

УДК 62.50

А.Т. Барабанов, профессор, д-р техн. наук,

Е.С. Солдатенко, аспирант

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 299053

E-mail: root@sebastopol.ru

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ
В КВАЗИОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ**

Рассматривается нелинейная система с аддитивными нелинейностями одной переменной и аддитивным управлением. Система определена как квазиоптимальная при законе управления, построенном линейно-квадратической оптимизацией системы линейного приближения. Ставится и решается задача анализа автоколебаний в квазиоптимальной системе при парциальном введении нелинейностей. Применяется алгебраическая форма метода гармонического баланса для определения условий существования автоколебаний и параметров первой гармоники.

Ключевые слова: нелинейная система, аддитивное управление, оптимальный закон управления, автоколебания, гармонический баланс.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная система с аддитивным управлением вида

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}(x) + \mathbf{B}u(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(x) \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$; $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Матрица нелинейностей задана в виде

$$\mathbf{A}(x) = \{a_{ij}(x_j)\}_1^n. \tag{2}$$

Всякий элемент матрицы функция одной переменной. Матрица \mathbf{B} распределения входов постоянна. Для наглядности приведем запись системы в скалярной форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(x_1) + a_{12}(x_2) + \dots + a_{1n}(x_n) + \sum_{j=1}^m b_{1j}u_j(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(x_1) + a_{22}(x_2) + \dots + a_{2n}(x_n) + \sum_{j=1}^m b_{2j}u_j(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(x_1) + a_{n2}(x_2) + \dots + a_{nn}(x_n) + \sum_{j=1}^m b_{nj}u_j(t). \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Отметим, что подобного рода модели типичны для аэродинамических объектов (см., например, [1]).

Пусть для системы линейного приближения

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}(t), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_1^n$$

постоянная матрица, составленная из коэффициентов $a_{ij} = const$ линейного приближения, построено оптимальное управление в виде стационарной отрицательной обратной связи

$$u = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{K}x, \tag{5}$$

элементы представления которой $\mathbf{R} \in R^{m \times m}$, $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ получены в результате решения задачи линейно-квадратической оптимизации

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $\mathbf{P} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$ заданные симметрические неотрицательно и положительно определенные соответственно весовые матрицы функционала (6), а матрица \mathbf{K} – стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати (СР АУР)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{P} - \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{K} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T$.

Замкнутая обратной связью (5) оптимальная система линейного приближения может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{G}) \mathbf{x}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}. \quad (8)$$

Замкнутую обратной связью (5) нелинейную систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{x} \quad (9)$$

можно назвать квазиоптимальной.

Возникает вопрос, как в такой системе будут проявляться нелинейности? В частности, могут ли и при каких условиях в этой квазиоптимальной системе возникать автоколебания? В общей постановке практически содержательный ответ получить вряд ли возможно. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть задачу о парциальном влиянии нелинейностей на свойства квазиоптимальной системы в поставленной задаче.

2. Блочная модель квазиоптимальной системы. Пусть выделена для рассмотрения одна нелинейность $a_{km}(x_m)$, все остальные представлены линейными функциями $a_{ij}x_j$, $i \neq k$, $j \neq m$. Соответственно модель (9) перестраивается. Нелинейность выносится в « k »-ой строке в отдельное слагаемое. В результате новая модель может быть записана в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B} \mathbf{G}) \mathbf{x} + \mathbf{b} y, \\ y &= \varphi(\sigma), \quad \sigma = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} |_{a_{km}=0}, \quad \mathbf{c}^T = \underbrace{(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)}_m \quad (11)$$

постоянная матрица \mathbf{A} из модели (4), в которой элемент $a_{km} = 0$.

Далее

$$\varphi(\sigma) = \pm a_{km}(x_m); \quad \mathbf{b} = \pm \underbrace{(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)}_k^T,$$

где знак «+» имеет место при нелинейности $a_{km}(x_m)$, график которой расположен в I, III квадрантах, а знак «-» — при нелинейности $a_{km}(x_m)$, график которой расположен во II, IV квадрантах.

Таким образом, в модели (10) в любом случае нелинейность $y = \varphi(\sigma)$ имеет график в (I, III) квадрантах.

Наконец, применяя преобразование Лапласа к линейной части системы, представим ее в принятой при анализе автоколебаний (а также абсолютной устойчивости) блочной форме, представленной на рисунке 1.

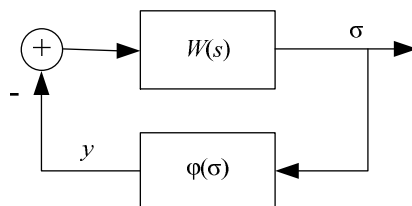


Рисунок 1 — Модель системы в блочной форме

Передаточная функция $W(s)$ линейной части определена как

$$W(s) = -\mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_*)^{-1} \mathbf{b}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{A}_0 - \mathbf{B}\mathbf{G}. \quad (13)$$

Для анализа автоколебаний в представленной блочной модели квазиоптимальной нелинейной системы применим в качестве общей основы метод гармонического баланса, в котором система рассматривается с гармонически линеаризованной нелинейностью в цепи обратной связи, передаточная функция которой имеет вид

$$W_{oc}(s) = K + \frac{K'}{\omega} s. \quad (14)$$

Предполагается, что установившийся периодический процесс $\sigma(t)$ может быть представлен приближенно первой гармоникой

$$\sigma(t) = a \sin \omega t, \quad (15)$$

где a — амплитуда, а ω — частота этой гармоники.

Коэффициенты гармонической линеаризации K, K' определяются по коэффициентам первых гармоник ряда Фурье для выхода y нелинейности $\varphi(\sigma)$. В общем случае они будут функциями $K(a, \omega), K'(a, \omega)$ амплитуды и частоты первой гармоники.

Уравнение гармонического баланса, как известно, имеет вид

$$[K(a, \omega) + K'(a, \omega)j]W(j\omega) = -1. \quad (16)$$

Отметим, что метод гармонического баланса предполагает, что линейная часть системы является фильтром высших гармоник, а значит, выполняется условие

$$2\omega > \omega_n, \quad (17)$$

где ω_n — граничная частота полосы пропускания линейного звена.

Таким образом, задача анализа автоколебаний в системе с моделью (рисунок 1) состоит в том, чтобы определить, существует ли решение (a, ω) уравнения (16) при условии (17), и, если оно существует, найти его.

3. Алгебраическая форма уравнения гармонического баланса [2], [3]. Выделяя вещественную и мнимую части в уравнении (16) запишем его в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) &= -r(a), \\ \operatorname{Im} W(j\omega) &= -r'(a), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r(a) &= \frac{K(a)}{K^2(a) + K'^2(a)}, \\ r'(a) &= \frac{-K'(a)}{K^2(a) + K'^2(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Мы опускаем зависимость коэффициентов K, K' от частоты ω , переходя тем самым к рассмотрению широкого класса случаев, когда этой зависимости нет. Метод решения поставленной задачи может быть принят за основу ее решения и при наличии зависимости коэффициентов от частоты.

Теперь обратимся к уравнениям (18). Пусть передаточная функция (12) представлена в виде отношения двух многочленов

$$W(s) = p(s)/q(s), \quad (20)$$

$$p(s) = p_0 + p_1s + \dots + p_ms^m, \quad q(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_ns^n, \quad (21)$$

где $n > m$.

Группируя четные и нечетные степени, запишем многочлены в виде

$$p(s) = a(x) + sb(x), \quad q(s) = c(x) + se(x), \quad (22)$$

где

$$x = s^2 \quad (23)$$

и

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= p_0 + p_2x + \dots + p_{2k}x^k + \dots, & b(x) &= p_1 + p_3x + \dots + p_{2k+1}x^k + \dots, \\ c(x) &= q_0 + q_2x + \dots + q_{2k}x^k + \dots, & e(x) &= q_1 + q_3x + \dots + q_{2k+1}x^k + \dots, \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Тогда получим представление

$$W(j\omega) = \frac{a(\xi) + j\omega b(\xi)}{c(\xi) + j\omega e(\xi)},$$

где

$$\xi = -\omega^2 < 0, \quad (25)$$

и далее

$$W(j\omega) = \frac{A(\xi)}{D(\xi)} + j\omega \frac{B(\xi)}{D(\xi)}, \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(\xi) &= a(\xi)c(\xi) - \xi b(\xi)e(\xi), \\ B(\xi) &= b(\xi)c(\xi) - a(\xi)e(\xi), \\ D(\xi) &= c^2(\xi) - \xi e^2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Теперь уравнения гармонического баланса (18) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} A(\xi) + r(a)D(\xi) &= 0, \\ \omega B(\xi) + r'(a)D(\xi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

4. Алгебраические методы анализа уравнений гармонического баланса. Аэродинамические нелинейности представляют собой гладкие функции. Но в рамках приближенного метода их уместно заменить на близкие кусочно-гладкие, релейного типа (рисунок 2). Это позволяет ввести формульные представления зависимости коэффициентов гармонической линеаризации от параметров нелинейностей и реализовать применение метода гармонического баланса.

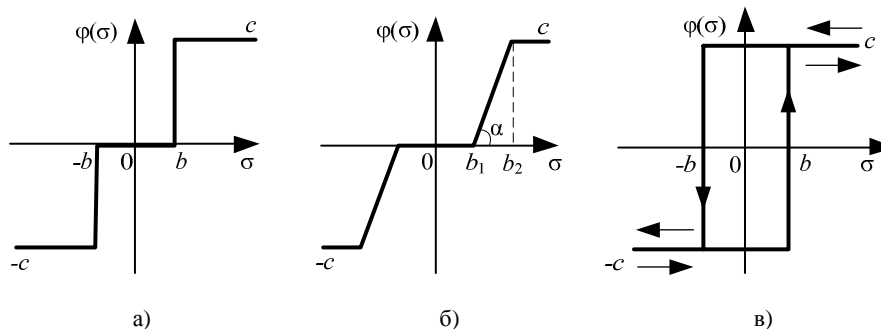


Рисунок 2 — Типичные виды нелинейностей

Рассмотрим различные случаи зависимости коэффициента гармонической линеаризации $r'(a)$ от параметра a .

1. Случай $r'(a) = 0$. Этот случай характерен для однозначных нелинейностей а) и б) рисунка 2.

Уравнения (28) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} 1. & A(\xi) + r(a)D(\xi) = 0, \\ 2. & B(\xi) = 0, \xi = -\omega^2 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Понятно, что в этом случае начинать анализ следует с уравнения (2).

Пусть $\rho^-(F)$ обозначает число всех различных вещественных отрицательных корней многочлена F . Тогда необходимое условие существования автоколебаний (существования решения системы (29)) можно записать в виде

$$\rho^-(B) \neq 0. \quad (30)$$

Это условие можно проверить либо непосредственным вычислением вещественных корней, либо с помощью таблицы Рауса [2], первые строки которой образованы коэффициентами многочленов $B(\xi)$ и $B'(\xi)$, где $B'(\xi) = dB(\xi)/d\xi$.

Алгоритмом Рауса формируются строки таблицы

$$C_k^1 C_k^2 \dots C_k^{n_k}, k = 1, 2, \dots, p.$$

Завершает таблицу строка с нечетным номером $p = 2\delta + 1, \delta \geq 1$. В последующей строке все элементы равны нулю и алгоритм останавливается.

В регулярном случае, когда при формировании строк вспомогательные строки не содержат подряд идущих нулей, справедлива формула

$$\rho^-(B) = \delta - P(C_1^1, C_2^1, \dots, C_p^1),$$

где $P(C_1^1, C_2^1, \dots, C_p^1)$ — число перемен знака в последовательности указанных чисел.

В общем случае, включающем и регулярный, действует более сложная формула

$$\rho^-(B) = P(l_1, l_2, \dots, l_p) - P(C_1^1, C_2^1, \dots, C_p^1),$$

где $l_k = (-1)^{n_k} C_k^{n_k}, k = 1, 2, \dots, p$.

Итак, пусть условие (30) выполняется и определено множество всех различных отрицательных корней многочлена $B(\xi)$ (это множество может состоять и из одного элемента).

Условие гармонического баланса (29) для элемента ξ_* этого множества выполняется для второго равенства. Первое принимает вид

$$A(\xi_*) + r(a)D(\xi_*) = 0. \tag{31}$$

Здесь функция $r(a) = \frac{1}{K(a)}$ известна. Поэтому, если существует решение уравнения

$$K(a) = -\frac{D(\xi_*)}{A(\xi_*)}, \tag{32}$$

то получаем решение (ω_*, a_*) уравнений гармонического баланса ($\omega_*^2 = -\xi_*$) и соответственно первую гармонику $\sigma_*(t) = a_* \sin \omega_* t$. Следует еще убедиться в том, что условие фильтра $2\omega_* > \omega_n$ выполняется. В противном случае вопрос остается открытым.

2. Случай $r' = \text{const} \neq 0$. Этот случай характерен для неоднозначных нелинейностей, например, для нелинейности с гистерезисом в) на рисунке 2.

Уравнения (28) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} 1. A(\xi) + r(a)D(\xi) &= 0, \\ 2. \omega B(\xi) + r'D(\xi) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Второе уравнение по-прежнему не зависит от первого. Но теперь критерий типа (30) принимает вид

$$\rho^+(E) \neq 0, \tag{34}$$

где в левой части неравенства обозначение числа всех различных вещественных положительных корней многочлена

$$E(\omega) = \omega B(-\omega^2) + r'D(-\omega^2).$$

Пусть определен вещественный положительный корень ω_* уравнения $E(\omega) = 0$. После этого вопрос сводится к анализу уравнения

$$r(a) = -\frac{A(-\omega_*^2)}{D(-\omega_*^2)}. \tag{35}$$

Заключения аналогичны приведенным в случае 1.

Заметим, что возможен анализ уравнений (33) и по переменной ξ . Во втором равенстве уравнений перенесем второе слагаемое в правую часть, после чего обе части равенства возведем в квадрат. После этого запишем образовавшееся равенство в виде

$$-\xi B^2(\xi) + r'^2 D^2(\xi) = 0. \quad (36)$$

Теперь заметим, что если ω_* вещественный положительный корень уравнения (34), то $\xi_* = -\omega_*^2$ будет корнем уравнения (36). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Пусть среди вещественных отрицательных корней уравнения (36) существует корень ξ_* , удовлетворяющий уравнению

$$\sqrt{-\xi_*} B(\xi_*) + r' D(\xi_*) = 0$$

и $a_* > 0$ вещественный корень уравнения (35). Тогда пара $(\omega_* = \sqrt{-\xi_*}, a_*)$ будет решением уравнения гармонического баланса и определяет первую гармонику $\sigma_*(t) = a_* \sin \omega_* t$ автоколебаний.

3. Случай $r'(a) \neq \text{const}$. Метод баланса корней уравнений (28). По уравнениям (28) в форме

$$\left. \begin{array}{l} 1. A(\xi) + r(a)D(\xi) = 0, \\ 2. \sqrt{-\xi} B(\xi) + r'(a)D(\xi) = 0 \end{array} \right\} \quad (37)$$

находятся явные зависимости

$$\xi_1(a) < 0, \xi_2(a) < 0. \quad (38)$$

Графическое представление метода баланса представлено на рисунке 3.

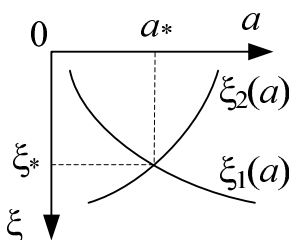


Рисунок 3 — Баланс корней

В реализации этого метода может быть полезным применение утверждения в конце рассмотрения предыдущего случая.

Отметим также, что метод баланса корней можно выполнить для уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 1. A(\xi) + r(a)D(\xi) = 0, \\ 2. \omega B(\xi) + r'(a)D(\xi) = 0 \end{array} \right\}$$

для корней $\omega_1(a) > 0, \omega_2(a) > 0; \xi = -\omega^2$.

5. Применение алгебраических методов анализа уравнений гармонического баланса для квазиоптимальной нелинейной системы управления боковым движением летательного аппарата (ЛА)

В качестве линеаризованной модели (4) управления боковым движением ЛА принята модель тяжелого гражданского самолета Боинг 747, приведенная в работе [1]

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -0,089 & -2,190 & 0,328 & 0,319 & 0 & 0 \\ 0,076 & -0,217 & -0,166 & 0 & 0 & 0 \\ -0,602 & 0,327 & -0,975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,150 & 1,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,000 & 0 & 0 & 0 & 2,210 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega_y \\ \omega_x \\ \gamma \\ \psi \\ z \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,033 \\ 0,026 & 0,151 \\ 0,227 & -0,064 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\Theta} \\ \delta_H \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где $v = -V\beta$ — скорость бокового скольжения; β — угол бокового скольжения; ω_y — угловая скорость рыскания; ω_x — угловая скорость крена; γ — угол крена; ψ — угол рыскания; z — боковое отклонение. За единицы для углов принято 0,01 рад, для перемещений 0,305 м, соответственно для скоростей 0,305 м/с.

Задача бокового маневра состоит в переходе из начального состояния на траекторию прямолинейного движения (в [1] — выход на взлетно-посадочную полосу) и рассматривается в постановке задачи ЛКО (см. раздел 1). Функционал (6) задан матрицами

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Решение задачи с данными по (39), (40) получено в программной среде *MatLab* функцией «*care*». Матрица оптимального закона управления получена в виде

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2,1597 & 3,6450 & 1,8313 & 2,0505 & 7,9215 & 0,8885 \\ 1,0695 & 6,8304 & 0,8061 & 1,4437 & 6,6802 & 0,4589 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Квазиоптимальную нелинейную систему управления боковым движением ЛА определим как систему (3) с тремя нелинейностями $a_{11}(x_1)$, $a_{21}(x_1)$, $a_{31}(x_1)$. Они отражают боковую аэродинамическую силу, момент рыскания и крена соответственно, возникающие при боковом скольжении ЛА. Аэродинамические нелинейности являются гладкими функциями (без угловых точек), но при вычислениях их удобно представлять подходящими модельными нелинейностями вида, представленного на рисунках 2, 3.

В парциальном анализе влияния нелинейностей в каждом из случаев по полученным данным решения задачи ЛКО согласно (13), (12) теперь следует построить модель, представленную на рисунке 1, по которой выполнить затем анализ задачи автоколебаний. Будем рассматривать сначала однозначные нелинейности.

Анализ влияния нелинейности $a_{11}(x_1)$. В этом случае $a_{11} = -0,089$. Значит $\mathbf{c}^T = (100000)$, $\mathbf{b} = -(100000)^T$. Передаточная функция линейной части системы, полученная в *MatLab*, имеет вид

$$W(s) = \frac{s^5 + 2,684s^4 + 3,411s^3 + 1,895s^2 + 0,2278s - 0,02715}{s^6 + 2,649s^5 + 3,385s^4 + 2,814s^3 + 1,44s^2 + 0,4804s + 0,07684}. \quad (42)$$

Далее, будем рассматривать случаи типов нелинейности согласно разделу 4. Многочлены $A(\xi)$, $B(\xi)$, $D(\xi)$ равны

$$A(\xi) = 0,035\xi^5 - 0,871\xi^4 - 0,431\xi^3 + 0,564\xi^2 - 0,0029\xi - 0,0021,$$

$$B(\xi) = \xi^5 - 0,314\xi^4 + 0,641\xi^3 - 0,789\xi^2 - 0,244\xi + 0,0305,$$

$$D(\xi) = \xi^6 - 0,248\xi^5 - 0,574\xi^4 - 0,561\xi^3 - 0,109\xi^2 - 0,0094\xi + 0,0059.$$

Для однозначных типов нелинейностей согласно уравнениям гармонического баланса (29) найдем отрицательные вещественные корни многочлена $B(\xi)$. Получаем один корень $\xi_* = -0,32$.

Тогда согласно (32) получаем уравнение $K(a) = -0,196$. Так как $K(a) > 0$, то решения нет, а значит, автоколебания не возникают при любых параметрах однозначных нелинейностей.

Анализ влияния нелинейности $a_{21}(x_1)$. Передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{1,967s^4 + 2,384s^3 + 0,866s^2 + 0,512s + 0,127}{s^6 + 2,738s^5 + 3,474s^4 + 2,937s^3 + 1,543s^2 + 0,462s + 0,0648}.$$

Многочлены $A(\xi)$, $B(\xi)$, $D(\xi)$ равны

$$A(\xi) = 1,967\xi^5 + 1,171\xi^4 - 2,232\xi^3 - 0,698\xi^2 + 0,016\xi + 0,0082,$$

$$B(\xi) = -3,001\xi^4 + 0,648\xi^3 + 1,658\xi^2 + 0,171\xi - 0,0256,$$

$$D(\xi) = \xi^6 - 0,548\xi^5 - 0,925\xi^4 - 0,301\xi^3 + 0,119\xi^2 - 0,013\xi + 0,0042.$$

Корни многочлена $B(\xi)$ $\xi_* = -0,21$ и $\xi_* = -0,55$. Составим уравнение (32) для каждого из них

$$K(a) = 3,606, \quad K(a) = -0,408.$$

Так как $K(a) > 0$, то второе уравнение не рассматриваем. Если первое уравнение имеет решение, то в системе будут автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{-\xi_*} = \sqrt{0,21} = 0,46$. Период автоколебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 13,7$ с.

Найдем условия, при которых первое уравнение имеет решение.

Рассмотрим однозначные типы нелинейностей а) и б) рисунка 2.

Коэффициент гармонической линеаризации для нелинейности а) имеет вид

$$K(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{4c}{\pi b} \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \leq \frac{2c}{\pi b}, \quad a \geq b,$$

поскольку

$$\max_{0 \leq x \leq 1} x \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}.$$

Значит, для существования решения уравнения $K(a) = 3,606$, необходимо, чтобы для параметров нелинейности выполнялось условие $\frac{2c}{\pi b} > 3,606$ или

$$\frac{c}{b} > 5,664.$$

Например, для параметров нелинейности $c = 0,01$; $b = 0,001$ получим амплитуду автоколебаний $a = 0,0034$.

Коэффициент гармонической линеаризации для нелинейности б)

$$K(a) = \frac{2tg\alpha}{\pi} \left[\arcsin \frac{b_2}{a} - \arcsin \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a}\right)^2} - \frac{b_1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a}\right)^2} \right], \quad a \geq b_2$$

принимает значения от нуля и до максимального значения $K(b_2) = tg\alpha$ при $\frac{b_1}{b_2} \rightarrow 0$. Т.е. для существования решения уравнения $K(a) = 3,606$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$tg\alpha > 3,606.$$

Для нелинейности на рисунке 2, б) с параметрами $c = 0,01$; $b_1 = 0,001$; $b_2 = 0,003$; $tg(\alpha) = 5$ получим амплитуду автоколебаний $a = 0,0032$.

На рисунке 4 показаны промоделированные процессы $x_1(t)$, $x_6(t)$. Сплошная линия соответствует нелинейной системе, пунктир — линеаризованной.

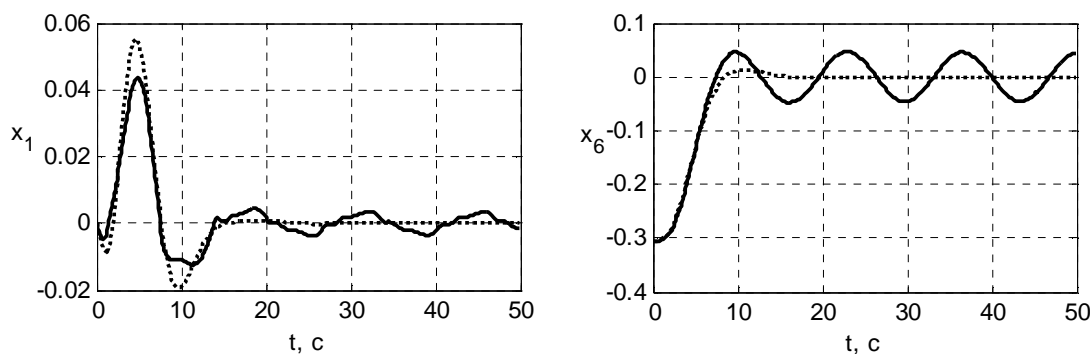


Рисунок 4 — Переходные процессы в системе

Анализ влияния нелинейности $a_{31}(x_1)$. Передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(s) = \frac{0,354s^4 + 1,504s^3 + 1,382s^2 + 0,448s + 0,066}{s^6 + 2,738s^5 + 3,411s^4 + 2,213s^3 + 0,777s^2 + 0,231s + 0,0347}.$$

Многочлены $A(\xi)$, $B(\xi)$, $D(\xi)$ равны

$$A(\xi) = 0,354\xi^5 - 1,527\xi^4 + 0,5\xi^3 - 0,027\xi^2 - 0,0042\xi + 0,0023,$$

$$B(\xi) = 0,533\xi^4 + 1,009\xi^3 - 0,624\xi^2 - 0,0649\xi + 0,0003,$$

$$D(\xi) = \xi^6 - 0,676\xi^5 + 1,068\xi^4 - 0,791\xi^3 - 0,182\xi^2 + 0,0006\xi + 0,0012.$$

Корни многочлена $B(\xi)$ $\xi_* = -2,364$ и $\xi_* = -0,095$. Составим уравнение (32) для каждого из них

$$K(a) = 3,316, \quad K(a) = -0,149.$$

Так как $K(a) > 0$, то второе уравнение не рассматриваем. Если первое уравнение имеет решение, то в системе будут автоколебания с частотой $\omega = \sqrt{-\xi_*} = \sqrt{2,364} = 1,54$ (период $T = 4,1$ с).

Для однозначной нелинейности на рисунке 2, а) необходимое и достаточное условие $\frac{2c}{\pi b} > 3,316$ существования решения уравнения $K(a) = 3,316$ приводит к соотношению

$$\frac{c}{b} > 5,208.$$

Для параметров нелинейности $c = 0,1$; $b = 0,01$ получим амплитуду автоколебаний $a = 0,037$.

Для однозначной нелинейности на рисунке 2, б) необходимое условие существования решения уравнения $K(a) = 3,316$ имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha > 3,316.$$

Для параметров $c = 0,1$; $b_1 = 0,01$; $b_2 = 0,03$; $\operatorname{tg}(\alpha) = 5$ получим амплитуду автоколебаний $a = 0,035$.

Рассмотрим теперь неоднозначную нелинейность с гистерезисом (рисунок 3). Коэффициенты гармонической линеаризации для данной характеристики

$$K(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad K'(a) = -\frac{4cb}{\pi a^2}, \quad a \geq b.$$

Тогда

$$K^2 + K'^2 = \frac{16c^2}{\pi^2 a^2},$$

$$r(a) = \frac{\pi}{4c} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad r' = \frac{\pi b}{4c}.$$

Второе из уравнений гармонического баланса (33) зависит только от частоты

$$\omega B(-\omega^2) + r' D(-\omega^2) = 0. \tag{43}$$

Если правая часть уравнения (35) неотрицательна, решение первого уравнения (33) существует и имеет вид

$$\frac{\pi}{4c} \sqrt{a^2 - b^2} = -\frac{A(\xi_*)}{D(\xi_*)} \Rightarrow a_* = \sqrt{\left[\frac{4c}{\pi} \frac{A(\xi_*)}{D(\xi_*)} \right]^2 + b^2}.$$

Анализ влияния нелинейности $a_{21}(x_1)$. Зададимся параметрами нелинейности $c = 0,01$; $b = 0,001$. Тогда $r' = 0,08$.

Положительные вещественные корни уравнения (43) равны $\omega_*^1 = 3,34$, $\omega_*^2 = 0,75$, $\omega_*^3 = 0,45$, $\omega_*^4 = 0,013$. Для них уравнение (35) запишется в виде

$$r(a) = 0,159, \quad r(a) = -2,48, \quad r(a) = 0,292, \quad r(a) = -1,96.$$

Второе и четвертое уравнения решений не имеют, а первое и третье дают $a = 0,0023$ и $a = 0,0038$ соответственно с периодами $T = 1,88$ с и $T = 13,9$ с.

Анализ влияния нелинейности $a_{31}(x_1)$. Зададимся параметрами нелинейности $c = 0,1$; $b = 0,01$. Тогда $r' = 0,08$.

Положительные вещественные корни уравнения (43) равны $\omega_*^1 = 1,27$, $\omega_*^2 = 0,31$. Для них уравнение (35) запишется в виде

$$r(a) = 0,468, \quad r(a) = -6,85.$$

Второе уравнение не имеет решения, а из первого находим $a = 0,061$. Период автоколебаний $T = 4,94$ с.

6. Заключение. Поставленная задача алгебраического анализа автоколебаний в квазиоптимальной системе при парциальном введении нелинейностей достаточно подробно рассмотрена. Достоинства алгебраического метода решения задачи проявляются в том, что уравнения гармонического баланса принимают вещественную полиномиальную форму и сводятся к локальному анализу баланса вещественных корней полиномов формы и амплитуды первой гармоники автоколебаний. Полученные условия существования решений уравнений баланса для рассмотренных типичных нелинейностей позволяют определить области значений параметров нелинейности, при которых возникают автоколебания, а также вычислить при этих значениях амплитуду и частоту первой гармоники. Таким образом, на поставленный вопрос — возможны ли автоколебания в рассматриваемой системе — получен теоретически положительный ответ. Вместе с тем, следует иметь в виду реальные особенности системы. Например, в рассмотренном примере возникает вопрос о реальности тех аэромеханических конфигураций, при которых имеют место полученные параметры нелинейности.

Библиографический список использованной литературы

1. Брайсон А. Новые идеи по теории управления / А. Брайсон // Аэрокосмическая техника. — 1986. — № 8. — С. 59–75.
2. Барабанов А.Т. Метод Рауса в теории систем. Обобщение проблемы Рауса в задачах теории систем / А.Т. Барабанов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 35–44.
3. Барабанов А.Т. Алгебраическая форма анализа периодических режимов в нелинейной системе / А.Т. Барабанов, Д.Н. Безденежных // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление. — 2000. — Вып. 27. — С. 4–10.

Поступила в редакцию 11.01.2014 г.

Барабанов О.Т., Солдатенко О.С. Алгебраїчний аналіз автоколивань у квазіоптимальній нелінійній системі

Розглядається нелінійна система з адитивними нелінійностями однієї змінної і адитивним керуванням. Система визначена як квазіоптимальна при законі керування, побудованому лінійно-квадратичною оптимізацією системи лінійного наближення. Ставиться і вирішується задача аналізу автоколивань в квазіоптимальній системі при парціальному введенні нелінійностей. Застосовується алгебраїчна форма методу гармонійного балансу для визначення умов існування автоколивань і параметрів першої гармоніки.

Ключові слова: нелінійна система, адитивне керування, оптимальний закон керування, автоколивання, гармонійний баланс.

Barabanov A.T., Soldatenko E.S. Algebraic analysis of oscillations in a quasioptimal nonlinear system

A nonlinear system with additive nonlinearities of one of the variable and additive control is considered. The system is defined as the quasioptimal with the control law, that was built by linear quadratic optimization of the linear approximation system. The problem of the analysis of oscillations in the quasioptimal system with a partial introduction of nonlinearities is solved. Algebraic form of the harmonic balance method for determining of the conditions for the existence of self-oscillation parameters and the first harmonic is applied.

Keywords: nonlinear system, additive control, optimal control law, oscillations, harmonic balance.