УДК 519.248

В.П. Долгин, канд. техн. наук,
Д.И. Долгин, инженер, М.В. Бармина, инженер
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская, 33, Севастополь, Украина, 99053
E-mail: autosev@ukr.net

ЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Изложен метод решения задачи коррекции интенсивностей потоков, обеспечивающих заданные свойства системы массового обслуживания.

Ключевые слова: *поток событий, вероятность, граф состояний, обратная задача, адаптация.*

Введение. Надежность технических систем (ТС) оценивается вероятностью ее исправного состояния, которая может выходить из строя из-за отказа (поломки) одного из узлов. Отказавший узел восстанавливается в течение некоторого времени. Промежутки времени, через которые ТС переходит в неисправное состояние и в течение которых восстанавливается, образуют потоки соответственно отказов и восстановлений. Теория систем массового обслуживания (СМО) [1, 2] позволяет получить оценку любого из состояний, в которых может находиться техническая система, если известны значения интенсивностей всех потоков. Это удобно при осуществлении контроля эффективности системы, но вызывает затруднения в случае необходимости ввода коррекции при изменениях ее параметров вследствие, например, применения новых технологий, методик ремонта и других, связанных с изменением интенсивностей потоков. В этом случае требуется коррекция СМО, которая заключается в определении параметров интенсивностей потоков, часть из которых известна, обеспечивающих требуемые значения финальных вероятностей состояний системы. Изменение интенсивности любого из потоков приводит к изменению вероятностей состояний всей системы, что осложняет реализацию коррекции.

Цель статьи состоит в разработке метода определения по заданным значениям финальных вероятностей состояний системы и известным значениям интенсивностей части потоков интенсивности остальных потоков, считая все потоки простейшими для СМО с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Решение задачи. Уравнения Колмогорова, описывающие состояния системы, представляют собой линейную систему. Выбор метода решения этой системы уравнений зависит от заданных интенсивностей потоков. Если число неизвестных (интенсивностей потоков, подлежащих определению) совпадает с количеством уравнений системы, то в качестве методов решения применяются прямые методы (аналитические или численные). Система будет определенной (иметь единственное решение) при соблюдении условия совместности, которое проверяется с помощью матричных форм Кронекера–Капелли [3]. В противном случае система является несовместной (не имеющей решения).

В ряде случаев число неизвестных может превышать ранг системы, что требует разработки специальных методов коррекции интенсивностей потоков для обеспечения требуемых вероятностей состояний СМО с заданной точностью, так как прямые методы решения, позволяющие получить точный результат, в этих условиях неприменимы. Рассмотрим решение задачи для централизованной системы (рисунок 1) обслуживания при определенной системе линейных уравнений, описывающих ее состояния, в которой число неизвестных равно числу уравнений системы.

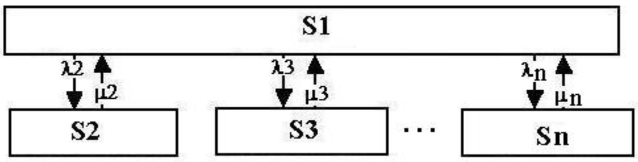

Рисунок 1 – Централизованная система массового обслуживания

Прямой метод решения рассмотрим на примере анализа по размеченному графу состояний автомобиля [2] (рисунок 1). Система обслуживания может находиться в одном из n состояний $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ ($n = 8$). Процесс, протекающий в системе обслуживания, состоит в том, что в случайные моменты времени система под воздействием потоков событий переходит из одного состояния в другое. Потоки условно можно разделить на две группы: потоки отказов λ и потоки восстановлений μ. Отказавший узел немедленно начинает восстанавливаться. Среднее время T_i пребывания системы в этом состоянии S_i определяет его финальную вероятность [1, 2, 4] $p_i = T_i / T_\phi$, где T_ϕ – время работы системы. Обозначив финальные вероятности состояний через p_i, где i – номер состояния S_i ($i = 1...n$), составим систему уравнений Колмогорова [1, 2] для всех n состояний в принятой (рисунок 1) системе обозначений

$$\begin{cases} p_1 \sum_{i=2}^{n} \lambda_i = \sum_{i=2}^{n} p_i \mu_i; \\ p_2 \mu_2 = p_1 \lambda_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n \mu_n = p_1 \lambda_n, \end{cases} \tag{1}$$

уравнение нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{2}$$

и решим систему уравнений (1) относительно искомых неизвестных p_i ($i = 1...n$).

Получим решение системы уравнений (1) с соблюдением условия (2) для произвольно заданных (случайных) значений интенсивностей потоков и найдем значения интенсивностей, которые обеспечат требуемые вероятности состояний. Для примера зададим вероятности состояний, выполнив условие (2), задав p_1 и положив $p_i = (1 - p_1)/(n - 1)$ ($i = 2, \cdots, n$)

$$p_1 = 0{,}6\,; \quad p_2, \cdots, p_n = 0{,}0571\,. \tag{3}$$

Система (1) является линейной. Для ее решения необходимо задать n неизвестных. В качестве неизвестных независимых переменных выберем интенсивности потоков, подлежащие коррекции. В качестве корректируемых выберем потоки восстановлений, так как потоки отказов обусловлены технологией изготовления, выбором материалов, конструктивными особенностями и другими причинами, являющимися следствием производства автомобиля. Для иллюстративного примера введем в систему уравнений (1) желаемые значения вероятностей (3) и зададим с помощью генератора случайных чисел множество значений потоков заявок на обслуживание μ

$$\mu = \{0{,}902; 0{,}394; 0{,}915; 0{,}893; 0{,}371; 0{,}205; 0{,}248\}. \tag{4}$$

Решив систему уравнений (1) с учетом описаний множеств (3) и (4), получим требуемые значения интенсивностей

$$\lambda = \{0{,}0859; 0{,}0375; 0{,}0871; 0{,}412; 0{,}0670; 0{,}503; 0{,}316;\}. \tag{5}$$

Подставив в систему уравнений найденные значения λ (5), заданные μ (4), введя уравнение нормировки (2), и решив ее относительно p_i ($i = 1...n$), найдем заданные значения вероятностей состояний (3).

В общем случае, создавая произвольные комбинации неизвестных из множеств p_i ($i = 1...n$); λ_j ($j = 2...n$) и μ_j ($j = 2...n$) в количестве, равном числу уравнений n системы (1), можно решать задачи коррекции СМО в различных постановках, допускающих уточнение ее параметров. Среди возможных комбинаций необходимо исключить такие, при которых заданы все входящие и исходящие потоки хотя бы одного из состояний, что делает систему уравнений несовместной.

На рисунке 2 изображены гистограммы распределения параметров системы до (помечено цифрой 1) и после (помечено цифрой 2) введения коррекции интенсивностей потоков, реализованной путем решения системы уравнений (1) с помощью Maple – программы System_Cqs при выборе в качестве неизвестных комбинации части λ–потоков

$$\lambda = \{\lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; 0{,}412; 0{,}0670; 0{,}503; 0{,}316\}$$

и μ – потоков

$$\mu = \{0{,}902; 0{,}394; 0{,}915; \mu_5; \mu_6; \mu_7; \mu_8\}$$

с заданными вероятностями состояний (3).

На рисунке 2 а, б, в изображены диаграммы распределения вероятностей состояний p_i ($i = 1, \cdots, n$), интенсивностей потоков μ_i и λ_i ($i = 2, \cdots, n$), до ввода (гистограммы 1) и после ввода (гистограммы 2) коррекции.

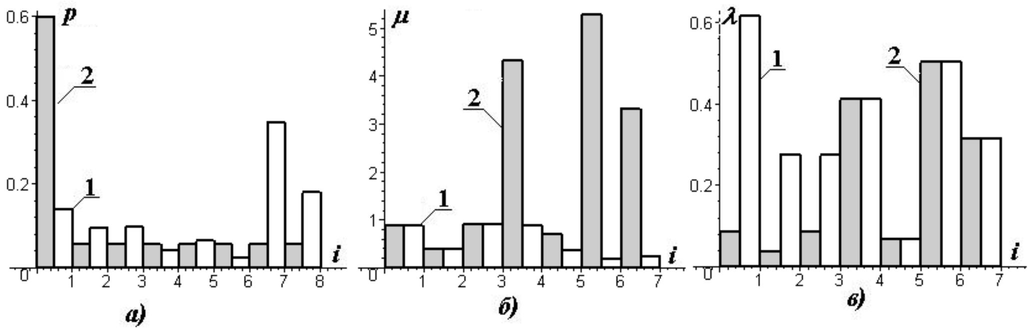

Рисунок 2 – Гистограммы распределения параметров системы

В общем случае количество корректируемых параметров системы m, подлежащее определению, может не совпадать с числом уравнений n системы (1). В этом случае система уравнений (1) может оказаться недоопределенной ($m > n$) или переопределенной ($m < n$). Множество корректируемых параметров может содержать элементы как λ–потоков так и μ–потоков. Кроме того, при произвольном выборе λ_i и μ_i ($i = 2,\cdots,n$) для коррекции система уравнений (1) может оказаться несовместной. Рассмотрим алгоритм, позволяющий получить решение совместной системы (1) с заданной точностью.

Компенсационный метод. Объединим подлежащие коррекции потоки в множество $x = \{x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_m\}$, где $x_i \in (\lambda \setminus \mu)$ является элементом множества λ либо множества μ. Будем считать все вероятности множества состояний $P = \{P_1, P_2,\cdots,P_n\}$ заданными и известными начальные значения всех потоков. Решив систему уравнений (1) относительно $p = \{p_1, p_2,\cdots,p_n\}$, найдем стандартное (среднее квадратичное) отклонение разностей $\Delta_i = P_i - p_i$ ($i = 1,\cdots,n$). Введем допустимое значение стандартного отклонения ε.

Процедура компенсации состоит в адаптации параметров СМО по критерию минимума ε. Изменим величину x_i, умножив ее на множитель k, $x_i = x_i k$ ($k \neq 1$), что приведет к перераспределению вероятностей состояний системы p. Если в результате этого стандартное отклонение разностей Δ_i ($i = 1,\cdots,n$) уменьшится, то сохраним измененную величину $x_i = x_i k$. В противном случае оставим x_i неизменным. Повторяя этот процесс для всех m элементов множества x при выбранном значении множителя k и обратном его значении k^{-1} до тех пор, пока стандартное отклонение разностей Δ_i ($i = 1,\cdots,n$) перестанет изменяться, компенсируем отклонения значений элементов множества x. Процедуру нужно повторять при другом k, если полученное значение стандартного отклонения больше допустимого ε. Найдем закон изменения k.

Зададим начальное значение $k = k_0$ ($k_0 \neq 1$). Последующие значения определим рекуррентной процедурой

$$k_i = \frac{k_{i-1} + \alpha}{\alpha + 1}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$.

Выполняя последовательно подстановки в (6) и приводя результат к полиномиальной форме, получаем:

$$k_1 = \frac{k_0 + \alpha}{\alpha + 1};$$

$$k_2 = \frac{k_0 + 2\alpha + \alpha^2}{(\alpha + 1)^2};$$

. . . .

$$k_i = \frac{k_0 + \sum_{j=1}^{i} C_i^j \alpha^j}{(\alpha + 1)^n},$$

где C_i^j – биномиальный коэффициент.

Выражения для k_i и k_i^{-1} при начальном значении k_0 получим в компактной форме записи

$$k_i = \frac{k_0 - 1}{(\alpha+1)^i} + 1; \quad k_i^{-1} = \frac{(\alpha+1)^i}{k_0 - 1 + (\alpha+1)^i}, \tag{7}$$

где $(\alpha+1)^i = \sum_{j=0}^{i} C_i^j \alpha^j$.

Из выражения (7) следует, что в пределе при неограниченном увеличении i значение множителя

$$k_\infty = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{k_0-1}{(\alpha+1)^i}+1\right) = 1,$$

что справедливо и для k_∞^{-1}.

Определим закон изменения шага h_j, с которым происходит компенсация x_j ($j = 1,\cdots,m$), соответствующего значению множителя k_i либо k_i^{-1}. Для i –го шага итерации запишем уравнения

$$x_j k_i = x_j + h_j; \quad x_j k_i^{-1} = x_j + h_j,$$

решая которые получаем

$$h_j = x_j(k_i - 1) \text{ при } k = k_i; \; h_i = x_j\left(k_i^{-1} - 1\right) \text{ при } k = k_i^{-1}.$$

Подставив k_i и k_i^{-1} из (7), после преобразований найдем

$$h_j = x_j \frac{k_0 - 1}{(\alpha+1)^i} \text{ при } k = k_i; \; h_j = x_j \frac{1}{(\alpha+1)^i/(1-k_0) - 1} \text{ при } k = k_i^{-1}.$$

Рассмотрим характер изменения шага h_j. Для этого запишем полученное выражение в обобщенной форме $h_j = x_j\beta_i$, где β_i – относительная величина шага

$$\beta_i = \frac{k_0 - 1}{(\alpha+1)^i} \text{ при } k = k_i; \; \beta_i = \frac{1}{(\alpha+1)^i/(1-k_0) - 1} \text{ при } k = k_i^{-1}. \tag{8}$$

Найдем предельные значения β_i. Начальное значение β_0 получим, подставив $i = 0$ в (8). Тогда

$$\beta_0 = k_0 - 1 \text{ при } k = k_i; \quad \beta_0 = \frac{1-k_0}{k_0} \text{ при } k = k_i^{-1}.$$

В пределе при $i \to \infty$ имеем $\beta_i\big|_{i\to\infty} \to 0$. Таким образом, абсолютная величина шага h_j монотонно уменьшается, стремясь к нулю с ростом числа итераций i.

На рисунке 3 изображены графики, иллюстрирующие характер изменения относительной величины шага (8) при двух значениях $\alpha = \alpha_1; \alpha_2$, где $\alpha_1 = 1{,}5$; $\alpha_2 = 3$ и $k_0 = 0{,}8$. Для значения $k_0 = 1/0{,}8$ характер графиков β_i (рисунок 3) не изменится.

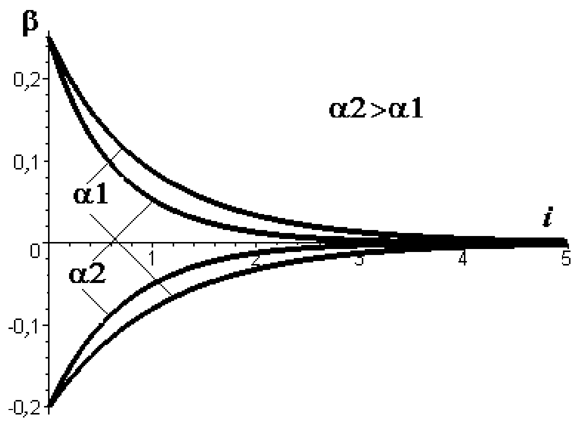

Рисунок 3 – Графики, иллюстрирующие характер изменения относительной величины шага

Процедура компенсации. При решении задачи коррекции возникают принципиальные затруднения в случаях, когда число неизвестных m множества x больше числа уравнений системы n. Такая система не имеет единственного решения.

В качестве примера получения приближенного решения рассмотрим предельный случай $m = 2(n-1)$, когда подлежат коррекции интенсивности всех потоков $x = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_n, \mu_2, \cdots, \mu_n\}$, заданы требуемые вероятности состояний системы (3), начальные значения корректируемых потоков $\lambda = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, $\mu = \{\mu_2, \cdots, \mu_n\}$ и допустимое стандартное отклонение погрешности $\varepsilon = 10^{-4}$. Выберем начальные значения $k_0 = 0{,}8$; μ из (4) и зададим случайные значения λ

$$\lambda = \{0{,}616\,;0{,}276\,;0{,}274\,;0{,}412\,;0{,}0670\,;0{,}503;0{,}316;\}.$$

На рисунке 4, а, б начальные значения μ и λ потоков обозначены цифрой 1.

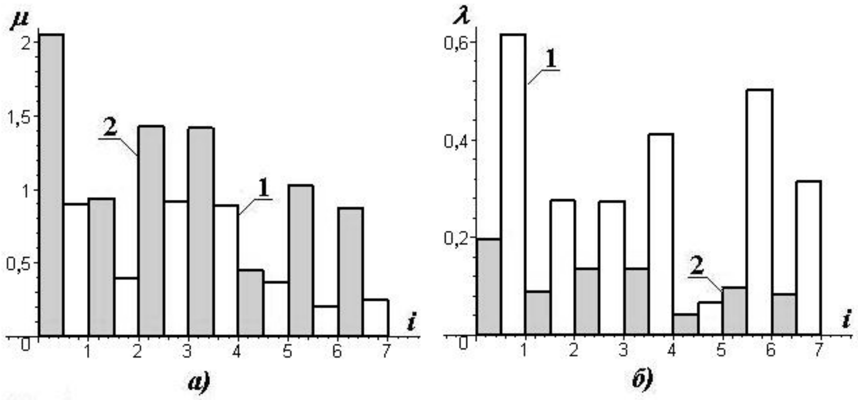

Рисунок 4 – Гистограммы распределения интенсивностей потоков

Результат выполнения Maple – процедуры Recurrent_Cqs.mws помечен цифрой 2. Гистограмма распределения вероятностей состояний совпадает с представленной на рисунке 2, а с погрешностью, график которой изображен на рисунке 5.

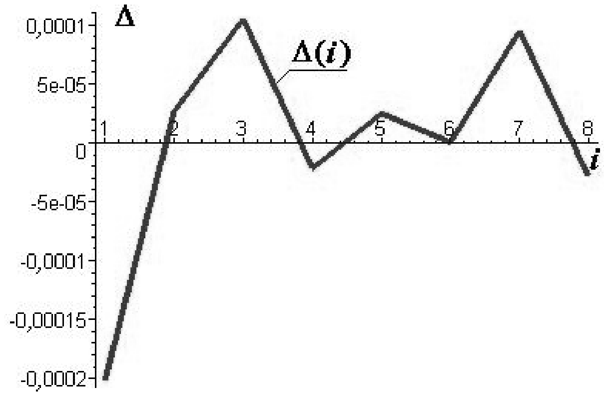

Рисунок 5 – График, иллюстрирующий погрешность распределения

На рисунке 6, а изображен график процесса изменения стандартного отклонения s, а на рисунке 6, б – график относительного изменения шага (8) для k_i (ниже оси абсцисс) и k_i^{-1} (выше оси абсцисс) при $k_0 = 0{,}8$.

В полученном решении с заданным стандартным отклонением $\varepsilon = 10^{-4}$ стандартное отклонение погрешности Δ_i $(i = 1, \cdots, n)$ оказалось равным $s_j = 0{,}88 \cdot 10^{-4}$ при $j = 15$, величине $k_j = 0{,}9926$ и относительном шаге $\beta_j = \pm 0{,}0074$.

Замечания. Для несовместной системы уравнений (когда хотя бы для одного состояния СМО заданы все входящие и исходящие потоки) благодаря применению адаптации с помощью процедуры компенсации интенсивностей потоков множества x можно получить вариант распределения искомых интенсивностей потоков, обеспечивающий максимально возможное приближение к желаемому распределению вероятностей состояний СМО. Ввиду того, что выполнение условия $s_j < \varepsilon$ в случае решения несовместной системы уравнений в подавляющем большинстве случаев недостижимо, необходимо ввести дополнительные ограничения, задав, например, минимальное значение относительного шага β_i, либо предельное значение множителя k_i (k_i^{-1}).

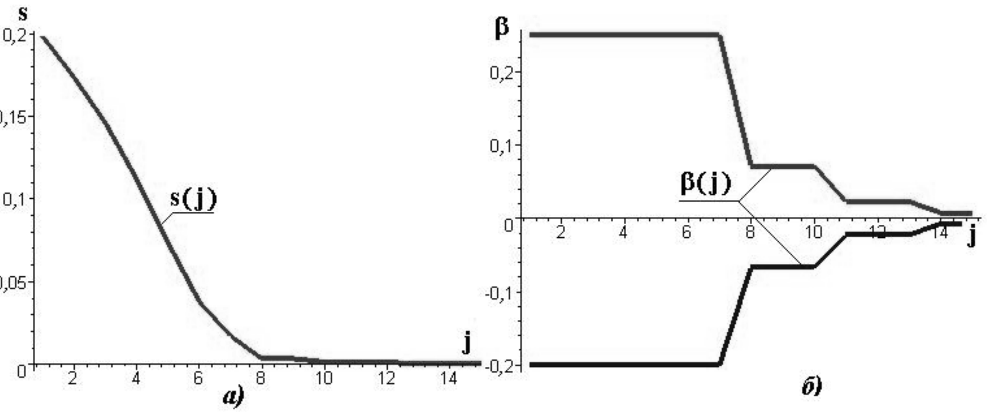

Рисунок 6 – График процесса изменения стандартного отклонения и шага

В качестве критерия адаптации может быть применено при необходимости стандартное отклонение либо дисперсия относительной погрешности Δ_i/P_i ($i=1,\cdots,n$).

Выводы. Показана возможность решения обратной задачи массового обслуживания для линейной системы уравнений прямым и компенсационным методами. Предложенная процедура компенсации позволяет получить приближенное решение совместной системы уравнений с допустимой погрешностью при произвольном соотношении числа уравнений и числа неизвестных. Применение стандартного отклонения (дисперсии) погрешности в качестве критерия выбора шага позволило обеспечить эффективность процедуры компенсации. Представляется возможным получение решения несовместной системы, позволяющего найти значения интенсивностей потоков, обеспечивающих максимально возможное приближение к заданным требованиям качества СМО. Ввиду общности подхода получения приближенного решения рассмотренная процедура применима для коррекции СМО произвольной структуры.

Полученные результаты могут найти применение при проектировании, анализе и моделировании технических, технологических, транспортных и других систем.

Перспективы дальнейших исследований состоят в разработке методов коррекции систем с немарковскими процессами.

Библиографический список использованной литературы

1. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров: учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк. 2000. — 383 с.

2. Долгин В.П. Надежность автомобильных систем: моделирование и оценка / В.П. Долгин, А.О. Харченко. — Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 173 с.

3. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Г.Д. Ким // Проспект. — М.: Изд-во ТК Велби, 2007. — 400 с.

4. Долгин В.П. Метод коррекции децентрализованной системы массового обслуживания / Д.И. Долгин, М.В. Бармина // Прогрессивные направления развития машиноприборостроения: матер. междунар. науч.-техн. конф. студ., асп. и молодых ученых транспорта и экологии, Севастополь, 20 – 23 мая 2013 г. — Севастополь, 2013. — С. 16–17.

Поступила в редакцию 06.01.2014 г.

Долгін В.П., Долгін Д.И., Барміна М.В. Централізована система масового обслуговування

Наведено метод рішення задачі корекції інтенсивностів потоків, що забезпечують задані властивості системи масового обслуговування.

Ключові слова: потік подій, вірогідність, граф станів, зворотна задача, адаптація.

Dolgin V.P., Dolgin D.I., Barmina M.V. The centralized queuing system

The method of task decision of streams intensity correction providing the set properties of the queuing system is expounded.

Keywords: stream of events, probability, states graph, reverse task, adaptation.