\delta 2} a'_{36}.$$

Рішення:

$$v_{x6} = A_6 \sqrt{A_{06} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + A_{16} \varphi + A_{26} \varphi^2 + A_{36} \varphi^3 + A_{46} \varphi^4}, \quad (8)$$

$$\text{де } A_6 = \sqrt{\frac{2F_{\delta 20} \ell_2}{m}};$$

$$A_{06} = -\frac{\alpha_o a_{16}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{25}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{36}}{k_\alpha^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{46}}{k_\alpha^5};$$

$$A_{16} = \frac{a_{16}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{26}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{36}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{46}}{k_\alpha^4};$$

$$A_{26} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{26}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{36}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{46}}{k_\alpha^3} \right);$$

$$A_{36} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{36}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{46}}{k_\alpha^2} \right); \quad A_{46} = \frac{a_{46}}{4k_\alpha}.$$

7. Останній інтеграл диференціального рівняння (1) враховує вплив на швидкість руху центра ваги трактора кривої сили  $F_k$ , яку можна прийняти постійною, а кут між вектором цієї сили і віссю трактора  $\gamma$  лінійно змінним в залежності від кута  $\varphi$ , від початкового значення  $\gamma_o$  (при вході в поворот з прямолінійного руху  $\gamma_o=0$ ) до максимального значення в кінці повороту, тобто  $\gamma = \gamma_o + k_\gamma \varphi$ , де  $k$  – коефіцієнт інтенсивності зміни кута  $\gamma$ . В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{m v_{x7}^2}{2} &= F_k \ell_2 \int \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{2} [\gamma_o - (1-k_\gamma) \varphi]^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\alpha_o + (1+k_\alpha) \varphi]^2 \right\}}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi, \\ &= F_k \ell_2 \int \frac{a_{07} + a_{17} \varphi + a_{27} \varphi^2 + a_{37} \varphi^3 + a_{47} \varphi^4}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi. \end{aligned}$$

Тут

$$a_{07} = \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{\gamma_o^2}{2} \right);$$

$$a_{17} = \gamma_o (1-k_\gamma) \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) - \alpha_o (1+k_\alpha) \left( 1 - \frac{\gamma_o^2}{2} \right);$$

$$\begin{aligned} a_{27} &= -\frac{1}{2} (1+k_\gamma)^2 \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right) - \\ &- \alpha_o \gamma_o (1+k_\alpha) (1-k_\gamma) - \frac{1}{2} (1-k_\alpha)^2 \left( 1 - \frac{\alpha_o^2}{2} \right); \end{aligned}$$

$$a_{37} = \frac{\alpha_o}{2} (1+k_\alpha) (1-k_\gamma)^2 - \frac{\gamma_o}{2} (1+k_\gamma) (1+k_\alpha)^2;$$

$$a_{47} = \frac{1}{4} (1+k_\alpha)^2 (1-k_\gamma)^2.$$

Рішення цього інтегралу:

$$v_{x7} = A_7 \sqrt{A_{07} + A_{17} \varphi + A_{27} \varphi^2 + A_{37} \varphi^3 + A_{47} \varphi^4}, \quad (9)$$

$$\text{де } A_7 = \sqrt{\frac{2F_k \ell_2}{m}};$$

$$A_{07} = \frac{a_{07}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{17}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{27}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{37}}{k_\alpha^4} + \frac{\alpha_o^4 a_{47}}{k_\alpha^5};$$

$$A_{17} = \frac{a_{17}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{27}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{37}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3 a_{47}}{k_\alpha^4};$$

$$A_{27} = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{27}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{37}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 a_{47}}{k_\alpha^3} \right);$$

$$A_{37} = \frac{1}{3} \left( \frac{a_{37}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o a_{47}}{k_\alpha^2} \right); \quad A_{47} = \frac{a_{47}}{4k_\alpha}.$$

Повна проекція швидкості центра ваги трактора на вісь  $Ox$  – це сума складових проекцій  $U_{xi}$ , визначених рівняннями (3...9):

$$v_x = \sum_{i=1}^7 v_{xi} + A.$$

Постійну інтегрування  $A$  знаходимо з початкової умови ( $\varphi=0$ ;  $U_x = U_o \cos \alpha_o$ ):

$$A = v_o \cos \alpha_o - \sum_{i=1}^7 \sqrt{A_i A_{0i} \ln|\alpha_o|} = v_o \cos \alpha_o - \sum_{i=1}^7 \sqrt{\ln|\alpha_o| \sum_{i=1}^7 A_i A_{0i}}.$$

Остаточню маємо:

$$v_x = v_o \cos \alpha_o + \sum_{i=1}^7 v_{xi} - \sum_{i=1}^7 \sqrt{\ln|\alpha_o| \sum_{i=1}^7 A_i A_{0i}}. \quad (10)$$

Тепер знайдемо рішення семи інтегралів рівняння Даламбера (2), записаного у формі проекцій на вісь  $Oy$  з урахуванням, що

$$v_x = \frac{v_y}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{v_y}{\sin[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi]}.$$

1.

$$\begin{aligned} \frac{m v_{y1}^2}{2} &= F_{o1} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F1}\varphi)[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi][\alpha_{o1} + (1+k_{\alpha 1})\varphi]}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi = \\ &= F_{o1} \ell_2 \int \frac{\epsilon_{01} + \epsilon_{11}\varphi + \epsilon_{21}\varphi^2 + \epsilon_{31}\varphi^3}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi, \end{aligned}$$

де

$$\epsilon_{01} = \alpha_o \alpha_{o1};$$

$$\epsilon_{11} = k_{F1} \epsilon_{o1} + \epsilon'_{11}; \quad \epsilon'_{11} = \alpha_{o1} (1+k_\alpha) + \alpha_o (1+k_{\alpha 1});$$

$$\epsilon_{21} = k_{F1} \epsilon'_{11} + \epsilon'_{21}; \quad \epsilon'_{21} = (1+k_\alpha) (1+k_{\alpha 1});$$

$$\epsilon_{31} = k_{F1} \epsilon'_{21}.$$

$$v_{y1} = B_1 \sqrt{B_{01} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{11} \varphi + B_{21} \varphi^2 + B_{31} \varphi^3}, \quad (11)$$

$$\text{де } B_1 = \sqrt{\frac{2F_{o1} \ell_2}{m}}; \quad B_{01} = \frac{\epsilon_{01}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o \epsilon_{11}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 \epsilon_{21}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3 \epsilon_{31}}{k_\alpha^4};$$

$$B_{11} = \frac{\epsilon_{11}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o \epsilon_{21}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2 \epsilon_{31}}{k_\alpha^3}; \quad B_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{21}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o \epsilon_{31}}{k_\alpha^2} \right);$$

$$B_{31} = \frac{\epsilon_{31}}{4k_\alpha}.$$

$$\frac{m v_{y2}^2}{2} = F_{o2} \ell_2 \int \frac{(1+k_{F2}\varphi)[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi]}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi =$$

$$= F_{o2} \ell_2 \int \frac{\epsilon_{12}\varphi + \epsilon_{22}\varphi^2 + \epsilon_{32}\varphi^3}{k_\alpha \varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{12} = \alpha_o$ ;  $\epsilon_{22} = k_{F2}\alpha_o + (1+k_\alpha)$ ;  
 $\epsilon_{32} = k_{F2}(1+k_\alpha)$ .

$$v_{y2} = B_2 \sqrt{B_{02} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{12}\varphi + B_{22}\varphi^2 + B_{32}\varphi^3}, \quad (12)$$

де  $B_2 = \sqrt{\frac{2F_{02}\ell_2}{m}}$ ;  $B_{02} = -\frac{\alpha_o\epsilon_{12}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{22}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3\epsilon_{32}}{k_\alpha^4}$ ;

$$B_{12} = \frac{\epsilon_{12}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{22}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{32}}{k_\alpha^3}; B_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{22}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{32}}{k_\alpha^2} \right);$$

$$B_{32} = \frac{\epsilon_{32}}{4k_\alpha}.$$

3.

$$\frac{mv_{y3}^2}{2} = F_{on1}\ell_2 \int \frac{[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi][\alpha_{o1} + (1+k_{\alpha1})\varphi]}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi =$$

$$= F_{on1}\ell_2 \int \frac{\epsilon_{03} + \epsilon_{13}\varphi + \epsilon_{23}\varphi^2}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{03} = \alpha_o\alpha_{o1}$ ;  $\epsilon_{13} = \alpha_o(1+k_{\alpha1}) + \alpha_{o1}(1+k_\alpha)$ ;  
 $\epsilon_{23} = (1+k_\alpha)(1+k_{\alpha1})$ .

$$v_{y3} = B_3 \sqrt{B_{03} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{13}\varphi + B_{23}\varphi^2}, \quad (13)$$

де  $B_3 = \sqrt{\frac{2F_{on1}\ell_2}{m}}$ ;  $B_{03} = \frac{\epsilon_{03}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{13}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{23}}{k_\alpha^3}$ ;

$$B_{13} = \frac{\epsilon_{13}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{23}}{k_\alpha^2}; B_{23} = \frac{\epsilon_{23}}{2k_\alpha}.$$

$$\frac{mv_{y4}^2}{2} = F_{on2}\ell_2 \int \frac{[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi]\varphi}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi =$$

$$= F_{on2}\ell_2 \int \frac{\epsilon_{14}\varphi + \epsilon_{24}\varphi^2}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{14} = \alpha_o$ ;  $\epsilon_{24} = (1+k_\alpha)$ .

$$v_{y4} = B_4 \sqrt{B_{04} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{14}\varphi + B_{24}\varphi^2}, \quad (14)$$

де  $B_4 = \sqrt{\frac{2F_{on2}\ell_2}{m}}$ ;  $B_{04} = -\frac{\alpha_o\epsilon_{13}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{24}}{k_\alpha^3}$ ;

$$B_{14} = \frac{\epsilon_{14}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{24}}{k_\alpha^2}; B_{24} = \frac{\epsilon_{24}}{2k_\alpha}.$$

5.

$$\frac{mv_{y5}^2}{2} =$$

$$= F_{\delta10}\ell_2 \int \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)[\alpha_{o1} - (1-k_{\alpha1})\varphi]^2[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi](1+k_{\delta1}\varphi)}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi =$$

$$= F_{\delta10}\ell_2 \int \frac{\epsilon_{05} + \epsilon_{15}\varphi + \epsilon_{25}\varphi^2 + \epsilon_{35}\varphi^3 + \epsilon_{45}\varphi^4}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{05} = \alpha_o \left(1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2}\right)$ ;

$$\epsilon_{15} = k_{\delta1}\epsilon_{05} + \epsilon'_{15}; \epsilon'_{15} = \alpha_o\alpha_{o1}(1-k_{\alpha1}) + (1+k_\alpha) \left(1 - \frac{\alpha_{o1}^2}{2}\right);$$

$$\epsilon_{25} = k_{\delta1}\epsilon'_{15} + \epsilon'_{25}; \epsilon'_{25} = -\alpha_o(1-k_{\alpha1})^2 + \alpha_{o1}(1+k_\alpha)(1-k_{\alpha1});$$

$$\epsilon_{35} = k_{\delta1}\epsilon'_{25} + \epsilon'_{35}; \epsilon'_{35} = -(1+k_\alpha)(1-k_{\alpha1})^2; \epsilon_{45} = k_{\delta1}\epsilon'_{35}.$$

$$v_{y5} = B_5 \sqrt{B_{05} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{15}\varphi + B_{25}\varphi^2 + B_{35}\varphi^3}, \quad (15)$$

де  $B_5 = \sqrt{\frac{2F_{\delta10}\ell_2}{m}}$ ;

$$B_{05} = \frac{\epsilon_{05}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{15}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{25}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3\epsilon_{35}}{k_\alpha^4} + \frac{\alpha_o^4\epsilon_{45}}{k_\alpha^5};$$

$$B_{15} = \frac{\epsilon_{15}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{25}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{35}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3\epsilon_{45}}{k_\alpha^4};$$

$$B_{25} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{25}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{35}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{45}}{k_\alpha^3} \right);$$

$$B_{35} = \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_{35}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{45}}{k_\alpha^2} \right); B_{45} = \frac{\epsilon_{45}}{4k_\alpha}.$$

6.  $\frac{mv_{y6}^2}{2} = F_{\delta20}\ell_2 \int \frac{[\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi] \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) (1+k_{\delta2}\varphi)}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi =$

$$= F_{\delta20}\ell_2 \int \frac{\epsilon_{06} + \epsilon_{16}\varphi + \epsilon_{26}\varphi^2 + \epsilon_{36}\varphi^3 + \epsilon_{46}\varphi^4}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{06} = \alpha_o$ ;  $\epsilon_{16} = k_{\delta2}\epsilon_{02} + \epsilon'_{16}$ ;  $\epsilon'_{16} = (1+k_\alpha)$ ;

$$\epsilon_{26} = k_{\delta1}\epsilon'_{16} + \epsilon'_{26}; \epsilon'_{25} = -\frac{\alpha_o}{2};$$

$$\epsilon_{36} = k_{\delta1}\epsilon'_{26} + \epsilon'_{36}; \epsilon'_{36} = -\frac{1}{2}(1+k_\alpha); \epsilon_{46} = k_{\delta1}\epsilon'_{36}.$$

$$v_{y6} = B_6 \sqrt{B_{06} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{16}\varphi + B_{26}\varphi^2 + B_{36}\varphi^3 + B_{46}\varphi^4}, \quad (16)$$

де  $B_6 = \sqrt{\frac{2F_{\delta20}\ell_2}{m}}$ ;

$$B_{06} = \frac{\epsilon_{06}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{16}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{26}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3\epsilon_{36}}{k_\alpha^4} + \frac{\alpha_o^4\epsilon_{46}}{k_\alpha^5};$$

$$B_{16} = \frac{\epsilon_{16}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{26}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{36}}{k_\alpha^3} - \frac{\alpha_o^3\epsilon_{46}}{k_\alpha^4};$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{26}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{36}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{46}}{k_\alpha^3} \right);$$

$$B_{36} = \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_{36}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{46}}{k_\alpha^2} \right); B_{46} = \frac{\epsilon_{46}}{4k_\alpha}.$$

7.  $\frac{mv_{y7}^2}{2} = F_\kappa\ell_2 \int \frac{[(1-k_\gamma)\varphi - \gamma_o][\alpha_o + (1+k_\alpha)\varphi]}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi =$

$$= F_\kappa\ell_2 \int \frac{\epsilon_{07} + \epsilon_{17}\varphi + \epsilon_{27}\varphi^2}{k_\alpha\varphi + \alpha_o} d\varphi,$$

де  $\epsilon_{07} = -\alpha_o\gamma_o$ ;  $\epsilon_{17} = -\alpha_o(1-k_\gamma) + \gamma_o(1+k_\alpha)$ ;

$$\epsilon_{27} = (1+k_\alpha)(1-k_\gamma);$$

$$v_{y7} = B_7 \sqrt{B_{07} \ln|k_\alpha \varphi + \alpha_o| + B_{17}\varphi + B_{27}\varphi^2}, \quad (17)$$

де  $B_7 = \sqrt{\frac{2F_\kappa\ell_2}{m}}$ ;  $B_{07} = \frac{\epsilon_{07}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{17}}{k_\alpha^2} + \frac{\alpha_o^2\epsilon_{27}}{k_\alpha^3}$ ;

$$B_{17} = \frac{\epsilon_{17}}{k_\alpha} - \frac{\alpha_o\epsilon_{27}}{k_\alpha^2}; B_{27} = \frac{\epsilon_{27}}{2k_\alpha};$$

Повна проекція швидкості центра ваги трактора на вісь Оу, як сума складових, отриманих рівняннями (11...17) буде:

$$v_y = \sum_{i=1}^7 v_{yi} + B.$$

Постійну  $B$  знаходимо з умови (  $\varphi = 0; v_y = v_o \sin \alpha_o$  ) :  $B = v_o \sin \alpha_o - \sum_{i=1}^7 \sqrt{B_i B_{0i} \ln |\alpha_o|}$ .

Тоді  $v_y = \sum_{i=1}^7 v_{yi} - \sum_{i=1}^7 \sqrt{\ln |\alpha_o| \sum_{i=1}^7 B_i B_{0i}}$ .

Повна швидкість:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . (18)

**Висновок.** Розроблено метод аналітичного рішення диференціальних рівнянь криволінійного руху чотирьохколісного трактора з урахуванням всіх сил, діючих на агрегат. Отримані рівняння дозволяють виконати аналіз залежностей швидкості руху МТА в повороті від різних силових факторів і геометричних параметрів.

#### Список використаної літератури:

1. Ягубова Е.В. Метод обеспечения устойчивости колёсного трактора, оснащенного автоматической системой управления движением, при работе на склоне : дис. канд. техн. наук : 05.05.03 – «Колесные и гусеничные машины» / Ягубова Евгения Вячеславовна. – Москва, 2016. – 164 с.
2. Рославцев А.В. Разработка методов и средств исследования движения машинно-тракторных агрегатов : автореф. дис. докт. техн. наук [Электронный ресурс] / Анатолий Васильевич Рославцев. – 1996. – Режим доступа: <http://tekhnosfera.com/razrabotka-metodov-i-sredstv-issledovaniya-dvizheniya-mashinno-traktornyh-agregatov>.
3. Калинин Е.И. Уравнение движения навесного пахотного агрегата [Электронный ресурс] / Е.И.Калинин. – Режим доступа: [http://www.rusnauka.com/16\\_NPRT\\_2009/Agricole/47638.doc.htm](http://www.rusnauka.com/16_NPRT_2009/Agricole/47638.doc.htm).
4. Трухнов А.Л. Три оси [Электронный ресурс] / А.Л. Трухнов, Е.Л.Карташевич. – Режим доступа: <http://www.studfiles.ru/preview/4307305/>.
5. Гуськов В.В. Тракторы. Теория. Учебник для студентов вузов по спец. «Автомобили и тракторы» / [В.В. Гуськов, Н.Н. Велев, Ю.Е. Атаманов та ін.]. – Москва: Машиностроение, 1988. – 376 с.

#### **Мельник В.И., Довжик М.Я., Татьяначенко Б.Я., Соларев А.А., Сиренко Ю.В. УРАВНЕНИЕ СКОРОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА**

*В статье представлено новое решение аналитической задачи динамического криволинейного движения на примере четырёхколёсного трактора с учетом всех действующих сил.*

**Ключевые слова:** четырёхколёсный трактор, криволинейное движение, уравнение Даламбера, коэффициент интенсивности.

#### **Melnik V.I., Dovzhik M.J., Tatyanchenko B.J., Solarov O.O., Sirenko Y.V., THE EQUATION OF THE SPEED OF THE TRACTOR'S MOVERS CURVILINEAR MOTION**

*The authors propose an analytical method for solving differential equations curvilinear motion of the tractor unit and determine the main parameters of movement with all external loads acting on the unit in this article. It allows you to get results with a fairly high degree of accuracy.*

*Dynamic tasks of the curvilinear motion wheeled vehicles require assembly second order differential equations. It contains a number of variables that are very complex and are usually dependent on many factors.*

*The equations that describe the movements of the machine-tractor unit (MTU), take into account the dynamic correlations on the principle of D'Alembert or at the Lagrange equations of the second kind. This takes into account all the forces of interaction between the tractor, ground and trailer equipment or attachments. Due to the complexity of this power action it is necessary to allow and simplify some moments. The article presents a new analytical solution of the problem of dynamic curvilinear motion of an example of tractor MTZ-82 with all active forces.*

**Keywords:** four-wheeled tractor, curvilinear motion, D'Alembert equation, coefficient of intensity.

Стаття надійшла в редакцію: 02.10.2016

Рецензент: д.т.н., проф. Топілін Г.Є.