УДК 681.511.46

Т.И. Тимофеева, аспирант,
Е.А. Шушляпин, профессор, д-р техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: 6u6@bk.ru

ОБОБЩЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО МЕТОДА КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Метод конечного состояния для нелинейных дискретных по времени систем обобщен на нелинейные дискретные системы с запаздыванием. Рассмотрен пример использования метода для одной динамической задачи управления запасами.

Ключевые слова: *метод конечного состояния, терминальное управление, нелинейная система, дискретная система, система с запаздыванием.*

На протяжении последних нескольких лет нами разрабатывается один метод терминального управления, названный «метод конечного состояния» (МКС) применительно к нелинейным системам с аддитивным управлением. Разработаны варианты метода для нелинейных дифференциальных систем, дифференциально-функциональных, линейных непрерывно-дискретных систем, нелинейных непрерывных систем с запаздыванием, нелинейных дискретных и гибридных систем без запаздываний [1]. Для каждого из упомянутых видов систем метод имеет свои особенности, однако во всех случаях имеет и общее: использование в качестве цели управления достижение заданного поведения так называемой критериальной функции. Последняя представляет собой целевую функцию терминального критерия, где компоненты вектора состояния $x(t)$ заменены соответствующими компонентами вектора так называемых «переменных конечного состояния». Переменные конечного состояния $\bar{x}(\vartheta, t, x(t))$ зависят от двух временных параметров ϑ, t, текущего состояния $x(t)$ и имеют смысл прогноза конечного состояния при неуправляемом движении системы. В статье [2] предложен алгоритм для расчета дискретного управления системой вида:

$$\begin{aligned} &J = J(x_N) \to J^*, \\ &x_j = \Phi(j, x_{j-1}) + B_j u_j,\ j = 1,2\ldots, N,\ x_0 = x^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где x, u – соответственно n- и r-мерные векторы состояния и управления, x^0 – известный вектор начальных условий, j – индекс, указывающий на номер дискретной точки по оси времени, Φ – нелинейная вектор-функция, B – $(n \times r)$ –матрица коэффициентов при r-мерном векторе управления $u(t)$.

Целью работы является обобщение одного метода терминального управления дискретными по времени системами – метода конечного состояния, – на такие же системы, но содержащие переменные с запаздывающим на один шаг (такт) дискретным аргументом.

Актуальность этой задачи обусловлена тем, что многие математические модели динамических систем имеют вид дискретных по времени (в общем случае по независимой переменной) систем конечно-разностных уравнений. Особенно много таких моделей применяется при описании сложных систем, когда дискретизация помогает скрыть детали их функционирования и упростить тем самым окончательный вид модели. При этом в процессе дискретизации иногда приходится вводить искусственные переменные, в результате чего в правых частях появляются переменные с запаздывающим аргументом (одна из таких задач рассмотрена ниже). Во многих случаях запаздывание имеет физическую природу, которое проявляется в модели также в виде переменных с запаздывающим аргументом (например, при учете транспортного запаздывания). Традиционно дискретные нелинейные задачи оптимального управления решаются методами математического (М) или динамического программирования (Д). Однако при этом приходится учитывать некоторые особенности, ограничивающие возможности применения указанных методов: относительно небольшая размерность пространства оптимизируемых переменных (М); специфический вид критерия (Д); невозможность (при однократном применении метода) получения управления как функции текущего состояния (М, Д). Поэтому актуальна задача поиска таких методов управления нелинейными дискретными системами, которые бы позволяли решать задачи управления проще и быстрее, чем указанные выше методы.

В настоящей работе предлагается обобщение МКС на терминальные задачи вида:

$$\begin{aligned} &J = J(x_N) \to J^*, \\ &x_j = \Phi\left(j-1, x_{j-1}, x_{j-2}\right) + B_j u_j,\ j = 1,2,\dots,N,\ x_0 = x^0,\ x_{-1} = x^{-1}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где, в отличие от (1), правая часть зависит также и от запаздывающего аргумента x_{j-2}, а начальные условия дополнены значением x^{-1} для индекса (дискретной независимой переменной) $j = -1$.

Определим переменную конечного состояния (ПКС) для дискретной системы (1) как функцию первого индекса в виде:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{i,j-1}\left(X_{j-1}\right) = \Phi\left(i-1, \bar{x}_{i-1,j-1}\left(X_{j-1}\right), \bar{x}_{i-2,j-1}\left(X_{j-1}\right)\right), \\ &i = j,\ j+1,\ j+2, \dots, (N-1), \\ &\bar{x}_{j-1,j-1}\left(X_{j-1}\right) = x_{j-1}, \\ &\bar{x}_{j-2,j-1}\left(X_{j-1}\right) = x_{j-2}, \end{aligned} \qquad (3)$$

т.е. как реакцию неуправляемой системы на сложившиеся к дискретному моменту $j-1$ начальные условия, в том числе и для запаздывающего состояния x_{j-2}. Для сокращения записей в скобках в качестве аргумента использовано обозначение $X_{j-1} = \left\{x_{j-1}, x_{j-2}\right\}$, т.е. множество из текущего и запаздывающего состояний.

Следующий шаг − замена аргумента в целевой функции критерия: вместо конечного состояния x_N подставляется переменная конечного состояния $\bar{x}_{N,j-1}\left(X_{j-1}\right)$ как функция второго аргумента-индекса j. В результате вместо исходного критерия получаем критерий стабилизирующего типа:

$$\bar{J}_j = J\left(\bar{x}_{N,j}\left(X_j\right)\right) \to J^* \qquad (4)$$

в силу свойства $\bar{x}_{j-1,j-1}\left(X_{j-1}\right) = x_{j-1}$, следующего из (3) и имеющего очевидный физический смысл: в начальный момент решение (3) совпадает с начальным условием. Важно то, что равенство ПКС и состояния при одинаковых значениях первого и второго индексов ПКС имеет место в любой дискретный момент времени, в том числе и при $j = N$. Тем самым задача (2) с критерием J и задача (4) с критерием $\bar{J}_N$ равносильны при $j = N$.

Поскольку (4) – критерий стабилизирующего типа с критериальной функцией индекса j, можно задать ее желаемую траекторию как решение конечно-разностного уравнения с некоторой правой частью f_j:

$$\bar{J}_j = f_J\left(\bar{J}_{j-1}\right), \quad j = 1,2\dots,N. \qquad (5)$$

Так, если

$$f_J\left(\bar{J}_{j-1}\right) = \bar{J}_{j-1} + K \cdot \left(J^* - \bar{J}_{j-1}\right), \qquad (6)$$

то решение (5) с увеличением индекса j будет по дискретной экспоненте с постоянной времени K^{-1} приближаться к J^*. При выборе K следует учитывать условие устойчивости решения (6) $K \le 1$.

Дальнейший этап в применении метода конечного состояния для задачи (2) – получение векторно-матричного конечно-разностного уравнения для переменной конечного состояния как функции второго индекса при фиксированном значении N первого индекса, поскольку целевая функция критерия (4) зависит от ПКС как функции второго индекса.

Из (2) и (3) следует для $i = j$:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{j,j-1}\left(X_{j-1}\right) = \Phi\left(j-1, \bar{x}_{j-1,j-1}\left(X_{j-1}\right), \bar{x}_{j-2,j-1}\left(X_{j-1}\right)\right) = \Phi\left(j-1, x_{j-1}, x_{j-2}\right) = x_j - B_j u_j = \\ &= \bar{x}_{j,j}\left(X_j\right) - B_j u_j, \quad j = 1,2,\dots,N. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом $\bar{x}_{j,j}\left(X_j\right) = x_j$ получаем

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{j,j-1}\left(X_{j-1}\right) = x_j - B_j u_j, \\ &j = 1,2,\dots,N. \end{aligned} \qquad (7)$$

Исходя из определения (3) и выражения (7), получим последовательность аналогичных (3) выражений для увеличивающихся на единицу значений первого индекса.

Из (3), полагая $i = j+1$ и увеличивая второй индекс на единицу, получаем:

$$\bar{x}_{j+1,j}\left(X_j\right) = \Phi\left(j, \bar{x}_{j,j}\left(X_j\right), \bar{x}_{j-1,j}\left(X_j\right)\right) = \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right). \tag{8}$$

Для того чтобы увидеть закономерность, произведем в (8) еще несколько увеличений на единицу первого индекса:

$$\bar{x}_{j+2,j}\left(X_j\right) = \Phi\left(j+1, \bar{x}_{j+1,j}\left(X_j\right), \bar{x}_{j,j}\left(X_j\right)\right) = \Phi\begin{pmatrix} j+1, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \\ x_j \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_{j+3,j}\left(X_j\right) = \Phi\left(j+2, \bar{x}_{j+2,j}\left(X_j\right), \bar{x}_{j+1,j}\left(X_j\right)\right) = \Phi\begin{pmatrix} j+2, \\ \Phi\begin{pmatrix} j+1, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \\ x_j \end{pmatrix}, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right) \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_{j+4,j}\left(X_j\right) = \Phi\left(j+3, \bar{x}_{j+3,j}\left(X_j\right), \bar{x}_{j+2,j}\left(X_j\right)\right) = \Phi\begin{pmatrix} j+3, \\ \Phi\begin{pmatrix} j+2, \\ \Phi\begin{pmatrix} j+1, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \\ x_j \end{pmatrix}, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right) \end{pmatrix}, \\ \Phi\begin{pmatrix} j+1, \\ \Phi\left(j, x_j, x_{j-1}\right), \\ x_j \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить по приведенным выше равенствам, что в общем случае, при произвольном индексе k, имеет место:

$$\bar{x}_{j+k,j}\left(X_j\right) = \Phi_{j+k-1}^{[k]}\left(X_j\right), \tag{9}$$

где правая часть (9) определяется рекуррентной формулой

$$\begin{aligned} &\Phi_j^{[k]}\left(X_j\right) = \Phi\left(j, \Phi_{j-1}^{[k-1]}\left(X_j\right), \Phi_{j-2}^{[k-2]}\left(X_j\right)\right), \quad k = 1,2,\ldots, \\ &\Phi_{j-1}^{[0]}\left(X_j\right) = x_j, \quad \Phi_{j-2}^{[-1]}\left(X_j\right) = x_{j-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Из последнего выражения при $k = N - j$ следует:

$$\bar{x}_{N,j}\left(X_j\right) = \Phi_{N-1}^{[N-j]}\left(X_j\right). \tag{11}$$

Заменяя в правой части (11) X_j его представлением, введенном в (3), получаем:

$$\bar{x}_{N,j}\left(X_j\right) = \Phi_{N-1}^{[N-j]}\left(x_j, x_{j-1}\right) = \Phi_{N-1}^{[N-j]}\left(x_{j-1} + B_j u_j, x_{j-1}\right). \tag{12}$$

Выражение (12) является дискретной моделью конечного состояния, определяющей ПКС как функцию второго индекса. Ценность этой модели в том, что она, в отличие от определения ПКС (3) как функции первого индекса, зависит от управления u_j. Для определения искомого управления приравняем правые части для $\bar{J}_j$, определяемые, с одной стороны, выражениями (5), (6) и, с другой стороны, преобразованием $\overline{J}_j \equiv J\left(\overline{x}_{N,j}\left(X_j\right)\right)$, где $\overline{x}_{N,j}\left(X_j\right)$ следует из (12). В результате получим нелинейное конечное уравнение для определения в каждый момент дискретного времени j вектора дискретного МКС-управления u_j

$$\overline{J}_{j-1} + K \cdot \left(J^* - \overline{J}_{j-1}\right) = J\left(\Phi_{N-1}^{[N-j]}\left(x_{j-1} + B_j u_j, x_{j-1}\right)\right), \tag{13}$$

под воздействием которого, при условии разрешимости (13) и $K \le 1$, формируется траектория критериальной функции (дискретная экспонента), определяемая конечно-разностным уравнением

$$\overline{J}_j = \overline{J}_{j-1} + K\left(J^* - \overline{J}_{j-1}\right), \tag{14}$$

где $K = 1/T_u$, а T_u имеет смысл постоянной времени.

Для стационарных систем, правые части которых не зависят явно от индекса j, расчет ПКС по выражению (12) упрощается вследствие того, что в выражении (10), приобретающем в данном случае вид:

$$\Phi_j^{[k]}\left(X_j\right) = \Phi\left(\Phi^{[k-1]}\left(X_j\right), \Phi^{[k-2]}\left(X_j\right)\right), \quad k = 1,2,\ldots,$$
$$\Phi_j^{[0]}\left(X_j\right) = x_j, \quad \Phi^{[-1]}\left(X_j\right) = x_{j-1},$$

пропадает зависимость рекуррентных вложений от j (заметим, что зависимость от j текущих состояний при этом остается).

Скалярное нелинейное уравнение с r неизвестными (по числу компонент вектора u) (13) решается в каждый дискретный момент $j-1$ при известном векторе текущего состояния x_{j-1} и известных значениях $\overline{J}_j$, определяемых (14) при заданном K. Таким образом, здесь на каждом дискретном шаге фактически решается r-мерная задача нелинейного программирования с одним ограничением вида (13) и возможными ограничениями параметрического типа на компоненты вектора управления. Сравнивая с традиционным способом решения задачи (1) методами математического программирования, когда размерность оптимизационной задачи равна $N \times r$, видим, что расчет МКС-управления в общем случае производится намного быстрее. Однако при этом усложняется подготовительная работа, поскольку «ручное» формирование уравнения (13) для сложных функций правых частей при достаточно большом N практически нереально. Выходом из этой ситуации является их автоматическое формирование на компьютере с использованием рекурсивных процедур. При этом нет необходимости формировать эти уравнения в аналитическом виде, если включить численный расчет рекурсий как составную часть метода решения нелинейного уравнения (13).

Далее продемонстрируем особенности расчета дискретного управления на примере задачи управления запасами.

Пример.

В [2] приведена постановка динамической задачи управления запасами в форме:

$$\begin{aligned} &J = \sum_{j=1}^{N} c_j\left(r_j, z_j\right) + s_j\left(r_{j+1}\right) \to \min, \\ &z_j + r_j - d_j = r_{j+1}, \end{aligned} \tag{15}$$

где N – число периодов, когда спрос за j-й период определяется величиной d_j; r_j – остаток запаса от ($j-1$)-го периода; d_j – суммарный спрос за j-й период; z_j – запас, создаваемый в j-й период (или заказ в j-м периоде).

В (15) критерий J имеет смысл суммарных расходов по снабжению за N периодов, где расходы на выполнение заказа заданы функцией разрывного типа

$$c_j(r_j, z_j) = 300 \cdot 1_+(z_j), \quad 1_+(z_j) = \begin{cases} 1, & z_j \ge 0, \\ 0, & z_j < 0, \end{cases}$$

а расходы на хранение избыточного запаса определены выражением $s_j(r_{j+1}) = 2 \cdot r_{j+1}$.

Для преобразования (15) к виду (2) введем новые переменные в следующем соответствии: $\overline{z}_{j-2} = z_j$, $\overline{d}_j = d_{j-1}$, $\overline{r}_{j-1} = r_j$. Кроме того, сумму в критерии обозначим y, ее слагаемое – y_j, а цель минимизации – на достижение заданного значения J^*. В результате вместо (15) получим эквивалентную задачу в форме:

$$\begin{aligned}
&J = y_N \to J^*,\\
&y_j = y_{j-1} + c_j\left(\bar r_{j-1}, \bar z_{j-1}\right) + s_j\left(\bar r_j\right) = y_{j-1} + 300\cdot 1_+\left(\bar z_{j-1}\right) + 2\cdot\left(\bar z_{j-2} + \bar r_{j-1} - \bar d_{j+1}\right),\\
&\bar r_j = \bar z_{j-2} + \bar r_{j-1} - \bar d_{j+1},\\
&j = 1,2,\ldots,N, \quad y_0 = y^0, \quad \bar r_0 = \bar r^{\,0}, \quad \bar z_0 = \bar z^{\,0}, \quad \bar z_{-1} = \bar z^{\,-1},
\end{aligned} \tag{16}$$

где y^0, $\bar r^{\,0}$, $\bar z^{\,0}$, $\bar z^{\,-1}$ – заданные начальные условия для начального и запаздывающего на такт значений индекса j.

В (16) присутствует управляющее воздействие $\bar z$, которое входит в (16) неаддитивно и в разные дискретные моменты времени. Поскольку предлагаемый метод ориентирован на модель (2) с аддитивным вхождением управлений в один дискретный момент времени, введем уравнение $\bar z_j = u_j$ с новым управляющим воздействием u_j и получим:

$$\begin{aligned}
&J = y_N \to J^*,\\
&y_j = y_{j-1} + 300\cdot 1_+\left(\bar z_{j-1}\right) + 2\cdot\left(\bar z_{j-2} + \bar r_{j-1} - \bar d_{j+1}\right),\\
&\bar r_j = \bar z_{j-2} + \bar r_{j-1} - \bar d_{j+1},\\
&\bar z_j = u_j,\\
&j = 1,2,\ldots,N, \quad y_0 = y^0, \quad \bar r_0 = \bar r^{\,0}, \quad \bar z_0 = \bar z^{\,0}, \quad \bar z_{-1} = \bar z^{\,-1}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Следует отметить, что задача (16) не вполне эквивалентна задаче (15) ввиду того, что между новым управлением u_j и старым z_j имеется запаздывание на два такта, т.е. «искусственному» управлению u_1 соответствует «реальное» управление z_3 и т.д. Поэтому для значений z_1, z_2 должны использоваться начальные условия $\bar z^{\,0}, \bar z^{\,-1}$. Кроме того начальные условия $\bar z^{\,0}, \bar z^{\,-1}$ вносят свой вклад в значение критерия, который учитывается начальным условием $y^0 = 300\cdot 1_+\left(\bar z^{\,0}\right) + 2\cdot\left(\bar z^{\,-1} + \bar r^{\,0} - \bar d_2\right) + 300\cdot 1_+\left(\bar z^{\,-1}\right) + 2\cdot r^0$. Поскольку управления u_j будут определяться методом конечного состояния, на первых двух шагах используются указанные начальные условия, подбор которых также входит в процесс поиска управления.

Модель (17) содержит переменные состояния $y, \bar r, \bar z$, известное при всех j внешнее воздействие $\bar d$ и управляющее воздействие u. Форма (17) соответствует постановке задачи (2), потому что правая часть (17) зависит от состояния $\bar z$ в моменты $j-1$ и $j-2$, а управляющее воздействие u входит в (17) аддитивно. В процессе назначения неопределенных начальных условий и последующего поиска управления необходимо обеспечить неотрицательность $z_j \ge 0, r_j \ge 0$ запасов и их остатков соответственно для любого дискретного момента j. Относительно остатков сказано выше, а неотрицательность запасов обеспечим принудительным обнулением u_j в случае, когда в процессе решения уравнения (13) получаются отрицательные значения u_j, величина J^* заранее неизвестна, но должна быть как можно меньшей. Для примера из [2], где $N = 7$; $d_0 = 0$; $d_1 = 90$; $d_2 = 125$; $d_3 = 140$; $d_4 = 100$; $d_5 = 45$; $d_6 = 60$; $d_7 = 130$, известно полученное методом динамического программирования оптимальное решение и, соответственно, минимально возможное значение критерия $J = 1770$.

Запишем выражения для векторов и матриц модели (1):

$$x_j = \begin{pmatrix} y_j \\ \bar r_j \\ \bar z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{pmatrix}; \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad J\left(x_N\right) = y_N = x_1^N \to J^*;$$

$$\Phi\left(j-1, X_{j-1}\right)=\begin{pmatrix} y_{j-1}+300\cdot 1_{+}(x_{j-1}^{3})+2(x_{j-2}^{3}+x_{j-1}^{2}-\overline{d}_{j+1}) \\ x_{j-2}^{3}+x_{j-1}^{2}-\overline{d}_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В ходе реализации программы были получены результаты, которые изображены на рисунках 1, 2, где для наглядности графики имеют вид непрерывных зависимостей от времени, хотя на самом деле определены значения в дискретные моменты времени 0, 1,2,…,7.

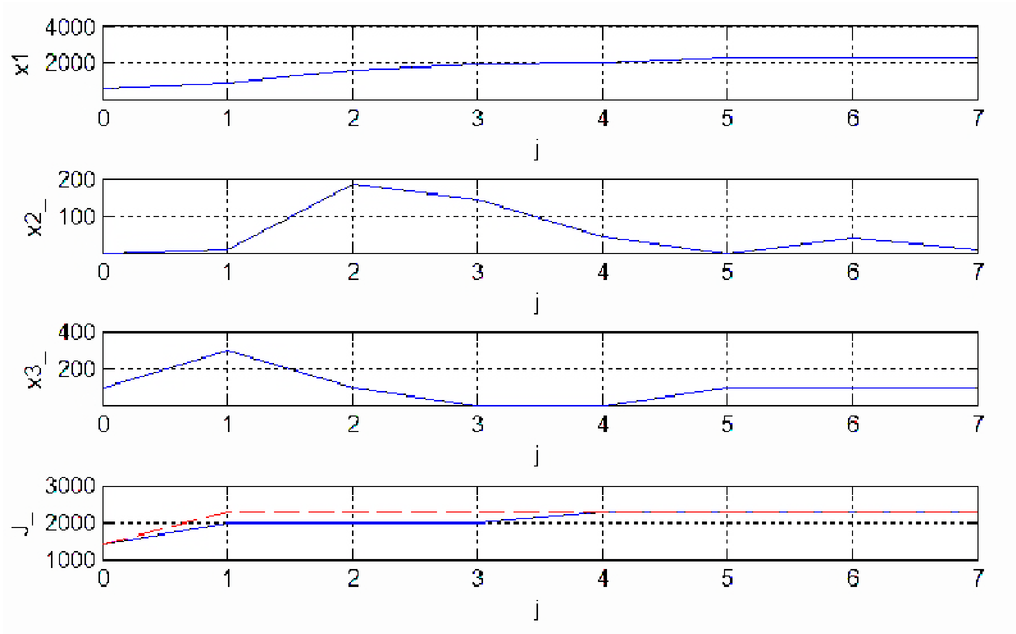

Рисунок 1 – Результат компьютерного эксперимента

На данных графиках представлены зависимости от времени координат систем (17), (15), где x1 обозначена координата $x^1 \equiv y$; x2_ – координата $x^2 \equiv \overline{r}$; x3_ – координата z; J_ – две критериальные функции: фактическая, рассчитываемая по выражению (4) и заданная (теоретическая) рассчитываемая по выражению (14). График заданной критериальной функции показан штриховой кривой, а полученной фактически – сплошной кривой.

Расчеты выполнялись при начальных условиях $y_0 = 620$; $\overline{r}_0 = 0$; $\overline{z}_0 = 300$; $\overline{z}_{-1} = 100$, желаемом значении критерия $J^* = 2290$, начальной точке для решения уравнения (13) $u = 100$.

Полученные значения координат и критериальной функции в виде последовательностей при $j = 0,1,...7$ следующие: для y (или x1) – 620; 940; 1610; 1900; 1990; 2290; 2290; 2290; для остатков r (или x2_) – 0; 10; 185; 145; 45; 0; 40; 10; для искомых запасов z (или x3_) – 100; 300; 100; 0; 0; 100; 100; 100; для теоретических (согласно уравнению (14)) значений критериальной функции $\overline{J}$ (или J_) – 1400; 2290; 2290; 2290; 2290; 2290; 2290; 2290. Для фактических же (согласно (4)) значений $\overline{J}$ имеем последовательность 1400; 1990; 1990; 1990; 2290; 2290; 2290; 2290.

Оптимальная последовательность для z, полученная в [2], следующая: $z_1 = 215$; $z_2 = 0$; $z_3 = 240$; $z_4 = 0$; $z_5 = 105$; $z_6 = 0$; $z_7 = z_8 = 130$. Оптимальная критериальная функция для $j = 0,1,...7$ имеет вид последовательности 550; 9630; 1050; 2490; 1470; 1770; 1770.

На рисунке 2 показаны графики пополнения запасов (заказов) и критериальных функций для оптимального решения (штриховые кривые) и полученные с помощью МКС-управления (сплошные кривые).

Предложенный вариант МКС-управления, определяемого из нелинейного уравнения (13), как видно из приведенных результатов, позволяет для существенно нелинейных систем получать результаты, близкие к оптимальным. Так, оптимальное значение критерия задачи (15), полученное методом динамического программирования в [2], равно 1770. Значение же критерия, достигнутое с помощью МКС-управления, оказалось равным 2290, что всего на 29% хуже оптимального. Тем не менее, для задач высокой размерности, где динамическое программирование практически неприменимо, предлагаемый метод может оказаться полезным.

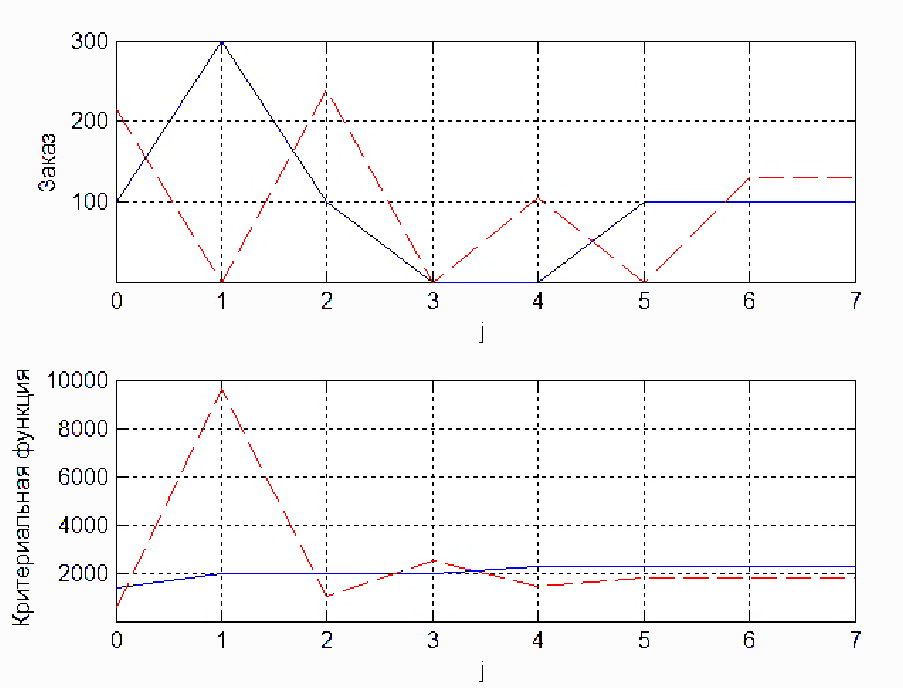

Рисунок 2 – Графики компьютерного эксперимента для сравнения оптимального и МКС-управления

Перспективы дальнейших исследований в данном направлении связаны с гибридными системами, математические модели которых описываются совокупностью дифференциальных и конечно-разностных уравнений со многими запаздываниями.

Библиографический список использованной литературы

1. Шушляпин Е.А. Управление нелинейными системами на основе прогноза конечного состояния неуправляемого движения / Е.А. Шушляпин. — Севастополь, 2012. — 282 с.

2. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. — К.: Вища школа, 1979. — 392 с.

Поступила в редакцию 18.11.2013 г.

Тимофєєва Т.І., Шушляпін Є.А. Узагальнення дискретного методу кінцевого стану на нелінійні дискретні системи із запізнюванням

Метод кінцевого стану для нелінійних дискретних за часом систем узагальнений на нелінійні дискретні системи із запізнюванням. Розглянуто приклад використання методу для одного динамічного завдання управління запасами.

Ключові слова: метод кінцевого стану, нелінійна дискретна система із запізнюванням, термінальне управління.

Tymofieieva T.I., Shyshlyapin E.A. Summary of discrete method of terminal states on nonlinear discrete time-delay system

The method of terminal states for nonlinear discrete time systems is extended to nonlinear discrete time-delay system. An example of using the method for a dynamic problem of inventory control is considered.

Keywords: method of terminal states, the nonlinear discrete time-delay system, the terminal control.