УДК 681.5.09
А.Л. Карташов, инженер,
В.Я. Копп, д-р техн. наук, профессор,
Л.Е. Карташов, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская, 33 г. Севастополь, Украина. 99053
E-mail: sevntuaps@gmail.com

МОДЕЛЬ ГИБКОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО МОДУЛЯ, СНАБЖЕННОГО ВРЕМЕННЫМ РЕЗЕРВОМ, С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ НАКОПИТЕЛЯ

Рассмотрена модель ГПМ, снабженного временным резервом, с учетом надежности накопителя, и эквивалентная замена ГПМ простейшим элементом, для которого определены функции распределения времени наработки на отказ и восстановление.
***Ключевые слова**: полумарковская модель, ГПМ, коэффициент готовности.*

Введение. Временное резервирование по-прежнему остаётся одним из эффективных средств повышения надежности технических устройств. Данному вопросу посвящено большое число исследований, во многих из которых ограничиваются, как правило, определением коэффициента готовности рассматриваемой системы. Другим недостатком предлагаемых моделей является то, что они не учитывают надежность накопителя, поскольку это приводит к существенному увеличению сложности задачи. Однако при построении моделей многофазных систем необходимо оперировать с функциями распределений времен между отказами и восстановлениями элементов с временным резервированием, причем временной резерв в общем случае будет зависеть от надежности накопителя. Возможные структуры гибких производственных модулей (ГПМ) с накопителями промежуточной продукции (Н), которые обеспечивают временной резерв, представлены на рисунках 1, а, б.

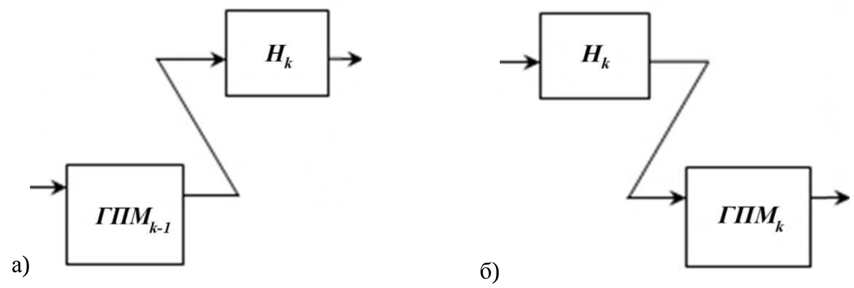

Рисунок 1 – Структура ГПМ, работающего на выдачу (а) продукции в накопитель и на прием (б) продукции из накопителя

Различие структур, представленных на рисунке 1, обусловлено тем, что один и тот же накопитель может работать совместно с предыдущим ГПМ на прием продукции и совместно с последующим на выдачу продукции. В дальнейшем структуру, представленную на рисунке 1, а, будем называть сопряженным участком, а на рисунке 1, б – основным. С точки зрения математического описания оба участка аналогичны, поэтому будем строить модель только для сопряженного участка.

Постановка задачи. Поставим задачу следующим образом: пусть известны функции распределения $F_{01}(t)$ и $F_{10}(t)$ времен между отказами ξ_1 и восстановлениями η_1 ГПМ соответственно, а также функции распределения $F_{03}(t)$ и $F_{30}(t)$ времен между отказами ξ_3 и восстановлениями η_3 накопителя. Функции $F_{01}(t)$ и $F_{03}(t)$ будем считать распределенными экспоненциально. Необходимо определить функции распределения времен между отказами и восстановлениями ГПМ и накопителя в целом, то есть эквивалентно заменить их простейшим элементом, имеющим два факторных состояния.

Цель статьи. В данной работе ставится задача определения стационарных характеристик системы и получение коэффициента готовности участка ГПМ–накопитель.

Граф состояний системы представлен на рисунке 2.

Состояния на графе:

S_0 – ГПМ исправен, накопитель исправен, временной задел в накопителе ξ_2, состояние работоспособное;

S_1 – ГПМ отказал, накопитель исправен, временной задел в накопителе ξ_2, состояние работоспособное;

S_2 – ГПМ отказал, накопитель исправен, резерв времени израсходован, поскольку запас продукции в накопителе исчерпан ($\xi_2 = 0$), состояние не работоспособное;

S_3 – ГПМ отказал, накопитель отказал, состояние не работоспособное.

Не раскрытые обозначения, представленные на графе (рисунок 2):

x – случайная величина с функцией распределения $F_{20}(t)$, время восстановления ГПМ из состояния S_1;

ξ_1 – случайная величина с функцией распределения $F_{01}(t)$, время наработки на отказ ГПМ;

ξ_2 – случайная величина с функцией распределения $F_{12}(t)$, время прекращения работы накопителя при его опорожнении;

ξ_3 – случайная величина с функцией распределения $F_{03}(t)$, время наработки на отказ накопителя;

η_1 – случайная величина с функцией распределения $F_{10}(t)$, время восстановления ГПМ;

η_2 – случайная величина с функцией распределения $F_{30}(t)$, время восстановления накопителя.

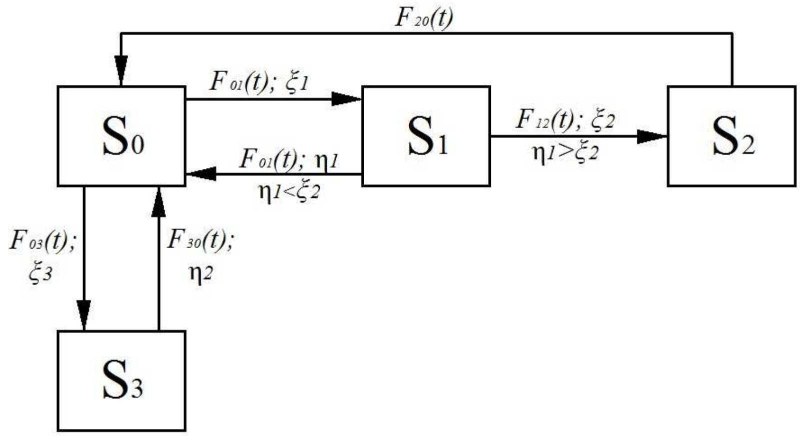

Рисунок 2 – Граф состояний системы

Выражения для вероятностей перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} P_{01} = P\{\xi_1 < \xi_3\} = \int\limits_0^\infty F_{01}(t)\, f_{03}(t)dt \\ P_{10} = P\{\eta_1 < \xi_2\} = \int\limits_0^\infty F_{10}(t)\, f_{12}(t)dt \\ P_{03} = P\{\xi_1 < \xi_3\} = \int\limits_0^\infty F_{03}(t)\, f_{01}(t)dt \cdot \\ P_{12} = P\{\xi_1 < \eta_2\} = \int\limits_0^\infty F_{12}(t)\, f_{10}(t)dt \\ P_{20} = 1 \\ P_{30} = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Функции распределения времен пребывания в состоянии имеют вид:

$$\begin{cases} F_0(t) = 1 - \overline{F}_{01}(t) \cdot \overline{F}_{03}(t) \\ F_1(t) = 1 - \overline{F}_{10}(t)\overline{F}_{12}(t) \\ F_2(t) = F_{20}(t) \\ F_3(t) = F_{30}(t) \end{cases} . \tag{2}$$

Из состояния S_2 система с вероятностью P_{20} переходит в состояние S_0, причем время пребывания в состоянии S_2 есть разность между η_1 и ξ_1, обозначаемая в литературе [1] $[\eta_1 - \xi_1]^+$. Тогда

$$F_{20}(t) = \frac{\int\limits_0^\infty \left[F_{01}(t+y) - F_{01}(y)\right] f_{12}(y)dy}{\int\limits_0^\infty \overline{F}_{01}(y)\, f_{12}(y)dy} . \tag{3}$$

Времена пребывания в состояниях определяется выражениями

$$\theta_0 = (\xi_1 \wedge \xi_1),\ \theta_1 = (\eta_1 \wedge \xi_2),\ \theta_2 = \xi_4,\ \theta_3 = \eta_2.$$

Средние времена θ_i пребывания системы в состояниях S_i ($i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) можно определить как математическое ожидание случайных величин, описываемых функциями распределения (2, 3).

Обозначим стационарное распределение полумарковского процесса, $\pi = (\pi_i, i \in E)$, где E – множество всех возможных состояний. Полумарковский процесс $S(t)$ в дискретном фазовом пространстве состояний, согласно [2], задается выражением

$$\pi_i = \frac{\rho_i \overline{\theta}_i}{\overline{\theta}}, \tag{4}$$

где $\rho = (\rho_i,\ i \in E)$ – вектор стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Составляющие вектора определяются из уравнений

$$\rho_j = \sum_{i \in E} \rho_i P_{ij}, \quad j \in E \tag{5}$$

и условия нормировки

$$\sum_{i \in E} \rho_i = 1. \tag{6}$$

Значение $\overline{\theta}$ определяется выражением

$$\overline{\theta} = \sum_{i \in E} \rho_i\, \overline{\theta}_i\ . \tag{7}$$

Исходя из выражения (5) можно составить систему

$$\begin{cases} \rho_0 = \rho_1 P_{10} + \rho_2 P_{20} + \rho_3 P_{30} \\ \rho_1 = \rho_0 P_{01} \\ \rho_2 = \rho_1 P_{12} \\ \rho_3 = \rho_0 P_{03} \end{cases} \tag{8}$$

с условием нормировки $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$.

Подставим условие нормировки в систему (8) вместо первого выражения. Получим систему

$$\begin{cases} \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1 \\ \rho_0 P_{01} - \rho_1 = 0 \\ \rho_1 P_{12} - \rho_2 = 0 \\ \rho_0 P_{03} - \rho_3 = 0 \end{cases}. \tag{9}$$

Решение системы (9) дает выражения для компонентов вектора стационарного распределения вложенной цепи Маркова.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1} \\ \rho_1 &= \frac{P_{01}}{P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1} \\ \rho_2 &= \frac{P_{01} \cdot P_{12}}{P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1} \\ \rho_3 &= \frac{P_{03}}{P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1} \end{aligned} \tag{10}$$

Средние времена пребывания в состояниях определяются выражениями:

$$\begin{gathered} \overline{\theta}_0 = \int_0^\infty \overline{F}_{01}(t) \cdot \overline{F}_{03}(t)dt;\ \overline{\theta}_1 = \int_0^\infty \overline{F}_{10}(t) \cdot \overline{F}_{12}(t)dt; \\ \overline{\theta}_3 = \int_0^\infty \overline{F}_{20}(t)dt;\ \overline{\theta}_3 = \int_0^\infty \overline{F}_{03}(t)dt. \end{gathered} \tag{11}$$

и

$$\overline{\theta} = \frac{\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta}_3}{(P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}. \tag{12}$$

Подставляя выражение (10, 11, 12) в (7), получаем компоненты вектора стационарного распределения полумарковского процесса:

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\rho_0 \cdot \overline{\theta}_0 \cdot (P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}{(\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta}_3)} \\
\pi_1 &= \frac{\rho_1 \cdot \overline{\theta}_1 \cdot (P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}{(\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta})} \\
\pi_2 &= \frac{\rho_2 \cdot \overline{\theta}_2 \cdot (P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}{(\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta})} \\
\pi_3 &= \frac{\rho_3 \cdot \overline{\theta}_3 \cdot (P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}{(\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta})}
\end{aligned} . \qquad (13)
$$

На основании формул (12) можно записать выражение для коэффициента готовности участка ГПМ–накопитель:

$$
K_{\Gamma} = \pi_0 + \pi_1 = \frac{(\rho_0 \cdot \overline{\theta}_0 + \rho_1 \cdot \overline{\theta}_1) \cdot (P_{01} \cdot P_{12} + P_{01} + P_{03} + 1)}{(\overline{\theta}_0 + P_{01} \cdot \overline{\theta}_1 + P_{01} \cdot P_{12} \cdot \overline{\theta}_2 + P_{03} \cdot \overline{\theta}_3)} . \qquad (14)
$$

Определение значения коэффициента готовности по полученным выражениям не представляет особой сложности и может быть реализовано, например, в любой версии пакета Maple. Было проведено моделирование для показательных законов распределения, причем интенсивность потока отказов ГПМ принималась равной 0,25 час$^{-1}$, накопителя – 0,125 час$^{-1}$, интенсивность потока восстановлений ГПМ и накопителя 5 час$^{-1}$ и 10 час$^{-1}$ соответственно. Среднее время опорожнения накопителя было принято равным 30 минут. При моделировании изменялись интенсивности потока восстановлений ГПМ (μ_1) и интенсивность потока отказов накопителя (λ_3), данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты моделирования коэффициента готовности

μ_1, час$^{-1}$	5	5,26	5,6	5,88	6,25	6,67	7,14
$K_г$	0,773	0,779	0,785	0,791	0,798	0,805	0,812
λ_3, час$^{-1}$	0,125	0,1	0,083	0,071	0,063	0,056	0,05
$K_г$	0,773	0,773	0,776	0,777	0,778	0,779	0,779

Следует отметить, что введенное допущение о том, что функции распределения времени наработки на отказ ГПМ $F_{01}(t)$ и накопителя $F_{03}(t)$ экспоненциальные значительно упрощает модель. Данное допущение можно обосновать следующими рассуждениями. Любой ГПМ является сложной технической системой, состоящей из большого числа узлов и деталей. Поток отказов отдельной детали является экспоненциальным. При отказе какой-либо детали отказывает и ГПМ, причем событие отказа ГПМ представляет собой простую сумму событий отказа любой из составляющих его деталей. В этом случае можно сослаться на теорему Хинчина [3]: если поток представляет собой суперпозицию стационарных, ординарных и взаимно независимых потоков, и λ_i.– интенсивность i-го потока, то суммарный поток будет стремиться к простейшему потоку с интенсивностью $\Lambda = (\lambda_1 + \lambda_i + \ldots + \lambda_n)$, если n достаточно велико. Поскольку число деталей в ГПМ достаточно велико, то мы можем принять такое допущение. Аналогичные рассуждения применимы и для накопителя.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Представленная модель позволяет определить коэффициент готовности основного или сопряженного участка, а введенное допущение об экспоненциальности функции наработки на отказ ГПМ и накопителя позволит значительно упростить модель за счет того, что осуществляется переход от общего фазового к дискретному пространству состояний. Дальнейшее направление исследований будет заключаться в нахождении функции распределения наработки на отказ и восстановления структуры ГПМ – накопитель в целом.

Библиографический список использованной литературы

1. Копп В.Я. Моделирование автоматизированных производственных систем / В.Я. Копп.— Севастополь: СевНТУ, 2012. — 700 с.

2. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк / Отв. ред. А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.

3. Хинчин А.Я. Математические методы в теории массового обслуживания / А.Я. Хинчин. — М: Изд-во Академии наук, 1955. — 123 с.

Поступила в редакцию 12.01.2014 г.

Карташов О.Л., Копп В.Я., Карташов Л.Е. **Модель гнучкого виробничого модуля, забезпеченого временним резервом, з урахуванням надійності**

Розглянуто модель ГВМ, забезпеченого временним резервом, з урахуванням надійності накопичувача, та еквівалентна заміна ГВМ простішим елементом, для якого визначені функції розподілу часу напрацювання на відмову та відновлення.

Ключові слова: напівмарківська модель, ГВМ, коефіцієнт готовності.

Kartashov A., Kopp V., Kartashov L. **The model of flexible production module with time preservation supply and storage device' reliability registration**

The model of FPM had been seen, which supplied with time reservation and storage device' reliability registration, and equal exchange FPM to simplest element. Also functions of time distribution MTBF and recovery were determined.

Keywords: semi-Markov model, FPM, availability factor.