

УДК 62-50

**А.И. Грушун, доцент, канд. техн. наук,****Т.А. Грушун, доцент, канд. техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Россия, 99053**E-mail: gai\_gta@mail.ru***АНАЛИЗ НА ЭВМ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА  
ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА**

*Рассматривается машинно-ориентированный подход к анализу возможности возникновения автоколебаний в нелинейных системах автоматического управления (САУ) на основе применения положительных вещественных корней специальным образом построенных алгебраических уравнений. Показано, что предлагаемое решение задачи позволяет существенно повысить сложность исследуемых САУ.*

**Ключевые слова:** *нелинейная система автоматического управления, автоколебания, гармонический баланс, уравнение Гольдфарба, положительные вещественные корни.*

**Введение.** При изучении поведения замкнутых нелинейных САУ, изолированных от воздействия внешних возмущений, приходится исследовать не только устойчивость невозмущенного движения, но и определять возможные формы такого движения. Обусловлено это тем, что нелинейные замкнутые САУ, в отсутствие возмущений, могут находиться не обязательно в состоянии покоя, но и в состоянии незатухающих колебаний (автоколебаний) [1], которые в ряде случаев существенно влияют на процессы управления.

**Постановка задачи.** Будем рассматривать лишь задачу определения на ЭВМ возможности возникновения в нелинейной замкнутой системе автоколебаний без исследования устойчивости этих колебаний с помощью приближенного, но, как показывает практика, достаточно эффективного метода – метода гармонического баланса Л.С.Гольдфарба [1–3]. Реализация метода Л.С.Гольдфарба требует построения годографа линейной части САУ. Этот годограф, как и любой частотный годограф, имеет нерегулярный характер изменения и для сложных систем его построение может превратиться в существенную проблему, связанную с выбором шага изменения и максимального значения частоты, которая не имеет общего удовлетворительного решения. В свою очередь, для анализа автоколебаний нужна не вся частотная кривая, а лишь ее отдельные точки.

**Цель статьи.** Разработка метода определения на ЭВМ этих точек по положительным вещественным решениям алгебраических уравнений. Предлагаемый алгебраический подход позволяет в бесконечном множестве точек годографа гарантированно установить те, которые полностью определяют решение поставленной задачи. Определение этих точек не требует перебора всех значений частотной характеристики, тем самым не требует ее непосредственного построения. Анализ известных исследований показал, что таким образом данная задача не решалась.

**Анализ автоколебаний на основе применения положительных вещественных решений алгебраических уравнений.** В большинстве практически важных случаев нелинейную замкнутую САУ можно представить структурной схемой, показанной на рисунке 1. В системе выделены линейная часть (ЛЧ) и нелинейный элемент (НЭ).

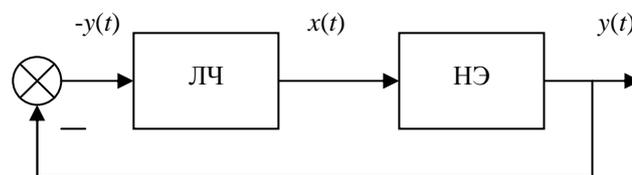


Рисунок 1 – Структурная схема нелинейной САУ

Для определения наличия автоколебаний необходимо графически решить уравнение вида [1]

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = -1/W_{НЭ}(A), \quad (1)$$

где  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  – частотная передаточная функция линейной части САУ;  $W_{НЭ}(A)$  – эквивалентная передаточная функция гармонически линеаризованного нелинейного элемента.

Решение уравнения (1) осуществляется путем построения в одной комплексной плоскости характеристик  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  и  $-1/W_{НЭ}(A)$ . Если они пересекаются, то в системе возможны автоколебания [1–3].

Будем рассматривать только варианты простых безгистерезисных нелинейностей. Например, таких как: идеальное поляризованное реле без зоны нечувствительности и без гистерезиса (рисунок 2), поляризованное реле с зоной нечувствительности без гистерезиса (рисунок 3) и т.п.

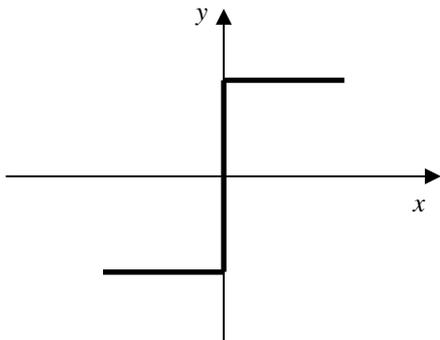


Рисунок 2 – Идеальное поляризованное реле

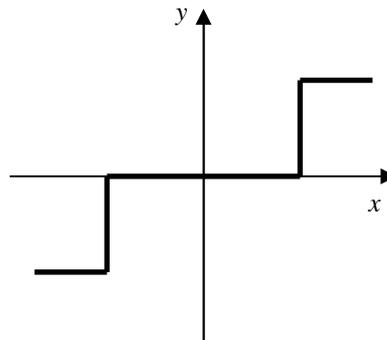


Рисунок 3 – Поляризованное реле с зоной нечувствительности

Для таких нелинейностей отрицательная обратная эквивалентная характеристика  $-1/W_{НЭ}(A)$  будет располагаться только на действительной оси [2] и построение ее не представляет никакой сложности. То есть, решение задачи сводится к поиску точек пересечения годографа линейной части  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  с действительной осью и анализу – попадают ли они в область значений функции  $-1/W_{НЭ}(A)$  или нет.

Рассмотрим передаточную функцию линейной части САУ вида

$$W_{ЛЧ}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (2)$$

где  $B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i$  и  $A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$  – полиномы с вещественными коэффициентами.

Заменив в (2)  $s$  на  $j\omega$ , получим

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i} = \frac{c_1(\omega) + jc_2(\omega)}{z_1(\omega) + jz_2(\omega)},$$

тогда выражение для построения годографа  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  будет иметь вид

$$W_{ЛЧ}(j\omega) = \frac{r(\omega)}{z(\omega)} + j \cdot \frac{m(\omega)}{z(\omega)}, \quad (3)$$

где  $r(\omega) = c_1(\omega)z_1(\omega) + c_2(\omega)z_2(\omega)$ ,  $m(\omega) = c_2(\omega)z_1(\omega) - c_1(\omega)z_2(\omega)$ ,  $z(\omega) = z_1^2(\omega) + z_2^2(\omega)$  – полиномы с вещественными коэффициентами.

Далее определяем частоты, на которых годограф  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  пересекает действительную ось. Это соответствует случаю, когда мнимая часть (3) равна нулю. Очевидно, что эти частоты можно найти, не строя амплитудно-фазовую частотную характеристику, а вычислив положительные вещественные корни уравнения

$$m(\omega) = 0$$

и исключив из них совпадающие с положительными вещественными корнями уравнения  $z(\omega) = 0$ . Подставив полученные корни-частоты в действительную часть (3), определяем значения точек пересечения  $W_{ЛЧ}(j\omega)$  с действительной осью. И если среди найденных точек есть попадающие на интервал функции  $-1/W_{НЭ}(A)$ , то в исследуемой нелинейной САУ присутствуют автоколебания.

**Вывод.** Предлагаемый в статье машинно-ориентированный подход существенно улучшает классическую методику определения автоколебаний в нелинейных САУ, имеющих сложную линейную часть, так как не требует непосредственного построения кривой годографа линейной части. Он основан

на вычислении и анализе вещественных решений алгебраических уравнений, которые, в отличие от комплексных решений, определяются на ЭВМ численными методами с высокой надежностью и скоростью даже для уравнений высоких порядков. Задачей дальнейшего исследования является разработка методик, алгоритмического и программного обеспечения определения автоколебаний в САУ с нелинейностями гистерезисного типа.

**Библиографический список использованной литературы**

1. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования / В.Я. Ротач. — М.: Энергия, 2003. — 440 с.
2. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. — М.: Наука, 2003. — 768 с.
3. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления / А.А. Воронов. — Л.-М.: Энергия, 1966. — Ч. 2. — 344 с.

*Поступила в редакцию 12.01.2014 г.*

**Грушун А.І., Грушун Т.А. Аналіз на ЕОМ автоколивань у нелінійних системах автоматичного керування на основі методу гармонійного балансу**

Розглядається машинно-орієнтований підхід до аналізу можливості виникнення автоколивань в нелінійних системах автоматичного управління (САУ) на основі застосування позитивних дійсних коренів спеціальним чином побудованих алгебраїчних рівнянь. Показано, що пропонуване рішення задачі дозволяє істотно підвищити складність досліджуваних САУ.

**Ключові слова:** нелінійна система автоматичного управління, автоколивання, гармонійний баланс, рівняння Гольдфарба, позитивні речові коріння.

**Grushun A.I., Grushun T.A. The Analysis on the Computer Autooscillations in Nonlinear Automatic Control Systems Based on the Method Harmonic Balance**

The machine-oriented approach to analyzing the possibility of autooscillations in nonlinear automatic control systems (ACS) is considered on the basis of application of positive real roots by special algebraic equations. It is shown that the proposed solution to the problem allows to raise essentially complexity researched ACS.

**Keywords:** nonlinear automatic control system, autooscillations, harmonic balance, equation Goldfarb, positive real roots.