

АНАЛІЗ І ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЕУТВОРЕНЬ У ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ

В. С. Ловейкін, д.т.н., професор,

Ю. В. Човнюк, к.т.н., доцент,

А. П. Ляшко, к.т.н.

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Визначені закони зміни у часі швидкості обертання валу двигуна дискретної (із зосередженими параметрами) механічної системи під дією рушійного (результуючого) моменту, які мінімізують небажані коливання й враховують ефекти інерції зовнішніх силових факторів.

Наведені концепція та обґрунтування побудови теорії оптимальних гасників вібрацій для дискретно-континуальних систем з конвекцією. Аналіз відбитих хвиль від закріплень, з однієї сторони, вказує шляхи побудови вказаної теорії, а з іншої – дозволяє встановити причини нестійкостей систем з конвекцією і у деяких випадках розвинути теорію їх прогнозування.

Детально досліджена просторово – часова еволюція хвиль, відбитих від закріплень, встановлені умови, за яких закріплення гасника не відбиває хвилю, що виникає. Розраховані параметри оптимальних гасників поздовжніх коливань та згинних коливань балки на пружній основі з натягом. Встановлені дисперсійні співвідношення, які зв'язують між собою хвильовий вектор та частоту вказаного виду коливань. Розглянута модель, яка адекватно описує поперечні коливання нескінченної струни, вдовж котрої рівномірно переміщуються притискуючі валки. При цьому врахований подвійний ефект Доплера, який спостерігається при відбитті хвиль від рухомої перешкоди.

Якщо хвиля й перешкода рухаються назустріч один одному, тоді енергія хвилі буде збільшуватись, у протилежному випадку – зменшуватись. При цьому змінюється й щільність енергії самої хвилі не тільки у результаті здійснення над хвилею роботи зі сторони сил, які переміщують границю, але й за рахунок стискування самої хвилі. Встановлені для даного процесу закони збереження хвильової енергії.

Ключові слова: аналіз, оптимізація, параметри, нестационарність, коливання, хвилеутворення, дискретно-континуальні системи, механіка.

Постановка проблеми. При нестационарних режимах руху роторів (валів) двигунів механічних систем, які розглядаються у межах дискретних моделей, тобто як системи із зосередженими параметрами, як правило, виникають небажані коливання при їх пуску/гальмуванні чи реверсуванні. Задля зменшення їх негативного впливу на функціонування механічної системи у цілому необхідно регулювати закон зміни у часі частоти обертання валу двигуна, який би врахував інерційні ефекти, виникаючі у зовнішніх силових/гармонічних збуреннях. Велика кількість широко відомих у фізиці хвильових ефектів практично не враховується при аналізі динамічної поведінки пружних систем. У деякій мірі це пояснюється тим, що особливості прояву хвильових ефектів у ситуація, типових для динаміки машин, залишаються невивченими, іншими словами, відсутня культура знань про хвилі у різноманітних задачах машинознавства. Корисність таких знань для розв'язування технічних проблем нижче демонструється для дискретно-континуальних систем з конвекцією (трубопроводи, передачі (механічні) з гнучкими зв'язками, стрічкопротяжні механізми, конвеєри і т.п.), а також для дорожніх конструкцій, які знаходяться під дією (впливом) несучих рухомих перевантажень. Зокрема, аналіз відбитих хвиль від різноманітних закріплень дискретно-континуальних систем, з однієї сторони, вказує шляхи побудови теорії оптимальних гас-

ників вібрацій, а з іншої дозволяє з'ясувати причини нестійкостей систем з конвекцією й у деяких випадках розвинути теорію їх прогнозування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Теорія оптимальних гасників вібрацій розвинута у роботах авторів [1–10]. Оптимальні гасники поздовжніх коливань розглянуті у [1], а у [2] досліджені властивості гасників згинних коливань балки на пружній основі з натягом. Різноманітні аспекти хвилеутворень у дискретно-континуальних системах вивчені у [3–5]. Оптимальні гасники для однорідних дискретних структур, зокрема, гасники крутих коливань у трансмісіях вивчались у [6, 7]. Подвійний ефект Доплера вивчається авторами [8, 9], котрі вивчають поперечні коливання нескінченної струни, вдовж котрої рівномірно переміщуються притискуючі валки. Автори [10] досліджують загальні властивості хвильових процесів у одновимірних механічних системах змінної довжини й встановили закони збереження хвильової енергії у них. Проте, на думку авторів даного дослідження, особливості хвилеутворень у дискретно-континуальних системах з конвекцією вивчені недостатньо, зокрема, просторово-часова еволюція вказаних утворень.

Формулювання цілей статті полягає у обґрунтуванні: а) законів зміни у часі швидкостей обертання роторів (валів) двигунів механічних систем із зосередженими параметрами, які суттєво зменшують амплітуди можливих виникаючих

коливань, а також враховують інерційні ефекти зовнішніх моментно-силових збурень; б) методів розрахунку оптимальних гасників вібрацій, вібраційно-хвильових утворень у дискретно-континуальних системах з конвекцією із врахуванням особливостей просторово-часової еволюції хвиль, відбитих від закріплень.

Виклад основного матеріалу дослідження.

1. Використання сплайн-апроксимацій по часу для обґрунтування оптимальних режимів пуску/гальмування дискретних механічних систем.

1.1. Пуск двигуна.

Рівняння руху ротора двигуна, який функціонує у перехідному режимі (пуску) має вид:

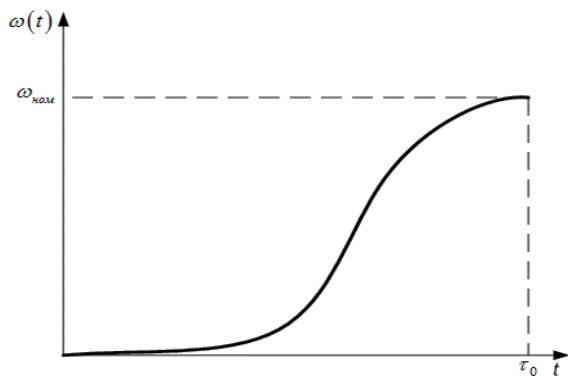
$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{дв}} - M_{\text{оп}} = M_p(t), \quad (1)$$

де I – момент інерції рухомих частин двигуна приведений до вісі ротора/вала, ω – частота обертання, t – час, $M_{\text{дв}}$ – момент, створений при пуску двигуном (пусковий момент), $M_{\text{оп}}$ – мо-

$$\omega|_{t=0} = 0; \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 0; \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=0} = 0; \omega|_{t=\tau_0} = \omega_{\text{ном}}; \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=\tau_0} = 0; \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=\tau_0} = 0, \quad (5)$$

де $\omega_{\text{ном}}$ – номінальне значення частоти обертання ротора двигуна. (Саме такі початково-кінцеві умови забезпечують набір ротором за період пуску τ_0 номінальної частоти й дозволяють уникнути небажаних при цьому коливань системи). Розв'язок (4) при умовах (5) має вид:

$$\omega(t) = \omega_{\text{ном}} \cdot \left\{ 10 \cdot \frac{t^3}{\tau_0^3} - 15 \cdot \frac{t^4}{\tau_0^4} + 6 \cdot \frac{t^5}{\tau_0^5} \right\}. \quad (6)$$



мент опору рухові вала/ротора двигуна, $M_p(t)$ – рушійний (сумарний) момент двигуна у процесі пуску.

Для визначення першої та другої похідних по часу для функції $M_p(t)$ маємо з (1):

$$I \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{dM_p(t)}{dt}; I \cdot \frac{d^3\omega}{dt^3} = \frac{d^2M_p(t)}{dt^2} \quad (2)$$

У якості критерію якості руху даної механічної системи обираємо наступний:

$$\int_0^{\tau_0} \left(\frac{d^2M_p(t)}{dt^2} \right)^2 dt \Rightarrow \min, \quad (3)$$

де τ_0 – тривалість режиму пуску. Необхідною умовою досягнення критерію якості руху (3), з урахуванням рівнянь (2), є рівняння Ейлера-Пуассона для $\omega(t)$:

$$\frac{d^6\omega}{dt^6} = 0. \quad (4)$$

Розв'язок (4) шукаємо при наступних початкових/кінцевих (крайових) умовах:

Тоді $M_p(t)$, який спонукає до виникнення залежності $\omega(t)$ (6), має наступний вид:

$$M_p(t) = \frac{I \cdot \omega_{\text{ном}} \cdot 30}{\tau_0} \cdot \left\{ \frac{t^2}{\tau_0^2} - 2 \cdot \frac{t^3}{\tau_0^3} + \frac{t^4}{\tau_0^4} \right\} \quad (7)$$

Графіки залежності $\omega(t)$ (6) та $M_p(t)$ наведені на рис. 1.

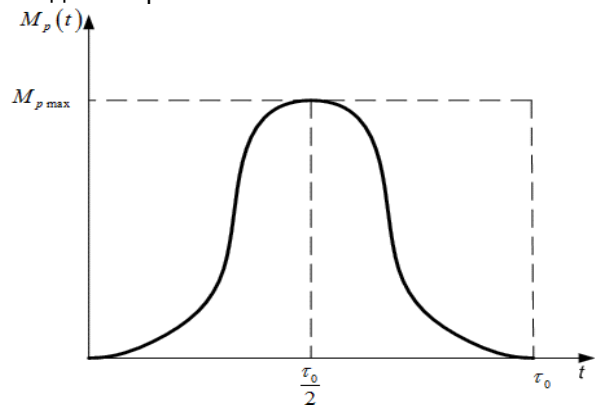


Рис. 1. Залежність $\omega(t)$, $M_p(t)$ при пуску: $M_{p \text{ max}} = \frac{15}{8} \cdot \frac{I \cdot \omega_{\text{ном}}}{\tau_0}$.

1.2. Процес гальмування (вибіг частоти).

Рівняння руху ротора двигуна, який функці-

онує у перехідному режимі (гальмування) має вид:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = -M_z - M_{on} = -M_{zc}(t), \quad (8)$$

де M_z – гальмівний момент, M_{on} – сумарний гальмівний момент.

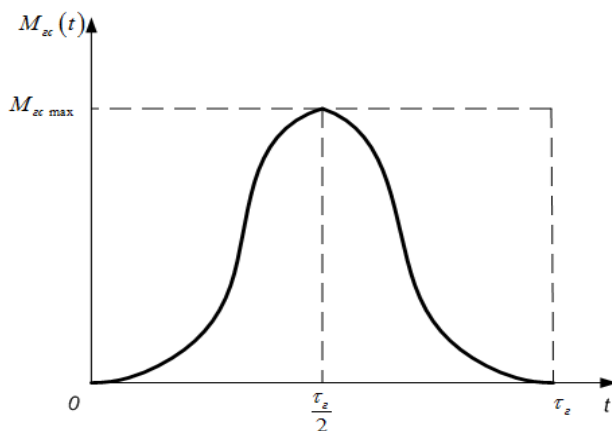
У якості критерію якості руху даної механічної системи обираємо наступний:

$$\omega|_{t=0} = \omega_{ном}; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=0} = 0; \quad \omega|_{t=t_z} = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=t_z} = 0; \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=t_z} = 0. \quad (10)$$

Розв'язком (4) за умов (10) є:

$$\omega(t) = \omega_{ном} \cdot \left\{ 1 - 10 \cdot \frac{t^3}{\tau_z^3} + 15 \cdot \frac{t^4}{\tau_z^4} - 6 \cdot \frac{t^5}{\tau_z^5} \right\}. \quad (11)$$

При цьому з (8) випливає наступний закон зміни у часі M_{zc} :



$$\int_0^{\tau_z} \left(\frac{d^2 M_{zc}(t)}{dt^2} \right)^2 dt \Rightarrow \min. \quad (9)$$

Необхідна умова досягнення критерію (9) – це рівняння Ейлера-Пуассона (4) з наступними початково-кінцевими (крайовими) умовами:

$$M_{zc}(t) = \frac{I \cdot \omega_{ном} \cdot 30}{\tau_z} \cdot \left\{ \frac{t^2}{\tau_z^2} - 2 \cdot \frac{t^3}{\tau_z^3} + \frac{t^4}{\tau_z^4} \right\}. \quad (12)$$

На рис. 2 наведені залежності $\omega(t)$ (11) та $M_{zc}(t)$ (12). Величина $M_{zc \max} = \frac{15}{8} \cdot \frac{I \cdot \omega_{ном}}{\tau_z}$.

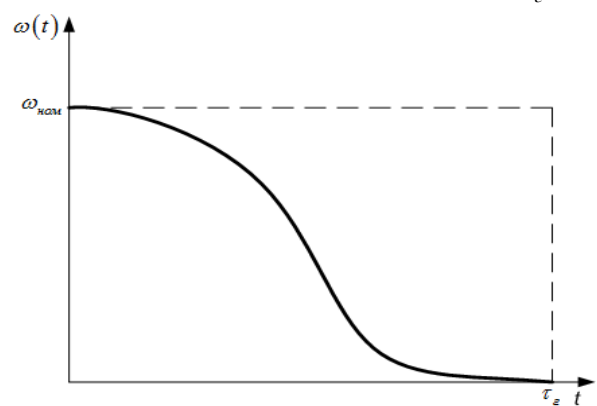


Рис. 2. Залежності $\omega(t)$ (11) та $M_{zc}(t)$ (12): $M_{zc \max} = \frac{15}{8} \cdot \frac{I \cdot \omega_{ном}}{\tau_z}$

2. Розрахунок параметрів оптимального гасника поздовжніх коливань.

Поздовжні коливання стрижня описуються хвильовим рівнянням:

$$u_{tt} - c_{11}^2 \cdot u_{xx} = 0, \quad (13)$$

де $u(x,t)$ – поздовжнє відхилення перерізу

стрижня; $c_{11}^2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – швидкість розповсю-

дження поздовжніх хвиль; E – модуль пружності матеріалу стрижня; ρ – питома щільність матеріалу розв'язок хвильового рівняння у загальному випадку можна подати у вигляді суперпозиції двох біжучих у протилежних напрямках хвиль:

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_{11}}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_{11}}\right). \quad (14)$$

Ці хвилі зв'язані між собою завдяки крайовим (граничним) умовам. У випадку закріплення, яке характеризується масою m , жорсткістю k та коефіцієнтом в'язкості α , маємо

$$\left\{ E \cdot F \cdot u_x + (m \cdot \ddot{u} + \alpha \cdot \dot{u} + k \cdot u) \right\} \Big|_{x=0} = 0, \quad (15)$$

де F – площа поперечного перерізу стрижня. Вважаємо, що закріплення знаходиться у точці $x=0$. Звідси, використовуючи (14), знаходимо

зв'язок між падаючою на закріплення $f\left(t - \frac{x}{c_{11}}\right)$

й відбитої від нього $g\left(t + \frac{x}{c_{11}}\right)$ хвилями:

$$m \cdot \ddot{g}(t) + (\alpha + F \cdot \sqrt{E \cdot \rho}) \cdot \dot{g}(t) + k \cdot g(t) = \dots \quad (16)$$

$$= m \cdot \ddot{f}(t) + (\alpha - F \cdot \sqrt{E \cdot \rho}) \cdot \dot{f}(t) + k \cdot f(t)$$

Знайдемо умови, за яких закріплення не відбиває хвилю, тобто відбитої хвилі не існує. З (16) випливає, що параметри такого закріплення, тобто оптимального гасника поздовжніх коливань, наступні:

$$m = k = 0, \quad \alpha = F \cdot \sqrt{E \cdot \rho}. \quad (17)$$

Цей результат співпадає з отриманими у [1].

3. Розрахунок оптимального гасника згинних коливань балки на пружній основі з натягом.

Розглянемо задачу про оптимальний гасник згинних коливань балки на пружній основі з

$$\begin{cases} (N + \kappa \cdot G \cdot F) \cdot u_{xx} - \rho \cdot F \cdot u_{tt} - h \cdot u + \kappa \cdot G \cdot F \cdot \varphi_x = 0, \\ I \cdot E \cdot \varphi_{xx} - \rho \cdot F \cdot \varphi_{tt} - \kappa \cdot G \cdot F \cdot \varphi + \kappa \cdot G \cdot F \cdot u_x = 0. \end{cases} \quad (18)$$

де N – натяг; G – модуль зсуву; I – момент інерції перерізу при обертанні; h – жорсткість пружної основи; κ – коефіцієнт Тимошенка. Вважаючи

натягом, вперше досліджено у [2]. У випадку моделі Тимошенка поперечне відхилення серединної лінії балки $u(x,t)$ та кут повороту її перерізу $\varphi(x,t)$ описуються системою рівнянь:

$$\begin{cases} (N + \kappa \cdot G \cdot F) \cdot u_x - \kappa \cdot G \cdot F \cdot \varphi + m \cdot \ddot{u} + \alpha \cdot \dot{u} + k \cdot u \Big|_{x=0} = 0, \\ I \cdot E \cdot \varphi_x - I_0 \cdot \ddot{\varphi} + \beta \cdot \dot{\varphi} + G_0 \cdot \varphi \Big|_{x=0} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

де m , I_0 , k , G_0 , α та β – параметри, які характеризують інерційність, пружність та в'язкість закріплення.

Для однозначного розв'язку задачі необхід-

$$u = u_0 \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)], \varphi = \varphi_0 \cdot \exp[i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)], i^2 = -1. \quad (20)$$

Амплітуди u_0 та φ_0 , а також частота ω й хвильове число k зв'язані між собою за допомогою співвідношень (18). Причому для останніх,

балку напівнескінченною ($-\infty < x < 0$), умови на її бічній поверхні записуємо у наступному виді [3, 4]

но ще задати умову при $x \rightarrow -\infty$. Будемо вважати, що на нескінченності задане джерело частоти ω , яке породжує згинну хвилю

згідно (18), маємо так зване дисперсійне рівняння:

$$\begin{cases} c_{11}^2 \cdot (c_1^2 + c_0^2) \cdot k^4 - (c_1^2 + c_0^2 + c_{11}^2) \cdot \omega^2 \cdot k^2 + \omega^4 + (\omega_2^2 \cdot c_0^2 + \omega_1^2 \cdot c_{11}^2) \cdot k^2 - \\ - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \omega^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0, c_{11} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, c_1 = \sqrt{\frac{\kappa \cdot G}{\rho}}, c_0 = \sqrt{\frac{N}{\rho \cdot F}}, \\ \omega_1 = \sqrt{\frac{h}{\rho \cdot F}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{E}{I_0}}. \end{cases} \quad (21)$$

З аналізу дисперсійного рівняння (21) впливає, що якщо частота джерела $\omega < \omega_1$, тоді хвиля збуджуватись джерелом не буде (k – уявні). При $\omega_2 > \omega > \omega_1$ джерело збуджує одну зростаючу хвилю й одну спадну вповодж $+x$ за законом експоненти осциляцію. Коли $\omega > \omega_2$, джерело може збуджувати дві хвилі.

Практичний інтерес зазвичай представляє другий випадок ($\omega_2 > \omega > \omega_1$), коли згинні хвилі розповсюджуються вповодж балки, але їх частоти

достатньо низькі, тому довжини хвиль набагато більше поперечних розмірів балки. У цьому випадку спадаюча хвиля при взаємодії із закріпленням породжує одну відбиту хвилю й одну спадаючу вповодж $-x$ за законом експоненти осциляцію [5], амплітуди котрих при ідеальному узгодженні балки з закріпленням будуть дорівнювати нулю. Отже, умова на параметри оптимального гасника виникає після підстановки падаючої хвилі (20) у співвідношення (19):

$$\begin{cases} \omega_1^2 - \omega + \gamma \cdot \omega \cdot k = 0; \mu \cdot \omega^2 - \xi = 0; \left[\omega_1^2 - \omega^2 + k \cdot (c_1^2 + c_0^2) \right] \cdot \left\{ \frac{\eta}{c_1^2} \cdot \omega^2 - \zeta \right\} = 0; \\ \left[\omega_1^2 - \omega^2 + k \cdot (c_1^2 + c_0^2) \right] \cdot (k - \delta \cdot \omega) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{де } \mu = \frac{m}{\rho \cdot F}, \eta = \frac{I_0}{I \cdot E}, \xi = \frac{k}{\rho \cdot F}, \zeta = \frac{G_0}{I \cdot E}, \gamma = \frac{\alpha}{\rho \cdot F}, \delta = \frac{\beta}{I \cdot E}.$$

Звідси із врахуванням (21) знаходимо шукані параметри оптимального гасника:

$$\alpha = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega \cdot k} \cdot \rho \cdot F, \beta = I \cdot E \cdot \frac{k}{\omega}, \quad (23)$$

$$m=k=0 \text{ (чи } \frac{m}{k} = \omega^2), I_0=G_0=0 \text{ (чи } \frac{I_0}{G_0} = \omega^2), \text{ причому } k = \left[\left(B + \frac{\sqrt{B^2 + D^2}}{(c_1^2 + c_0^2)} \right) \right]^{1/2} / c_{11},$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (c_1^2 + c_0^2 + c_{11}^2) \cdot \omega^2 - (\omega_2^2 \cdot c_0^2 + \omega_1^2 \cdot c_{11}^2) \right\},$$

$$D = c_{11}^2 \cdot (c_0^2 + c_1^2) \cdot \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot (\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_1^1 \cdot \omega_2^1) \right]. \quad (24)$$

У діапазоні низьких частот ($\omega \ll \omega_2$), коли швидкостей розповсюдження поздовжніх та зсувних хвиль набагато менші швидкостей розповсюдження поздовжніх та зсувних хвиль:

$$\frac{\omega}{k} \ll (c_1, c_{11}),$$

$$k = c_{11}^{-1} \cdot \omega_2^{1/2} \cdot \left\{ \frac{\left[-c_0^2 \cdot \omega^2 + \sqrt{c_0^4 \cdot \omega^4 + 4 \cdot c_{11}^2 \cdot (c_1^2 + c_0^2) \cdot (\omega^2 - \omega_1^2)^2} \right]^{1/4}}{\left[2 \cdot (c_1^2 + c_0^2) \right]} \right\}. \quad (25)$$

У цьому наближенні при відсутності натягу ($c_0=0$) й пружної основи ($\omega_1=0$), тобто для моделі балки Бернуллі-Ейлера,

$$k = \sqrt{\frac{\omega_2 \cdot \omega}{(c_1 \cdot c_{11})}} = \left(\frac{E \cdot \rho}{[I \cdot E]} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{\omega}, \quad (26)$$

і, відповідно,

$$\alpha = \rho \cdot F \cdot \left(\frac{I \cdot E}{[\rho \cdot F]} \right)^{1/4} \cdot \omega^{1/2}, \beta = I \cdot E \cdot \left(\frac{\rho \cdot F}{[I \cdot E]} \right)^{1/4} \cdot \omega^{-1/2} \quad (27)$$

При достатньо великому натягу для $\omega < \left(\frac{c_0^2 \cdot \omega^2}{c_{11} \cdot c_1} \right)$ $c_0 < (c_1, c_{11})$, тобто у випадку

струнної моделі при $\omega_1=0$, $k = \frac{\omega}{c_0}$ з (23) знаходи-

мо, що $\alpha = \sqrt{N \cdot \rho \cdot F}$. Цей результат аналогічний отриманому вище для поздовжніх хвиль у однорідному стрижні.

4. Розрахунок поперечних коливань нескінченної струни, вдовж котрої рівномірно переміщується притискуючі валки.

При відбитті хвиль від рухомої перешкоди спостерігається так званий подвійний ефект Доплера [8], котрий полягає у зміщенні частоти хвиль. Цей ефект супроводжується зміною енергії, яку переносить хвиля. Якщо хвиля й перешкода рухаються назустріч один одному, тоді енергія хвилі буде збільшуватись, у протилежному випадку – зменшуватись [9].

У якості прикладу реалізації вказаного ефекту розглянемо задачу про поперечні коливання нескінченної струни, вдовж котрої рівномірно переміщуються притискуючі валки. Вважаючи таке закріплення абсолютно жорстким й падаючу хвилю заданою:

$$u^{nad.} = u_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x), k = \frac{\omega}{c}, c_0 = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad (28)$$

з хвильового рівняння:

$$u_{tt} - c_0^2 \cdot u_{xx} = 0 \quad (29)$$

й умови на рухомій границі:

$$u|_{x=v \cdot t} = 0, v = const < c_0, \quad (30)$$

знаходимо зв'язок відбитої хвилі $g\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$ й падаючої:

$$u_0 \cdot \cos[(\omega \cdot t) \cdot (1 - \beta)] + g\left[t \cdot (1 + \beta)\right] = 0, \beta = \frac{v}{c_0} \quad (31)$$

Розуміючи у подальшому під $t(1+\beta)$ аргумент відбитої хвилі $t+x/c_0$, знаходимо:

$$u^{eидб.} = g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = -u_0 \cdot \cos(\omega_r \cdot t + k_r \cdot x), k_r = \frac{\omega_r}{c_0}, \omega_r = \frac{1-\beta}{1+\beta} \cdot \omega. \quad (32)$$

Після відбиття хвиля залишається гармонічною і її амплітуда не змінюється. Перетворення зводиться тільки до зміни частоти за законом подвійного ефекту Доплера, згідно котрому частота зростає при русі границі назустріч хвилі

($v < 0$) і зменшується, якщо хвиля та границя рухаються в одному напрямку ($v > 0$).

Зміна частоти призводить до зміни щільності енергії, яку переносить хвиля:

$$\begin{cases} h_{над.} = \frac{\rho}{2} \cdot (u_t^{над.})^2 + \frac{N}{2} \cdot (u_x^{над.})^2 = \rho \cdot \omega^2 \cdot u_0 \cdot \sin^2(\omega \cdot t - k \cdot x), \\ h_{eидб.} = \rho \cdot \omega_r^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x) = \rho \cdot \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \cdot \omega^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + k \cdot x) \end{cases} \quad (33)$$

Отже,

$$\frac{h_{над.}}{\omega^2} = \frac{h_{eидб.}}{\omega_r^2}, \text{ чи } h_{eидб.} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \cdot h_{над.} \quad (34)$$

Отримана зміна щільності енергії відбувається не тільки у результаті виконання над хвилю роботи зі сторони сил, які зміщують границю, але й за рахунок стиснення хвилі. Для пояснення сказаного вище розглянемо падіння на границю хвилі, що складається зі скінченного числа періодів та маючи довжину l_0 . Тривалість взаємодії τ зв'язана з l_0 співвідношенням $\tau = \frac{(l_0 + vt)}{c} = (l_0 + vt)/c$. Просторова довжина збурення після взаємодії $l_{eидб.} = \frac{(c + v)}{\tau^{-1}}$. Виключаючи з цих співвідношень τ , матимемо:

$$\frac{l_{eидб.}}{l_0} = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{1-\beta}{1+\beta}. \quad (35)$$

У силу цього відношення енергії хвилі ($\varepsilon = h \cdot \nu$) до її частоти у результаті взаємодії з рухомою границею не змінюється:

$$\frac{\varepsilon_{eидб.}}{\omega_r} = \frac{\varepsilon_{над.}}{\omega} = const. \quad (36)$$

Це означає збереження кількості квантів хвильової енергії [10].

Висновки

1. Обґрунтовані основи побудови теорії оптимальних гасників вібрацій та коливань різного типу у дискретно-континуальних системах з конвекцією.

2. Результати досліджень можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку оптимальних гасників небажаних коливань, що виникають у машинах та конструкціях як на етапах їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список використаної літератури:

1. Горошко О. А. Критические случаи движения стержня с демпфером на конце / О. А. Горошко // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 8. – С. 129–132.
2. Весницкий А. И. К построению демпфера изгибных колебаний балки / А. И. Весницкий, Н. Д. Романов // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 6. – С. 122–124.
3. Весницкий А. И. К вопросу о граничных условиях в задачах динамики волновых систем с движущимися закреплениями и нагрузками / А. И. Весницкий, Г. А. Уткин // Волны и дифракция. – 1981. – Вып. 1. – С. 365–368.
4. Весницкий А. И. Граничные условия для изгибных колебаний балки с движущимся упруго-инерциальным закреплением / А. И. Весницкий, В. Н. Мангова // ДАН УССР. – 1982. – № 5. – С. 33–35.
5. Мангова В. Н. О поперечных колебаниях стержня с движущимся жестким закреплением / В. Н. Мангова // Прикладная механика. – 1981. – Т. 16, № 12. – С. 126–129.
6. Весницкий А. И. Оптимальное гашение крутильных колебаний в трансмиссиях / А. И. Весницкий, В. М. Зябликов, И. В. Милосердова, В. Ф. Смирнов // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. - № 5. – С. 72–76.
7. Зябликов В. М. Уменьшение динамических нагрузок в крутильных системах согласованием импедансов / В. М. Зябликов, В. Ф. Смирнов // Известия вузов. Машиностроение. – 1985. - № 9. – С. 82–87.
8. Островский Л. А. О некоторых парадоксах движущейся границы в электродинамике / Л. А. Островский // Успехи физических наук. – 1975. – Т. 117, № 2. – С. 315–326.
9. Весницкий А. И. Теория колебаний распределённых параметрических систем / А. И. Весницкий, А. И. Потапов. – Горький : ГГУ, 1977. – Ч.1. – 68 с.
10. Весницкий А. И. О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах

Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Ляшко А.П. АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ХВИЛЕУТВОРЕНЬ В ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Определены законы изменения во времени скорости вращения вала двигателя дискретной (с сосредоточенными параметрами) механической системы под действием движущего (результатирующего) момента, которые минимизируют нежелательные колебания и учитывают эффекты инерции внешних силовых факторов.

Приведены концепция и обоснование построения теории оптимальных гасителей вибрации для дискретно-континуальных систем с конвекцией. Анализ отраженных волн от креплений, с одной стороны, указывает пути построения указанной теории, а с другой – позволяет установить причины неустойчивостей систем с конвекцией и в некоторых случаях развить теорию их прогнозирования.

Подробно исследована пространственная временная эволюция волн, отраженных от креплений, установлены условия, при которых крепления гасителя не отражает волну, которая возникает. Рассчитаны параметры оптимальных гасителей продольных колебаний и изгибных колебаний балки на упругом основании с натягом. Установлены дисперсионные соотношения, связывающие между собой волновой вектор и частоту указанного вида колебаний. Рассмотрена модель, которая адекватно описывает поперечные колебания бесконечной струны, вдоль которой равномерно перемещаются прижимные валки. При этом учтен двойной эффект Доплера, который наблюдается при отражении волн от движущегося препятствия.

Если волна и препятствие движутся навстречу друг другу, тогда энергия волны будет увеличиваться, в противном случае - уменьшаться. При этом изменяется и плотность энергии самой волны не только в результате совершения над волной работы по стороны сил, которые перемещают границу, но и за счет сжатия самой волны. Установленные для данного процесса законы возмущения волновой энергии.

Ключевые слова: анализ, оптимизация, параметры, нестационарность, колебания, волнообразования, дискретно-континуальные системы, механика.

Loveykin V. S., Chovnyuk Yu.V., Liashko A.P. ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF NONSTATIONARY OSCILLATIONS AND WAVES' CREATIONS PARAMETERS IN AN DISCRETE-CONTINUAL MECHANICAL SYSTEMS

Time laws of motor' shaft speed of discrete mechanical system under the influence of the driving moment are defined. They minimize undesirable oscillations and consider effects of inertia of external power factors

The conception and the substantiation of theorization of optimal vibration damper for discrete and continual system are submitted. On the one hand the analysis of reflected waves from fastenings specifies ways of the specified theorization. On the other it solves to determine causes of system instability with convection. Also it solves to develop the theory of their forecasting in some cases.

The spatial temporal evolution of waves reflected from fastenings is analyzed. The conditions under which fastenings of a damper doesn't reflect a wave are established. Parameters of optimal damper of longitudinal vibrations and flexural vibrations of beam on elastic foundation with a tension are calculated. Dispersion relations, which make a connection between wavevector and frequency of the specified oscillation mode, are established. Parameters of an optimal damper of torsional oscillations in transmissions are calculated. Their model serves the uniform system with the lumped parameters in which there are not internal resonances. The model which adequately describes longitudinal vibrations of an infinite string is considered. In this model pressure roller evenly move along a string. At the same time the Doppler's double effect which is observed at waves reflection from moving restriction is considered.

Keywords: analysis, optimization, parameters, nonstationary, oscillations, waves' creation, discrete-continual systems, mechanics.

Стаття надійшла в редакцію: 04.10.2016

Рецензент: д.т.н., проф. Гецович Є.М.