УДК 62.50

Б.А. Скороход, профессор, д-р техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: b.skorohod@mail.ru

ОСЦИЛЛЯЦИИ ОЦЕНОК РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ДИФФУЗНОЙ ИНИЦИАЛИЗАЦИИ

Исследовано асимптотическое поведение смещения и матрицы вторых моментов ошибки оценивания. Получены условия, при выполнении которых средний квадрат ошибки оценивания монотонно возрастающая функция времени, а норма вектора смещения оценки монотонно убывающая функция на стадии инициализации. Полученные теоретические результаты иллюстрируются на численном примере задачи идентификации динамической системы с помощью нейронной сети.

Ключевые слова: *рекуррентный метод наименьших квадратов, диффузная инициализация, асимптотическое поведение оценок.*

Введение. Задачи оценки параметров линейной регрессии возникают в самых различных областях, включающих, в частности, идентификацию объектов управления, адаптивную обработку сигналов, адаптивное управление, обучение нейросетевых моделей. При решении подобных задач широко используется рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) благодаря простоте его рекурсивной реализации и скорости сходимости [1]. Для инициализации РМНК, необходимо задать начальные условия для вектора оценки α_t неизвестных параметров α и матрицы P_t, удовлетворяющей разностному уравнению. Причем, типичной является ситуация, когда априорная информация относительно оцениваемых неизвестных параметров неточная или отсутствует. В этом случае обычно полагают начальное значение для α_t равным нулю, а начальную матрицу для P_t пропорциональной большому параметру μ [2]. Известно [3, 4], что такая инициализация РМНК может приводить к сильно осциллирующим во времени оценкам параметров моделей авторегрессии и скользящего среднего.

В настоящей работе исследованы осцилляции оценок РМНК при диффузной инициализации – $\mu \to \infty$. В качестве характеристик осцилляций используются вектор смещения и матрица вторых моментов ошибки оценивания, для которых получены асимптотические представления по обратным степеням μ. Приведен численный пример, иллюстрирующий полученные теоретические результаты.

1. Асимптотика характеристик РМНК при диффузной инициализации. Предполагается, что уравнение регрессии имеет вид

$$y_t = C_t\alpha + \xi_t, \quad t = 1,2,...,N \ , \tag{1}$$

где $y_t \in R^1$, $t = 1,2,...,N$ – измерения, $\alpha \in R^r$ – вектор неизвестных параметров, подлежащий оцениванию по наблюдениям, $C_t^T \in R^r$ – вектор регрессоров, ξ_t – последовательность некоррелированных случайных величин, $E(\xi_t) = 0, \quad \mathrm{var}(\xi_t) = R_t > 0,$. Здесь, R^n – пространство векторов размерности n, $E(.), \mathrm{var}(.)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины, соответственно, T – операция транспонирования, N – размер выборки.

В рамках диффузной постановки задачи предполагаются выполненными следующие условия.

А1: Относительно α известно только то, что это случайный вектор некоррелированный с ξ_t, $t = 1,...,N$.

А2: Компоненты α интерпретируются, как диффузные – случайные величины, имеющие произвольные конечные математические ожидания и матрицу ковариации пропорциональную большому параметру $\mu > 0$, т.е.

$$E[\alpha] = \overline{\alpha}, \quad E[(\alpha - \overline{\alpha})(\alpha - \overline{\alpha})^T] = \mu\overline{P} \ ,$$

где $\overline{P} > 0$ – произвольная, положительно определенная $r \times r$ матрица, не зависящая от μ.

Известно [2], что при сделанных предположениях, оценка МНК, определяемая из условия минимума квадратического критерия качества

$$J_t(\alpha) = \sum\nolimits_{k=1}^{t}(y_k - C_k\alpha)^T R_k^{-1}(y_k - C_k\alpha) + (\alpha - \overline{\alpha})^T \overline{P}^{-1}(\alpha - \overline{\alpha})/\mu \ , \ t = 1,...,N \ ,$$

удовлетворяет системе нормальных уравнений

$$M_t \alpha_t = q_t,\ t = 1,\dots,N, \qquad (2)$$

где

$$M_t = \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} C_k + \bar{P}^{-1}/\mu,\ \ q_t = \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} y_k + \bar{P}^{-1}\bar{\alpha}/\mu.$$

Решение этой системы уравнений может быть получено рекуррентно, используя соотношения

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + K_t (y_t - C_t \alpha_{t-1}),\ t = 1,\dots,N \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$\alpha_0 = \bar{\alpha}, P_0 = M_0^{-1} = \bar{P}\mu, \qquad (4)$$

где

$$K_t = M_t^{-1} C_t^T R_t^{-1} = P_t C_t^T R_t^{-1}, \qquad (5)$$

$$P_t = P_{t-1} - P_{t-1} C_t^T (R_t + C_t P_{t-1} C_t^T)^{-1} C_t P_{t-1}. \qquad (6)$$

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 1 [5]**.** При ограниченном N справедливы равномерные по t асимптотические представления

$$P_t = M_t^{-1} = \bar{P}(I_r - W_t W_t^{+})\mu + W_t^{+} + O(\mu^{-1}), \qquad (7)$$

$$K_t = \begin{cases} K_t^{diff} + O(1/\mu), C_t \neq 0 \\ 0, C_t = 0 \end{cases},\ t = 1,\dots,N \qquad (8)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\| \alpha_t - \alpha_t^{diff} \| \geq \varepsilon) = O(\mu^{-1}),\quad \mu \to \infty,\ t = 1,\dots,N, \qquad (9)$$

где

$$W_t = \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} C_k, \qquad (10)$$

$$K_t^{diff} = W_t^{+} C_t^T R_t^{-1}, \qquad (11)$$

$$\alpha_t^{diff} = \alpha_{t-1}^{diff} + K_t^{diff} (y_t - C_t \alpha_{t-1}^{diff}),\ \alpha_0^{diff} = \bar{\alpha}\ \ t = 1,\dots,N. \qquad (12)$$

Соотношения (10) – (12) будем называть диффузным алгоритмом оценивания.

В следующем разделе рассматривается поведение оценок МНК как функций времени при $t < t_{tr} = \min_t\{t : W_t > 0, t = 1,\dots,N\}$ и $\mu \to \infty$.

2. Смещение и флуктуация оценок РМНК. Полагая, что в (1) компоненты вектора α неизвестные постоянные, для описания осцилляций будем использовать векторы ошибки оценивания и смещения

$$e_t = \alpha_t - \alpha,\ b_t = E[\alpha_t] - \alpha = E[e_t], \qquad (13)$$

матрицу вторых моментов ошибки оценивания и средний квадрат ошибки

$$\Psi_t = E[e_t e_t^T],\ \ MSE(\alpha) = E[e_t^T e_t]. \qquad (14)$$

Теорема 2. Пусть $\bar{\alpha} = 0$ и $\bar{P} = I_r$. Тогда при ограниченном N справедливы равномерные по t асимптотические представления

$$b_t = E[e_t] = -(I_r - W_t W_t^{+})\alpha + O(\mu^{-1}), \qquad (15)$$

$$\| b_t \| \leq \| \alpha \| + O(\mu^{-1}), \qquad (16)$$

$$\Psi_t = E[e_t e_t^T] = W_t^{+} + (I_r - W_t W_t^{+})\alpha\alpha^T (I_r - W_t W_t^{+}) + O(\mu^{-1}), \qquad (17)$$

$$MSE(\alpha) = tr(\Psi_t) \leq tr(W_t^{+}) + \| \alpha \|^2 + O(\mu^{-1}),\ \mu \to \infty. \qquad (18)$$

Доказательство. Подставляя (1) и (13) в (2), получаем

$$M_t (e_t + \alpha) = \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} (C_k \alpha + \xi_k).$$

Так как при $\mu > 0$

$$M_t = \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} C_k + I_r / \mu > 0 \ ,$$

то ошибка оценивания определяется выражением

$$e_t = M_t^{-1}(\sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} \xi_k - \alpha / \mu) .$$

Откуда следует, что

$$E[e_t] = -M_t^{-1} \alpha / \mu \ ,$$

$$\Psi_t = E[e_t e_t^T] = M_t^{-1}(\sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} C_k + \alpha\alpha^T / \mu^2) M_t^{-1} = M_t^{-1}(W_t + \alpha\alpha^T / \mu^2) M_t^{-1} . \quad (19)$$

Подставляя (7) в первое из этих выражений, получаем (15). Так как матрица $I_r - W_t W_t^+$ идемпотентна, то из (15) следует оценка (16). Подстановка (7) во второе выражение дает

$$\Psi_t = (\Xi_t \mu + W_t^+ + O(\mu^{-1}))(W_t + \alpha\alpha^T / \mu^2)(\Xi_t \mu + W_t^+ + O(\mu^{-1})) = A_{2t}\mu^2 + A_{1t}\mu + A_{0t} + O(\mu^{-1}) , \quad (20)$$

где

$$\Xi_t = (I_r - W_t W_t^+) , \ \ A_{2t} = \Xi_t W_t \Xi_t \ , \ A_{1t} = \Xi_t W_t W_t^+ + W_t^+ W_t \Xi_t \ , \ A_{0t} = W_t^+ W_t W_t^+ + \Xi_t \alpha\alpha^T \Xi_t \ .$$

Используя тождества [6]

$$BB^+B = B \ , \quad B^+BB^+ = B^+ \ ,$$

устанавливаем, что

$$A_{2t} = 0 \ , \ \ A_{1t} = 0 \ , \ \ A_{0t} = W_t^+ + \Xi_t \alpha\alpha^T \Xi_t \ .$$

Подстановка этих выражений в (20) дает (17).

Так как для любых матриц A и B

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \ ,$$

то из (17) находим

$$tr(\Psi_t) = tr(W_t^+) + tr(\Xi_t \alpha\alpha^T \Xi_t) + O(\mu^{-1}) = tr(W_t^+) + \alpha^T \Xi_t^2 \alpha + O(\mu^{-1}) . \quad (21)$$

Матрица Ξ_t идемпотентна, поэтому

$$\Xi_t^2 = \Xi_t \ , \quad \alpha^T \Xi_t^2 \alpha \le \| \alpha \|^2 .$$

С учетом этих выражений из (21) следует (18).

Замечание. Так как $e_0 = -\alpha$ и $tr(\Psi_0) = \| \alpha \|^2$, то первое слагаемое в (18) $tr(W_t^+)$ дает оценку сверху для флуктуаций РМНК относительно неизвестного значения, оцениваемого параметра α при $t < t_{tr}$ и $\mu \to \infty$, а для оценки флуктуации может быть использовано неравенство

$$MSE(\alpha) / \| \alpha \|^2 \le \beta_t^2 + O(\mu^{-1}) \ , \quad \mu \to \infty \ ,$$

вытекающее из (18), где $\beta_t = (1 + tr(W_t^+) / \| \alpha \|^2)^{1/2}$.

Отметим, также что $tr(W_t^+)$ представляет собой главный член в асимптотическом представлении суммы диагональных элементов матрицы ковариации оценки α_t. Действительно, так как

$$\alpha_t - E[\alpha_t] = M_t^{-1} \sum_{k=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} \xi_k \ ,$$

то матрица ковариации оценки α_t определяется выражением

$$\mathrm{cov}(\alpha_t) = E\{(\alpha_t - E[\alpha_t])(\alpha_t - E[\alpha_t])^T\}^2 =$$

$$= M_t^{-1} \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} C_k^T R_k^{-1} E[\xi_k \xi_j^T] R_j^{-1} C_j M_t^{-1} = M_t^{-1} W_t M_t^{-1} .$$

Отсюда, используя (7), получаем $tr(\mathrm{cov}(\alpha_t)) = tr(M_t^{-1} W_t M_t^{-1}) = tr(W_t^+) + O(\mu^{-1})$.

Следствие 1. Смещение и флуктуации оценки РМНК ограничены по норме при $t < t_{tr}$ и $\mu \to \infty$.

Следствие 2. Пусть $R_t = R = const$ и C_t не является линейной комбинацией $C_1,...,C_{t-1}$. Покажем, что в этом случае $tr(W_t^+)$ монотонно возрастающая функция t при $t < t_{tr}$ и $\mu \to \infty$. Воспользуемся рекуррентной схемой определения W_t^+ [6]

$$W_t^+ = W_{t-1}^+ + \frac{1+\tilde{C}_t W_{t-1}^+ \tilde{C}_t^T}{(\tilde{C}_t \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T)^2} (\Xi_{t-1}\tilde{C}_t^T)(\Xi_{t-1}\tilde{C}_t^T)^T - \frac{W_{t-1}^+ \tilde{C}_t^T (\Xi_{t-1}\tilde{C}_t^T)^T + (\Xi_{t-1}\tilde{C}_t^T)(W_{t-1}^+ \tilde{C}_t^T)^T}{\tilde{C}_t \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T}, \ t < t_{tr} \quad (22)$$

с начальным условием

$$W_1^+ = R(C_1^T C_1)^+ = RC_1^+ (C_1^T)^+ = RC_1^T C_1 / \| C_1 \|^4 ,$$

где $\tilde{C}_t = C_t / R^{1/2}$.

Так как $W_{t-1}^+ \Xi_{t-1} = 0$, то из (22) находим

$$tr(W_t^+) = tr(W_{t-1}^+) + \frac{1+\tilde{C}_t W_{t-1}^+ \tilde{C}_t^T}{\tilde{C}_t \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T} - \frac{2\tilde{C}_t W_{t-1}^+ \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T}{\tilde{C}_t \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T} = tr(W_{t-1}^+) + \frac{1+\tilde{C}_t W_{t-1}^+ \tilde{C}_t^T}{\tilde{C}_t \Xi_{t-1} \tilde{C}_t^T}, \quad t < t_{tr} . \quad (23)$$

Сделанное утверждение вытекает из (23) и неравенства $W_1^+ \geq 0$.

Следствие 3. Покажем, что в предположениях следствия 2 справедлива оценка снизу на величину флуктуаций оценки РМНК при больших μ

$$tr(W_t^+) \geq R \sum_{i=1}^t 1 / \| C_i \|^2 . \quad (24)$$

Из (23) находим рекуррентное неравенство

$$tr(W_t^+) \geq tr(W_{t-1}^+) + \frac{1}{\tilde{C}_t \tilde{C}_t^T}, \ t < t_{tr} ,$$

итерируя которое, с начальным условием

$$tr(W_1^+) = R / \| C_1 \|^2 > 0 ,$$

получим (24).

Из (24) следует, что увеличение интенсивности шума наблюдений приводит к увеличению флуктуаций оценки.

Пусть $\nu_t = b_t^T b_t$ – квадрат нормы смещения оценки, а λ_{it}, $i = 1,...,r$, $t = 1,...,t_{tr-1}$ – собственные числа матрицы W_t. Будем полагать, что $\lambda_{it} = 0$ при $i = 1,...,k(t)$ и $\lambda_{it} > 0$, $i = k(t)+1,...,r$. Так как $I_r - W_t W_t^+$ идемпотентная матрица, то использование (15) дает

$$\nu_t = \alpha^T (I_r - W_t W_t^+) \alpha + O(\mu^{-1}) . \quad (25)$$

Имеем

$$W_t = \sum_{i=1}^r \lambda_{it} q_{it} q_{it}^T , \quad W_t^+ = \sum_{i=1}^r \lambda_{it}^+ q_{it} q_{it}^T ,$$

где q_{it}, $i = 1,...,r$ – ортонормальные векторы. Так как

$$W_t W_t^+ = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_{it} \lambda_{jt}^+ q_{it} q_{jt}^T = \sum_{i=1}^r \lambda_{it} \lambda_{it}^+ q_{it} q_{it}^T = \sum_{i=k(t)+1}^r q_{it} q_{it}^T ,$$

$$\sum_{i=1}^r q_{it} q_{it}^T = I_r ,$$

то

$$I_r - W_t W_t^+ = \sum_{i=1}^{k(t)} q_{it} q_{it}^T .$$

Откуда следует, что

$$\nu_t = \sum_{i=1}^{k(t)} (\alpha^T q_{it})^2 + O(\mu^{-1}) .$$

Таким образом, если $k(t)$ монотонно возрастающая функция, то главный член в асимптотическом разложении квадрата смещения ν_t монотонно убывает, т.е., если по мере поступления наблюдений ранг матрицы W_t возрастает, то смещение оценки уменьшается.

Пример. Рассмотрим задачу идентификации нелинейной динамической системы, описываемой нелинейным разностным уравнением [7]

$$y_t = y_{t-1}y_{t-2}(y_{t-1}+2{,}5)/(1+y_{t-1}^2+y_{t-2}^2)+u_{t-1}.$$

Значения обучающей выборки входа u_t равномерно распределены на интервале $[-2;2]$, а тестирующей определяются выражением $u_t=\sin(2\pi t/250)$. К значениям обучающей выборки выхода добавляется равномерно распределенный на интервале $[-0{,}2;0{,}2]$ шум. Модель системы ищется в форме нелинейной модели авторегрессии и скользящего среднего вида $y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, u_{t-1})$, где $f(.)$ – нейронная сеть (персептрон с сигмоидной функцией активации в скрытом слое и линейной в выходном). Оцениваются только веса выходного слоя. Веса скрытого слоя и смещений выбираются из равномерных распределений на интервалах $[-1{,}1]$ и $[0{,}1]$, соответственно. Размер обучающей выборки $N = 2000$, тестирующей – $M = 500$, количество нейронов скрытого слоя – 20. На рисунке 1 приведены графики зависимости переменной β_t, характеризующей флуктуацию оценок, от номеров отсчета для трех реализаций. Видно, что при $t < t_{tr} = 20$ это возрастающие функции. На рисунке 2 показаны прогнозы выходов системы и модели (кривые с номерами 1 и 2, соответственно) на один такт на тестирующем множестве для одной из реализаций, которые визуально практически неразличимы.

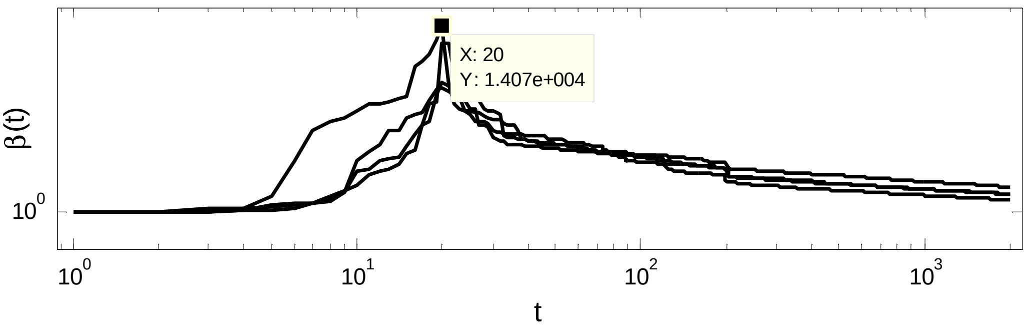

Рисунок 1 – Флуктуации оценок

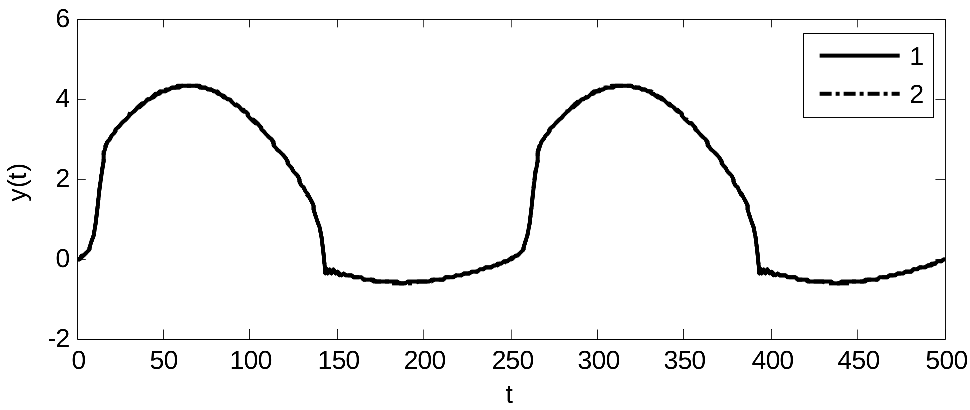

Рисунок 2 – Прогнозы выходов системы и модели

Заключение. В контексте исследования характеристик РМНК с диффузной инициализацией решены следующие задачи. Построена асимптотика для вектора смещения и матрицы вторых моментов ошибки оценивания при $t < t_{tr}$ и $\mu \to \infty$, из которой следует их ограниченность по норме. Получены условия, при выполнении которых средний квадрат ошибки оценивания монотонно возрастающая функция времени, а норма вектора смещения оценки монотонно убывающая функция при $t < t_{tr}$ и $\mu \to \infty$. Полученные теоретические результаты иллюстрируются на численном примере задачи идентификации динамической системы с помощью нейронной сети. В дальнейшем предполагается провести аналогичные исследования для диффузного алгоритма оценивания.

Библиографический список использованной литературы

1. Haykin S. Adaptive Filter Theory / S. Haykin. — 3rd ed. —NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996.
2. Ljung L. Theory and Practice of Recursive Identification / L. Ljung, T. Soderstrom. — MIT Press, Cambridge, MA, 1983.
3. Hubing N. Statistical analysis of initialization methods for RLS adaptive filters / N. Hubing, S. Alexander // IEEE transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. — 1991. — № 39. — P. 1793–1804.
4. Eom K. Analysis of overshoot phenomena in initialization stage of RLS algorithm / K. Eom, D. Park // Signal Process. — 1995. — № 44. — P. 329–339.
5. Скороход Б.А. Асимптотика линейной рекуррентной регрессии при диффузной инициализации / Б.А. Скороход // Пробл. упр. и информатики: международный научно-технический журнал. — 2009. — № 3. — С. 98–107.
6. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт. — М: Наука, 1977.
7. Narendra K. Identification and control of dynamical systems using neural networks /K. Narendra, K. Parthasarathy // IEEE Trans. Neural Netw. — Mar. 1990. — Vol. 1. — №. 1. — P. 4–27.

Поступила в редакцию 13.01.2014 г.

Скороход Б.А. Осциляції оцінок рекурентного метода найменших квадратів при дифузної ініціалізації

Досліджено асимптотичну поведінку зміщення і матриці других моментів помилки оцінювання рекурентного метода найменших квадратів при дифузній ініціалізації. Отримані теоретичні результати ілюструються на чисельному прикладі задачі ідентифікації динамічної системи за допомогою нейронної мережі.

Ключові слова: рекурентний метод найменших квадратів, дифузна ініціалізація, асимптотична поведінка оцінок.

Skorohod B.F. Oscillation of assessments for the least squares recursive method with diffuse initialization

The asymptotic behavior of the bias and the second moments matrix of the recursive least squares error with diffuse initialization is investigated. The theoretical results are illustrated by a numerical example of identification of a dynamic system using neural network.

Keywords: recursive least squares method, diffuse initialization, the asymptotic behavior of the estimates.