УДК 621.365.32:621.3.024

Д.С. Ярымбаш, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
Ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: yarymbash@gmail.com

МЕТОД ЧАСТОТНОЙ АДАПТАЦИИ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА К РЕКУРРЕНТНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ФОРМУЛИРОВКАХ ДЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Предложен метод частотной адаптации уравнений Максвелла для переменного тока к рекуррентным уравнениям в аналогиях формулировок для постоянного тока, обладающий высокой точностью, не требующий применения специализированного коммерческого программного обеспечения и значительных вычислительных ресурсов.

Ключевые слова: *электромагнитное поле, метод, частотная адаптация, постоянный ток, переменный ток*

В последние годы отмечается значительный рост потребности металлургической промышленности в электродной продукции качества UltraHighPower (UHP). В отечественной электродной практике для производства электродов качества UHP применяются электротехнические комплексы графитации переменного тока, работающие по технологии Ачесона. Высокая энергоемкость процесса графитации в ЭТКГ переменного обусловлена как особенностями технологического процесса, так и уровнем потерь в коротких сетях комплекса, которые могут достигать до 20 % от величины активной мощности графитации [1]. Поэтому для снижения себестоимости и повышения конкурентоспособности электродной продукции необходимо повышение энергоэффективности короткой сети ЭТКГ.

Известные методики [2] расчета параметров сильноточных токопроводов, основанные на теории электрических цепей, методах обобщенных выражений и среднегеометрических расстояний, имеют существенные допущения и не отвечают современным требованиям по точности. В последние годы при описании электромагнитных процессов, протекающих в коротких сетях переменного тока широкое распространение получило полевое моделирование [3], однако его применение, как правило, требует использования специализированного дорогостоящего программного обеспечения (ПО) и значительных ресурсов. В тоже время, ПО для моделирования электромагнитного поля постоянного тока имеет статус freeware, является общедоступным и не требует каких-либо дополнительных финансовых затрат.

Поэтому для обеспечения общности подходов к описанию электромагнитных, электротепловых процессов актуальной является задача разработки новых подходов к синтезу математических формулировок электрофизических процессов в областях токопроводящих компонентов короткой сети ЭТКГ.

Целью работы является разработка метода частотной адаптации уравнений Максвелла для переменного тока к рекуррентным уравнениям в аналогиях формулировок для постоянного тока.

Электромагнитные поля в геометрических областях шинных пакетов короткой сети ЭТКГ и окружающей среде описываются сопряженной системой уравнений Максвелла для комплексных амплитуд векторного магнитного потенциала и электрического потенциала

$$\begin{cases} \nabla\times\left[\left(\mu_0\mu_{э\,j}\right)^{-1}\nabla\times\mathbf{A}_j\right]=j\omega\sigma_j\left(\theta_j\right)\left(\mathbf{A}_j+\nabla V_j\right), \\ \nabla\cdot\left[\sigma_j\left(\theta_j\right)\cdot\nabla\cdot V_j\right]=-j\omega\cdot\nabla\cdot\left(\sigma_j\left(\theta_j\right)\cdot\mathbf{A}_j\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$, V – векторный магнитный и электрический потенциалы; $\sigma_j(\theta)$ – температурная зависимость удельной электрической проводимости; θ_j – локальная температура; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; $\mu_э$ – эквивалентная относительная магнитная проницаемость.

Примем, что проекции векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}_i$ и электрические потенциалы ∇V_i являются параметрическими функциями угловой частоты переменного тока ω:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{A}}_i=\mathbf{i}\cdot\dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega,x,y,z)+\mathbf{j}\cdot\dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega,x,y,z)+\mathbf{k}\cdot\dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega,x,y,z), \\ \dot{V}_j=\dot{V}_j(\omega,x,y,z), \end{cases} \tag{2}$$

которые имеют непрерывные производные по параметру ω

$$\begin{cases} \left(\dot{V}_j\right)_\omega = \partial\left[\dot{V}_j(\omega,x,y,z)\right]/\partial\omega, \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_\omega = \partial\left[\dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega,x,y,z)\right]/\partial\omega, \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_\omega = \partial\left[\dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega,x,y,z)\right]/\partial\omega, \left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_\omega = \partial\left[\dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega,x,y,z)\right]/\partial\omega, \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_\omega = \mathbf{i}\cdot\left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_\omega + \mathbf{j}\cdot\left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_\omega + \mathbf{k}\cdot\left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_\omega. \end{cases} \quad (3)$$

Дифференцируем уравнения системы (1) по параметру ω, пренебрегая зависимостями магнитных и электрических свойств материалов короткой сети, ПГ, газовых и охлаждающих сред от угловой частоты переменного тока ω:

$$\begin{cases} \nabla\times\left[(\mu_0\mu_э)^{-1}\cdot\nabla\times\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_\omega\right] = -j\sigma_i(\theta_i)\left[\dot{\mathbf{A}}_i + \nabla\dot{V}_i\right] - j\omega\sigma_i(\theta_i)\left[\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_\omega + \left(\nabla\dot{V}_i\right)_\omega\right], \\ \nabla\cdot\left[\sigma_i(\theta_i)\cdot\nabla\cdot\left(\dot{V}_i\right)_\omega\right] = -j\nabla\left(\sigma_i(\theta_i)\dot{\mathbf{A}}_i\right) - j\omega\nabla\left(\sigma_i(\theta_i)\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_\omega\right). \end{cases} \quad (4)$$

Заменяя непрерывную область изменения частоты ω дискретной последовательностью $\{\omega_0 = 0, \omega_1, \ldots, \omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n = 2\pi\cdot f\}$, преобразуем систему дифференциальных уравнений к интегральной форме

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{V}_i\right)_\omega d\omega = \dot{V}_i(\omega_n,x,y,z) - V_i(0,x,y,z), \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_\omega d\omega = \dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega_n,x,y,z) - A_{xi}(0,x,y,z), \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_\omega d\omega = \dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega_n,x,y,z) - A_{y_i}(0,x,y,z), \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_\omega d\omega = \dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega_n,x,y,z) - A_{zi}(0,x,y,z), \\ \mathbf{i}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_\omega d\omega + \mathbf{j}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_\omega d\omega + \mathbf{k}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\omega_k}^{\omega_{k+1}}\left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_\omega d\omega = \\ = \mathbf{i}\cdot\left[\dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega_n,x,y,z) - A_{xi}(0,x,y,z)\right] + \\ + \mathbf{j}\cdot\left[\dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega_n,x,y,z) - A_{y_i}(0,x,y,z)\right] + \\ \mathbf{k}\cdot\left[\dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega_n,x,y,z) - A_{zi}(0,x,y,z)\right] \end{cases} \quad (5)$$

Для оценки значений определенных интегралов к левым частям соотношений системы (5) принимаются обозначения:

$$\begin{cases} \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k} = \left(\dot{V}_i(\omega_k,x,y,z)\right)_\omega, \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_{\omega,k} = \left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega_k,x,y,z)\right)_\omega, \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_{\omega,k} = \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega_k,x,y,z)\right)_\omega, \\ \left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_{\omega,k} = \left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega_k,x,y,z)\right)_\omega. \end{cases}$$

и применяется формула правых прямоугольников [4]

$$\begin{cases} \dot{V}_j(\omega_n, x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k+1} \cdot (\omega_{k+1} - \omega_k) - V_j(0, x, y, z), \\ \dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega_n, x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_{\omega,k+1} \cdot (\omega_{k+1} - \omega_k) - A_{xi}(0, x, y, z), \\ \dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega_n, x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_{\omega,k+1} \cdot (\omega_{k+1} - \omega_k) - A_{y_i}(0, x, y, z), \\ \dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega_n, x, y, z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dot{\mathbf{A}}_{zi}\right)_{\omega,k+1} \cdot (\omega_{k+1} - \omega_k) - A_{zi}(0, x, y, z), \\ \mathbf{i} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{xi}(\omega_n, x, y, z) + \mathbf{j} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{y_i}(\omega_n, x, y, z) + \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{zi}(\omega_n, x, y, z) = \mathbf{i} \cdot A_{xi}(0, x, y, z) + \\ + \mathbf{j} \cdot A_{y_i}(0, x, y, z) + \mathbf{k} \cdot A_{zi}(0, x, y, z) + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\mathbf{i} \cdot \left(\dot{\mathbf{A}}_{xi}\right)_{\omega,k+1} + \mathbf{j} \cdot \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_{\omega,k+1} + \mathbf{k} \cdot \left(\dot{\mathbf{A}}_{y_i}\right)_{\omega,k+1} \right] \cdot (\omega_{k+1} - \omega_k) \end{cases} \tag{6}$$

Выполняют осреднение соотношений системы (4) для интервала изменения параметра частоты $(\omega_k \le \omega \le \omega_{k+1})$

$$\begin{cases} \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \nabla \times \left[(\mu_0 \mu_э)^{-1} \cdot \nabla \times \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_\omega \right] d\omega = -j \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \{ \sigma_i(\theta_i) [\mathbf{A}_i + \nabla V_i] + \omega \sigma_i(\theta_i) [\mathbf{A}_{\omega i} + \nabla V_{\omega i}] \} d\omega, \\ \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \nabla \cdot \left[\sigma_i(\theta_i) \cdot \nabla \cdot (V_i)_\omega \right] d\omega = -j \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \left[\nabla(\sigma_i(\theta_i) \mathbf{A}_i) + \omega \nabla\left(\sigma_i(\theta_i)(\mathbf{A}_i)_\omega\right) \right] d\omega. \end{cases} \tag{7}$$

и применяют формулы правых прямоугольников [4] для левых частей соотношений системы интегральных уравнений (7) и левых прямоугольников [4] для правых частей, сокращая их на $(\omega_{k+1} - \omega_k)$, что позволяет получить рекуррентные уравнения относительно неизвестных частотных производных потенциалов переноса $\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,k+1}$ и $\left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k+1}$

$$\left\{ \nabla \times \left[(\mu_0 \mu_э)^{-1} \cdot \nabla \times \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,k+1} \right] = -j \sigma_i(\theta_i) \left\{ \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_k + \nabla \left(\dot{V}_i\right)_k + \omega_k \left[\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,k} + \nabla \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k} \right] \right\}, \right. \tag{8}$$

$$\left\{ \nabla \cdot \left[\sigma_i(\theta_i) \cdot \nabla \cdot \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k+1} \right] = -j \left[\nabla\left(\sigma_i(\theta_i) \left(\dot{V}_i\right)_k\right) + \omega_k \nabla\left(\sigma_i(\theta_i) (\mathbf{A}_i)_{\omega,k}\right) \right] \right., \tag{9}$$

допускающих независимые друг от друга решения.

Если выполнить перегруппировку слагаемых между левыми и правыми частями интегральных уравнений системы (7), то аналогичным образом можно получить модифицированные системы уравнений вида:

$$\left\{ \nabla \times \left[(\mu_0 \mu_э)^{-1} \cdot \nabla \times \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,k+1} \right] = -j \sigma_i(\theta_i) \left\{ \left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_k + \nabla \left(\dot{V}_i\right)_k + \omega_{k+1} \left[\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,k} + \nabla \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k} \right] \right\}, \right. \tag{10}$$

$$\left\{ \nabla \cdot \left[\sigma_i(\theta_i) \cdot \nabla \cdot \left(\dot{V}_i\right)_{\omega,k+1} \right] = -j \left[\nabla\left(\sigma_i(\theta_i) \left(\dot{V}_i\right)_k\right) + \omega_{k+1} \nabla\left(\sigma_i(\theta_i) (\mathbf{A}_i)_{\omega,k}\right) \right] \right., \tag{11}$$

которые отличаются от рекуррентных уравнений (8), (9) частотным параметром ω_{k+1}.

В системах уравнений (8) – (11) начальные приближения для векторного магнитного $(\mathbf{A}_i)_0$ и электрического потенциалов $(V_i)_0$ определяются из независимых решений однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \nabla \times \left[\left(\mu_0 \mu_{э_j}\right)^{-1} \nabla \times \mathbf{A}_j \right] = 0, \\ \nabla \cdot \left[\sigma_j(\theta_j) \cdot \nabla \cdot V_j \right] = 0 \end{cases} \tag{12}$$

и могут рассматриваться как приближения по постоянному току.

Начальное приближение для частотных производных векторного магнитного $\left(\dot{\mathbf{A}}_i\right)_{\omega,0}$ и электрического потенциалов $\left(\dot{V}_i\right)_{\omega,0}$ определяются из независимых друг от друга решений уравнений системы (4) при условии $\omega_0 = 0$.

$$\begin{cases} \nabla \times \left[(\mu_0 \mu_э)^{-1} \cdot \nabla \times \left(\dot{\mathbf{A}}_i \right)_{\omega,0} \right] = -j\sigma_i(\theta_i) \left[\left(\dot{\mathbf{A}}_i \right)_0 + \nabla \left(\dot{V}_i \right)_0 \right] \\ \nabla \cdot \left[\sigma_i(\theta_i) \cdot \nabla \cdot \left(\dot{V}_i \right)_{\omega,0} \right] = -j \nabla \left(\sigma_i(\theta_i) \left(\dot{\mathbf{A}}_i \right)_0 \right) \ . \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, система уравнений Максвелла в частотной области (1) для переменного тока адаптируется к математическому описанию и подходам к решению для аналогичных уравнений постоянного тока путем преобразований (2) – (13). Основным преимуществом адаптированного подхода следует считать возможность независимого решения уравнений магнитного и электрического полей относительно частотных производных векторного магнитного и электрического потенциалов на каждом шаге дискретного изменения частотного параметра. Начальное приближение векторного магнитного и электрического потенциалов определяется по постоянному току. Условия сходимости итерационного процесса определяется условиями сходимости для метода Эйлера [5].

По результатам сравнения расчетов электромагнитного поля в области главного шинного пакета секции печей графитации переменного тока на основании системы уравнений (1) с результатами расчетов по методу частотной адаптации (2) – (13) было установлено, что погрешность составляет не более 1%. Это свидетельствует о высокой точности предложенного метода, который не требует использования специализированного коммерческого ПО и может быть реализован в среде FEMM.

Выводы. Предложен новый метод частотной адаптации для переменного тока к рекуррентным уравнениям в аналогиях формулировок для постоянного тока, который позволяет моделировать электромагнитные процессы в токоведущих элементах короткой сети ЭТКГ, обладает высокой точностью, не требует значительных вычислительных ресурсов и позволяет использовать ПО, имеющее статус freeware.

Библиографический список использованной литературы

1. Соседов В.П. Графитация углеродистых материалов / В.П. Соседов, Е.Ф. Чалых. — М.: Металлургия. 1987. — 187 с.

2. Данцис Я.Б. Короткие сети и электрические параметры дуговых электропечей / Я.Б. Данцис, Г.М. Жилов. — М.: Металлургия, 1987. — 320 с.

3. Ярымбаш Д.С. Особенности моделирования электромагнитных процессов в индукторе калибра мундштука пресса / Д.С. Ярымбаш, И.М. Килимник // Вісник КДПУ. — Кременчук, КДПУ, 2007. — № 4 (45). — С. 53–55.

4. Самарский А.А. Введение в численные методы: [учебное пособие для вузов] / А.А. Самарский. — [3-е изд.]. — СПб.: Изд-во «Лань», 2005. — 288 с.

5. Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. — М.: Наука, 1986. — 374 с.

Поступила в редакцию 16.01.2014 г.

Яримбаш Д.С. Метод частотної адаптації рівнянь Максвелла для змінного струму до рекурентних рівнянь у формулюваннях для постійного струму

Запропоновано метод частотної адаптації рівнянь Максвелла для змінного струму до рекурентних рівнянь в аналогіях формулювань для постійного струму, що має високу точність, не потребує застосування спеціалізованого комерційного програмного забезпечення та значних обчислювальних ресурсів.

Ключові слова: електромагнітне поле, метод, частотна адаптація, постійний струм, змінний струм.

Yarymbash D.S. Method of frequency adaptation of Maxwell's equations for the AC to the recurrence equations in formulation of DC

The method of frequency adaptation of Maxwell's equations for the AC to recurrence equations in analogy formulations for DC are proposed. High accuracy of the simulation are provided. Specialized commercial software and significant computational resources are not required.

Keywords: electromagnetic field, method, frequency adaptation, DC, AC.