робки даних. Обґрунтовано необхідність врахування ергономічних обмежень таких, як коефіцієнт черги, коефіцієнт завантаженості оператора, середня довжина черги. Показано, що в разі декількох джерел заявок з різними характеристиками часу надходження їх в систему на окремих часових інтервалах можливі суттєві перевищення нормативних значень ергономічних норм і вимог. Запропоновано для кожного часового інтервалу оцінювати відповідну випадкову величину, що характеризує конкретний ергономічний показник, і оцінювати ймовірність того, що дана випадкова величина не буде перевершувати деяке випадкове значення. Розроблено технологію імітаційного моделювання процесу виконання заявок, що надходять від декількох джерел, яка забезпечує оцінювання ергономічних параметрів виробничого процесу.

***Ключові слова**: ергономіка, поліергатична система, контакт-центр, людина-оператор, черга, завантаженість, система масового обслуговування.*

Krivodub Anna, Lavrov Evgeniy. The assessment of the risks of ergonomic standards violations in polyergatic systems of data teleprocessing with queues

Analyzed problems of providing ergonomic quality polyergatic systems teleprocessing of data. Substantiates the necessity of taking into account ergonomic constraints such as the ratio of the queue, utilization of the operator, the average queue length. It is shown that in the case of several sources of applications with different characteristics time their arrivals to the system during different time intervals, there can be significant exceedances of the regulatory values of the ergonomic standards and demands.

Proposed for each time interval to estimate the corresponding random variable describing specific ergonomic figure and to assess the probability that this random variable will not exceed some random value.

The developed technology of simulation of the process of applications execution that come from multiple sources, provides the estimation of the ergonomic parameters of the production process.

***Keywords:** ergonomics, polyergatic system, contact center, man-operator, queue, workload, queueing system.*

Дата надходження до редакції: 10.02.2016
Резензент: д.т.н., проф. Подригало М.А.

УДК 517.91

ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

А. Б. Баталова, ст. викладач
К. М. Некислих, к.ф.-м.н., доцент
Сумський національний аграрний університет

В статті проаналізовані основні математичні моделі, які основані на диференціальних рівняннях, що використовуються для математичного опису природних явищ та фізичних процесів.

Такі, як модель природного росту Т. Мальтуса, модель закону росту в умовах ненасиченості Дж. Кьютелет та Ферхюльста, рівняння Дж. Коулмена для соціальних груп, модель «хижак-жертва» Лотки – Вольтерри, другий закон І. Ньютона та інші.

***Ключові слова:** диференціальні рівняння, математична модель, природні явища, закон росту, фізичні процеси.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Диференціальні рівняння дуже часто використовують в математичних моделях, які описують природні явища та фізичні процеси.

Такі, наприклад, як модель природного росту, модель закону росту в умовах ненасиченості, рівняння для соціальних груп, модель «хижак-жертва» та інші.

Моделі фізичних процесів: другий закон Ньютона, поперечні коливання струни, поздовжні коливання стрижня, електричні коливання у дроті, крутильні коливання валу, коливання газу, тощо.

Одним із засновників математичного моделювання був Т. Мальтус, який вивів закон росту популяцій. Він працював в кінці 18-го століття. Закон Т. Мальтуса визначає експоненціальний ріст населення і має сенс тільки протягом обмеженого періоду часу [1].

Математичні моделі Ферх'юльста іДж. Коулмена описують стабілізацію популяції за рахунок внутрішньої конкуренції , яка дуже часто спостерігається в природі [2-3].

Модель А. Лоттки і В.Вольтерра є наступним великим кроком математичного моделювання у минулому сторіччі. Вона описує взаємодію двох або більше популяцій тварин [4-5].

У 1687 р. І. Ньютон у своїх «Началах» сформулював всі основні закони механіки. Узагальнюючи численні досліди, Ньютон встановив зв'язок між масою, прискоренням тіла та діючою на нього силою і вивів свій другий закон. [6]

Крім того, диференційні рівняння використовують для опису будь-якого процесу, де встановлення прямого зв'язку між деякими значеннями неможливе. Подібні проблеми виникають в механіці, фізиці, біології, економіці, соціології.

Постановка проблеми у загальному вигляді. В процесі навчання для поліпшення його ефективності велику роль відіграє мотивація.

Студенти інженерних, економічних та інших спеціальностей, які вивчають курс вищої математики, не завжди мають уявлення про необхідність вивчення деяких його розділів.

Для того, щоб подолати проблеми подібного роду і стимулювати мотивацію, необхідно при вивченні різних тем демонструвати застосування досліджуваного матеріалу на практиці. Розглянемо розділ вищої математики «диференціальні рівняння».

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Проаналізувати основні математичні моделі основані на диференціальних рівняннях, які використовуються для математичного опису природних явищ та фізичних процесів.

Почнемо з моделі природного росту. У природі і суспільстві зустрічаються численні процеси, в ході яких деякі величини змінюються в одне і те ж число разів протягом будь-якого проміжку часу Δt.

Якщо взяти масу m(t) колонії бактерій, то за рівні проміжки часу t маса колонії буде зростати в одне і те ж число разів за умови, що немає обмежень у кількості поживних речовин і об'єму посуду, при цьому відсутні живі істоти, що поїдають ці бактерії.

Аналогічно складатимуться справи в будь-якій сукупності живих істот, за умови відсутності обмежень в їжі, просторі та наявних ворогів.

Такі процеси називають процесами природного росту.

У банківській справі сума грошового вкладу за даний проміжок часу зростатиме в одне і те ж число разів і також підпорядкована закону природного росту.

При розпаді ядер під час ланцюгової реакції утворюються нейтрони. Чим більше вільних нейтронів в даному об`ємі, тим частіше вони стикаються з ядрами і тим більше нових нейтронів з'являється. Процес збільшення кількості вільних нейтронів також представляє собою процес природного росту.

А тепер розглянемо величину $y(t)$, яка змінюється в однакове число разів не протягом проміжку Δt, а миттєво, то ми приходимо до процесу, при якому швидкість зміни величини $v(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той же момент часу.

Тоді рівняння, що описує цей процес, можна записати так:

$$v(t) = ky(t). \qquad (1)$$

Так як $v(t) = y'(t)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'(t) = ky(t). \qquad (2)$$

Це рівняння називають диференціальним рівнянням природного росту. Вперше його отримав Якоб Бернуллі при вирішенні задачі про кредитування:

Нехай позикодавець платить кредитору р% відсотків від зайнятої суми y_0 за рік.

Скільки він повинен платити за рік на кожну одиницю зайнятої суми, якщо відсотки зростають безперервно?

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння.

Розділяючи змінні в рівнянні

$$y' = ky \text{, маємо } \frac{dy}{y} = kdt. \qquad (3)$$

Проінтегрувавши праву і ліву частини $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$, отримаємо $\ln y = kt$.

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y(t) = C \cdot e^{kt}. \qquad (4)$$

Т. Мальтус в 1798г використав це саме рівняння для прогнозування росту населення Землі.

Постійна k в його рівнянні, яке використовується в соціальних і біологічних науках, називається мальтузіанським коефіцієнтом лінійного росту.

Розв'язком рівняння є експоненціальна функція, яка дуже швидко зростає.

Якщо t зростає в арифметичній прогресії, то відповідне значення e^{kt} утворює геометричну прогресію, де $q = e^{kt}$.

Оскільки $k > 0$, то $q > 1$. Отже $e^{kt} \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Відповідно до моделі Т. Мальтуса кількість населення Землі росте дуже швидко. Говорячи про зростання населення, вчені вживають термін «демографічний вибух». Цей термін цілком доречний, оскільки зростання населення описується тим же диференціальним рівнянням, що і ядерний вибух. (Число розпаду ядра при ланцюговій реакції росте експоненціально, настільки ж швидко виділяється енергія: $y(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.)

Використовуючи це ж рівняння, можна також вивести закон росту випуску дефіцитної продукції в умовах ненасиченості ринку.

Експоненціальна функція $y(t) = C \cdot e^{kt}$ показує як швидко можна домогтись величезних обсягів випуску дефіцитної продукції, якщо постійно направляти частину доходів в розширення виробництва.

Ми розглянули приклади різних процесів, математичною моделлю яких служить рівняння виду $y'(t) = ky(t)$.

Якщо розглядати закон Т. Мальтуса, то чисельність населення повинна зростати експоненціально, що не відповідає дійсності. Тому диференціальне рівняння y'(t)=ky(t) занадто спрощено відображає реальну ситуацію, і його розв'язок далекий від істини, оскільки темпи росту населення сповільнюються, і настає період насичення. Екстраполяція цих показників при умовах природного росту часто призводить до явного абсурду.

Дж. Кьютелет взяв до уваги ці фактори і відповідним чином модифікував модель росту, в якій припустив, що k в рівнянні $y'(t)=ky(t)$ повинна бути не постійною, а спадною функцією, залежною від y(t):

$$y'(t)=k(t)\cdot y(t). \quad (5)$$

На підставі цього в 1836 р його учень Ферхюльст запропонував використовувати для зростання населення рівняння

$$y'(t)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)y(t), \quad (6)$$

тобто вважати, що

$$k(y)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right). \quad (7)$$

Розділяючи змінні в рівнянні, знаходимо

$$\frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{b}\right)}=adt \text{ або } \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy=adt \quad (8)$$

Проінтегрувавши це співвідношення, маємо

$$\ln|y|+\ln|b-y|=at+\ln|C|, \quad (9)$$

т. т.

$$\frac{y}{b-y}=Ce^{at}. \quad (10)$$

Звідси отримаємо

$$y(t)=\frac{bCe^{at}}{1+Ce^{at}}. \quad (11)$$

Це і є функція, що описує зростання в умовах насичення.

Графіком цієї функції є крива, яку називають логістичною кривою. При малих t логістичний зріст схожий з природним ростом, проте при великих t характер росту змінюється, темпи сповільнюються. При $t\to+\infty$ крива асимптотично наближається до прямої $y=b$, оскільки

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{bCe^{at}}{1+Ce^{at}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(bCe^{at}\right)'}{\left(1+Ce^{at}\right)'}=\lim_{t\to\infty}\frac{baCe^{at}}{aCe^{at}}=b. \quad (12)$$

Пряма є стаціонарним розв'язком рівняння

$$y'(t)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)y(t), \quad (13)$$

і відповідає випадку коли

$$k(y)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)=0. \quad (14)$$

Це означає, що для моделі $y'(t)=a\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)y(t)$ об'єм випущеної продукції в одиницю часу прямує до кінцевого значення b і «вибуху» не відбувається.

Розглянемо ще одне застосування рівняння Ферхюльста в соціальних науках, враховуючи що ринок інформації та товарів має схильність до насичення.

Кількість прихильників чогось нового описується законом Ферхюльста. Але в деякий момент часу настає насичення ринку і ефективність від агітації та реклами зменшується, хоча кількість прихильників чогось нового протягом часу прагне до постійного числа.

Рівняння Ферхюльста в соціальних науках застосовується для поширення в певних соціальних групах зразків поведінки, моди, інформації (реклами), культурних нововведень.

При дослідженні соціальних груп, це рівняння називають рівнянням Дж. Коулмена, тому що він уточнив значення коефіцієнтів *a* і *b* в рівнянні Ферхюльста.

Дж. Коулмена запропонував наступне рівняння:

$$\frac{dy}{dt}=\psi\beta\left(1-\frac{y(t)}{b}\right)y(t), \quad (15)$$

де

y - число прихильників нововведення в даний момент часу;

b - загальна чисельність аналізованої групи;

β - число контактів, що зав'язуються кожним прихильникам нововведення в одиницю часу;

ψ - коефіцієнт, який змінюється від 0 до 1 і відображає те, що не кожна агітація закінчується успіхом.

Важливо відзначити, що емпіричні дослідження підтверджують, що збільшення прихильників нового змінюється відповідно до рівняння Ферхюльста (Коулмена). На відміну від моделі природного росту (коли k= const) модель Дж. Кьютелета, яка описує збільшення кількості продукції $y(t)$ на деякому підприємстві, виготовленої в момент часу t, коефіцієнт k залежить від часу t: $k=-k(t)$.

Знак «мінус» вказує на те, що фонди підприємства скорочуються. Скорочення фондів відбувається, коли підприємство не вкладає частину виручених прибутку у виробництво, і з часом на ньому відбувається зношення обладнання та знарядь праці, т. т. відбувається зменшення фондів.

Тоді збільшення кількості продукції $y(t)$ на деякому підприємстві, виготовленої в момент часу t описується рівнянням $y'(t)=-k(t)y(t),$ при умові $y(0)=y_0.$

Розглянемо два варіанти, перший при $k(t)=0$ і другий $k(t)=1.$

1. Нехай фонди у вказаний проміжок часу не зменшуються, тоді $k(t)=0$.

Отже, через відсутність капіталовкладень виробництво збільшуватись не буде, але і спадати не повинно, тому що основні фонди відсутні. Таким чином, обсяг виробництва буде залишитись на стаціонарному рівні. Що і дає розв'язок диференціального рівняння: $y'(t)=0$: $y(t)=C$ (виробнича константа). Так як $y(0)=y_0$, то $y(t)=y_0$.

2. При постійному скороченні фондів, при $k(t)=1$, відбувається зниження виробництва. Розв'язок відповідного диференціального рівняння підтверджує це.

Рівняння $y'(t)=-k(t)y(t)$, використовують в соціальних науках і страховій справі для визначення шансу того, що людина доживе до віку t.

Розв'язком цього рівняння при початковій умові $y(0)=1$ є функція $y(t)=e^{-\int_0^1 k(t)dt}$.

Так само диференціальні рівняння широко використовуються в біології.

Першою математичною моделлю, яка описує біологічні спільноти була модель Лотки - Вольтерри. Це модель типу «хижак-жертва», що враховує регулювання кількості хижаків.

Перший вид, хижак, за відсутності другого, жертви, вимирає за законом

$$x' = -ax, (a > 0), \quad (16)$$

а другий, жертва, за відсутності хижаків необмежено розмножується відповідно до закону Мальтуса

$$y' = by, (b > 0). \quad (17)$$

Взаємодія двох цих видів моделюється так: жертви вимирають зі швидкістю, яка дорівнює числу зустрічей хижаків і жертв, яке в даній моделі є пропорційним чисельності обох популяцій, т. т. дорівнює dxy (d>0).

Тому

$$y' = by - dxy, (d > 0). \quad (18)$$

Хижаки ж розмножуються зі швидкістю, пропорційною числу жертв, яких з'їли:

$$x' = -ax + cx, (c > 0). \quad (19)$$

Система диференціальних рівнянь

$$\begin{matrix} x' = -ax + cx \\ y' = by - dxy \end{matrix}, \quad (20)$$

описує популяцію хижак-жертва і називається моделлю Лотки - Вольтерри.

Ньютон встановив зв'язок між масою і прискоренням тіла та діючою на нього силою

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (21)$$

де m - маса тіла,

a - прискорення,

F - векторна сума всіх сил, що діють на тіло.

Це співвідношення називають другим законом Ньютона.

Якщо представити, що $\vec{a} = \frac{dv}{dt}$, то дану формулу можна записати так:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt} = \frac{mdv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (22)$$

$$\vec{F}dt = d(mv), \quad (23)$$

де Fdt — елементарний імпульс сили, що відповідає досить малому проміжку часу dt;

mv— імпульс або кількість руху.

Таким чином, другий закон Ньютона теж можна описати диференціальним рівнянням, яке дає змогу сформулювати його більш загально: зміна імпульсу тіла в даний момент часу дорівнює прикладеній силі і відбувається в тому самому напрямі, в якому діє ця сила. Або: перша похідна за часом від імпульсу тіла дорівнює прикладеній силі.

Його розв'язком є траєкторія руху тіла під дією зазначеної сили.

Найпростіше рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{I}{v}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad (24)$$

описує процеси поперечних коливань струни, поздовжні коливання стрижня, електричні коливання у дроті, крутильні коливання валу, коливання газу тощо.

Формула плоскої хвилі є розв'язком диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних:

$$x(z,t) = a\cos(\omega t - kt + \alpha), \quad (25)$$

де x – зміщення точки, що коливається, від положення рівноваги,

a – амплітуда хвилі (максимальне зміщення),

$\omega = 2\pi \cdot v = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота коливань, (26)

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число. (27)

В аргументі*cos*(або*sin*) у рівнянні хвилі стоять час t і координата z, тобто хвиля – це двічі періодичний процес, періодичний як за часом, так і за координатою.

Період T – це період повторення коливань у часі, а довжина хвилі λ – це період повторення коливань у просторі.

Висновки. Показуючи можливості застосування диференціальних рівнянь в різних сферах науки та техніки, можна забезпечити посилення мотивації навчального процесу та істотно вплинути на засвоєння студентами даного розділу вищої математики.

Інтерпретація різних процесів за допомогою математичної мови готує студентів до моделювання реальних процесів і явищ та сприяє формуванню системи знань і умінь, які допоможуть при вирішенні завдань, що виникають у професійній діяльності.

Список використаної літератури:

1. Малтус Т. Р. Дослідження закону народонаселення. – Київ: Основи, 1998. – 538 с.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.:Наука, 1985. – 181 с.
3. Кочура Є. В. Моделювання макроекономічної динаміки. Нав. посіб./ Є.В. Кочура, В.М. Косарів. – Київ. Центр навчальної літератури, 2003. – 236 с.
4. Рожковский А.Д. Численное моделирование системы хищник- жертва // Научные записки НГУЭУ, - Новосибирск, 2007, вып. 3.
5. Самарский А. А., Михайлов А.П.Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.— М: Наука, 1997.– 480 с.
6. Бородин А.И., Бугай А.С. Биографический словар деятелей в области математики. Пер. С укр.. – К.: Радянська школа, 1979. – 607 с.

Баталова А.Б., Некислых К.М. Примеры использования дифференциальных уравнений для моделирования реальных процессов

В статье проанализированы основные математические модели, основанные на дифференциальных уравнениях, используемых для математического описания природных явлений и физических процессов.

Такие, как модель естественного роста Т. Мальтуса, модель закона роста в условиях ненасыщенности Дж. Кьютелет и Ферхюльста, уравнения Дж. Коулмена для социальных групп, модель «хищник-жертва» Лотки - Вольтерры, второй закон И. Ньютона и другие.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, математическая модель, природные явления, закон роста, физические процессы.*

Batalova A.B., Nekislykh Y. M. Examples of the use of differential equations for modeling of real processes

The article analyzes the basic mathematical models based on differential equations, which are used for mathematical descriptions of natural phenomena and physical processes.

Such as the model of the natural growth of T. Malthus, growth model in terms of unsaturatio J. Kyutelet and Verhulst and equation for social groups J. Coleman, model of the "predator-prey" Lotka – Volterra, Newton's second law and other.

Models of physical processes: Newton's second law, transverse vibrations of strings, longitudinal vibrations of a rod, electrical fluctuations in the wire, torsional vibrations in shaft, fluctuations in gas, etc.

One of the founders of mathematical modeling was T. Malthus, who brought the law of population growth. He worked in the late 18th century. T. Malthus's Law defines the exponential growth of the population and is only useful for a limited period of time.

Mathematical models J. Verhulst and Coleman describe the stabilization of the population due to internal competition, which is often observed in nature.

Model A. Trays and Volterra is the next big step in the mathematical modeling of the last century. She is describes the interaction of two or more populations of animals.

In 1687, Mr .. Newton in his work "The Beginning" formulates all the basic laws of mechanics.

Generalizing numerous experiments, Newton established a link between mass and acceleration forces acting on the body, and brought forth the second law.

In addition, the differential equations are used to describe any process where a direct link between certain values impossible.

Similar problems arise in mechanics, physics, biology, economics and sociology.

Keywords: *differential equation, mathematical model, natural phenomena, the law of growth, physical processes.*

Дата надходження до редакції: 21.01.2016
Резензент: д.ф.-м..н., проф. Кузема О.С.