УДК 621.9.048.6

А.В. Мицык, доцент, канд. техн. наук,
В.А. Федорович, профессор, д-р техн. наук
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
an_mitsyk@mail.ru

РАЗВИТИЕ ВОПРОСОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОТДЕЛОЧНО-ЗАЧИСТНОЙ ОБРАБОТКИ В КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ РЕЗЕРВУАРЕ

Выявлено, что в процессе виброобработки единичная гранула рабочей среды, взаимодействует с колеблющимся резервуаром, обрабатываемыми деталями и другими гранулами. Отмечено, что при математическом моделировании необходимо определить закономерности всех взаимодействий между участниками процесса виброобработки. Получено выражение, характеризующее механизм распространения силового импульса и диссипации энергии гранул среды.

Ключевые слова: *виброобработка, единичная гранула, резервуар, деталь, математическое моделирование, силовой импульс, диссипация энергии.*

Процесс отделочно-зачистной обработки в колеблющемся резервуаре вибростанка, определяемый взаимным давлением и относительным перемещением гранул рабочей среды и обрабатываемых деталей, происходит при постоянном, многократно повторяющемся в течение технологического времени обработки, взаимодействии. Вместе с тем, единичная гранула, являясь активным участником процесса виброобработки, взаимодействует с поверхностями обрабатываемых деталей, другими гранулами, а также с рабочими поверхностями колеблющегося резервуара [1].

В процессе осуществляемых единичной гранулой всех взаимодействий, которые можно представить взаимными соударениями, происходит перераспределение кинетической энергии. Каждая из гранул рабочей среды при соударении с колеблющимися рабочими поверхностями резервуара приобретает кинетическую энергию, которой гранулы обмениваются при столкновении друг с другом в своем циркуляционном движении, пытаясь распространить ее по всему объему рабочей среды, помещенной в резервуар. При этом часть полученной энергии расходуется гранулами на трение, возникающее при послойном циркуляционном и осциллирующем движении среды. Оставшаяся часть кинетической энергии гранул, контактирующих с поверхностями обрабатываемых деталей, затрачивается на удаление дефектного слоя и достижение требуемого технологического результата. Таким образом, при построении математической модели необходимо определить количественные закономерности всех выявленных взаимодействий между участниками процесса виброобработки.

Плотность используемых при виброобработке рабочих сред в 1,4…1,9 раза меньше плотности материала обрабатываемых деталей. В процессе установившегося колебательного движения резервуара загруженная в него среда приобретает состояние разрыхленности, при котором ее плотность, зависящая в частности от амплитуды и частоты колебаний резервуара, уменьшается, оставаясь близкой к плотности твердого тела.

Скорость движения гранул в колеблющемся резервуаре не превышает 1 м/с. При таких скоростях движения взаимодействия гранул друг с другом, с поверхностями обрабатываемых деталей, с рабочими поверхностями резервуара не приводит к заметным деформациям гранул среды.

Взаимодействия гранул друг с другом и с рабочими поверхностями резервуара принимаются абсолютно упругими, а взаимодействие гранул с поверхностями обрабатываемых деталей, обеспечивающее процесс виброобработки, рассматривается на основании законов кинетической теории [2] с учетом влияния силы трения, возникающей при соударении гранул. В промежутках времени между соударениями каждая из гранул рабочей среды находится в относительно независимом движении от окружающих ее гранул.

Объем, занимаемый рабочей средой в колеблющемся резервуаре несколько превышает статический суммарный объем гранул среды. Следовательно, в расчетах коллективного движения гранул необходимо учитывать объем, занимаемый каждой единичной гранулой, что приводит к использованию модели соударения упругих шаров.

В основу физической сущности процесса виброобработки и его разновидностей положено, что загруженная в колеблющийся резервуар рабочая среда в виде гранул абразивного или другого наполнителя совместно с обрабатываемыми деталями, помещенными в эту среду, как «в навал», так и с «закреплением», воздействует на поверхности деталей в результате колебательного движения резервуара, вызванного вынуждающей силой инерционного вибровозбудителя [3].

Таким образом, для проведения теоретического описания воздействия гранул среды на обрабатываемую поверхность детали необходимо оценить диссипацию энергии, возникающую при передаче от рабочих поверхностей резервуара, представленных его стенками и днищем. Вполне понятно, что такая оценка позволит определить зависимость съема металла от основных технологических параметров процесса, таких как амплитуда и частота колебаний резервуара.

Необходимо уточнить, что рассматриваемые колебательные процессы, протекающие при обработке деталей, описываются с учетом сил трения, возникающих при соударении гранул рабочей среды в процессе их циркуляционного и осциллирующего движения, а также с учетом действия неупругих сил, приводящих к деформации или износу гранул среды. Наряду с действием диссипативных сил принимается во внимание действие силы тяжести, которая оказывает существенное влияние на механизм передачи энергии от рабочей поверхности резервуара к обрабатываемой детали.

Таким образом, учитывая дополнительное влияние вышеперечисленных сил, колебательные процессы в резервуаре, по аналогии с уравнением Ван-дер-Ваальса, можно представить уравнением:

$$\left(\overline{P}-\overline{F}(g)\right)(\upsilon-b)=CT^{*}, \tag{1}$$

где $\overline{P}$ – аналог давления; $\overline{F}(g)$ – некоторая функция, учитывающая силу земного тяготения; υ – объем гранул; b – поправка на собственный объем гранул; C – некоторая константа; T^{*} – аналог температуры, связанный с кинетической энергией гранул рабочей среды.

Из уравнения (1) следует, что $\overline{P}$ величина векторная, это связано с направленностью силы земного тяготения.

Рассмотрим механизм потери энергии гранул рабочей среды за счет действия сил трения. Предположим, что коэффициент трения не зависит от скорости проскальзывания гранул при их циркуляционном и осциллирующем движении. В этом случае сила трения между гранулами определяется характером, представленным графиком (рисунок 1), на котором $F_{\text{сдв}}$ – сила, сдвигающая гранулы друг относительно друга; N – сила взаимодействия гранул, перпендикулярная плоскости их соударения; k – коэффициент трения.

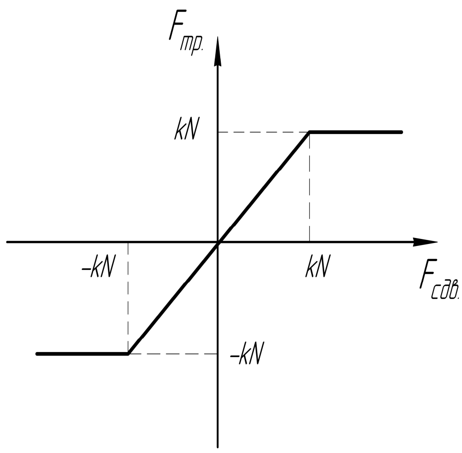

Рисунок 1 – Характер изменения силы трения при соударении гранул рабочей среды

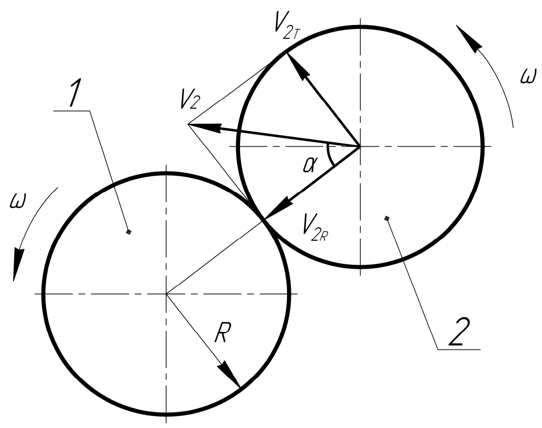

Рисунок 2 – Схема взаимодействия гранул рабочей среды в момент их соударения

Допустим, что гранулы 1 и 2, имеющие одинаковые форму, размер и массу взаимодействуют друг с другом в момент соударения (рисунок 2), где R – радиус гранулы 1; V_2 – скорость движения гранулы 2 до соударения; V_{2_R} – нормальная составляющая скорости V_2, направленная вдоль отрезка прямой, соединяющего центры масс гранул 1 и 2; V_{2_T} – тангенциальная составляющая скорости V_2, перпендикулярная скорости V_{2_R}; α – угол между вектором скорости V_2 и отрезком прямой, соединяющим центры масс гранул 1 и 2.

Без потери общности считаем, что гранула 1 до соударения находилась в состоянии покоя и гранулы 1, 2 до соударения не вращались.

Примем допущение, что соударение гранул вдоль вектора нормальной составляющей V_{2_R} скорости V_2 движения гранулы 2 является абсолютно упругим, что основано на результатах измерений скоростей движения гранул рабочей среды в колеблющемся резервуаре. Тогда процесс соударения гранул, можно представить в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_{2_R}}{dt} = N(t) \\ m\dfrac{dV_{2_T}}{dt} = kN(t), \\ I_m \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{kN(t)}{R} \end{cases} \tag{2}$$

где m – масса гранулы; I_m – момент инерции гранулы; t – время соударения гранул; ω – угловая скорость вращения гранулы.

Решение системы уравнений (2) затруднено ввиду неизвестности функции $N(t)$. Однако, конечные выражения для V_{2_R}, V_{2_T} можно получить, используя закон сохранения импульса. Так как в нашем случае гранулы одинаковы и их соударение вдоль вектора скорости V_{2_R} является абсолютно упругим, то в результате соударения между гранулами произойдет обмен скоростями, то есть гранула 2 в своем движении со скоростью V_{2_R} налетит на покоящуюся гранулу 1 и прекратит движение. Таким образом, для движения гранул 1 и 2 принимается соотношение:

$$\int_0^t \left|\frac{dV_{2_R}}{dt}\right| dt = \int_0^t \frac{|N(t)|}{m} dt = V_{2_R} = \Delta V_{2_R} . \tag{3}$$

Для второго и третьего уравнений в системе (2) справедливо следующее:

$$\int_0^t \left|\frac{dV_{2_T}}{dt}\right| dt = k\int_0^t \frac{|N(t)|}{m} dt = kV_{2_R} = \Delta V_{2_T} ; \tag{4}$$

$$\int_0^t \left|\frac{d\omega}{dt}\right| dt = \frac{kR}{I_m}\int_0^t |N(t)| dt = \frac{kRm}{I_m} V_{2_R} = \Delta\omega = \frac{kRmV_{2_R}}{I_m} . \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) справедливы лишь в том случае, если в течение всего времени соударения гранул выполняется условие $F_{\text{сдв}} \ge kN$ (см. рисунок 1). На языке изменения скоростей гранул это означает, что соотношения (4) и (5) справедливы при $V_{2_T} \ge 2\Delta V_{2_T}$. В случае когда $V_{2_T} < 2\Delta V_{2_T}$, то для вычисления ΔV_{2_T} можно воспользоваться моделью абсолютно неупругого соударения гранул, из которой следует, что $mV_{2_T} = 2m\left(V_{2_T} - \Delta V_{2_T}\right) \to \Delta V_{2_T} = \dfrac{V_{2_T}}{2}$. Таким образом, если $V_2 \sin\alpha < 2kV_2 \cos\alpha$, то $\Delta V_{2_T} = \dfrac{V_2 \sin\alpha}{2}$.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно использовать и для $\Delta\omega$. Разница в начальной кинетической энергии гранул, вычисленной из выражений (3), (4) (5) с учетом принятых поправок, дает величину потери энергии за счет действия силы трения при ударном взаимодействии гранул среды:

$$\Delta E = \frac{mV_2^2}{2} - \left(\frac{m\sqrt{R^2}}{2} + \frac{m\left(V_{2_R} - \Delta V_{2_R}\right)^2}{2} + \frac{m\Delta V_{2_R}^2}{2} + I_m \Delta\omega^2 \right). \tag{6}$$

Потеря энергии при одном ударе гранул позволяет определить количество их соударений, необходимых для полной (90 %) или частичной (50 %) потери энергии, полученной от рабочих поверхностей резервуара.

Если предположить, что при виброобработке распределение по скоростям движения гранул среды аналогично распределению Максвелла, то можно для движения гранул ввести величину l длины свободного пробега гранул среды, которая будет равна:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}nS}, \tag{7}$$

где n – концентрация гранул; S – площадь поверхности гранулы, $S = 4\pi R^2$.

Таким образом, кинетическая энергия E гранулы уменьшается по мере удаления от рабочей поверхности резервуара в глубь среды. Это значит, что давление гранул среды на обрабатываемую поверхность изделия также уменьшается, вследствие того, что $E \sim T$ (7). Образующийся градиент давления вовлекает обрабатываемые детали в движение, направленное от рабочей поверхности резервуара в глубь слоев среды, где наблюдаются низкие давления воздействия и малые скорости движения гранул.

Определим условия, при которых выполняется неравенство $F_{\text{сдв}} \geq kN$. Очевидно (см. рисунок 2), что в точке соударения гранул 1 и 2 скорость движения налетающей гранулы 2 относительно направления, перпендикулярного радиусу гранулы, будет равна:

$$V_2 = V_{2_T} - \omega R - \Delta V_{2_T} . \tag{8}$$

Скорость первоначально покоящейся гранулы 1 определяется, как:

$$V_1 = \Delta V_{2_T} + \omega R . \tag{9}$$

Передача энергии от налетающей гранулы 2 к покоящейся грануле 1 будет происходить при условии:

$$V_{2_T} - \Delta V_{2_T} - \omega R \geq \Delta V_{2_T} + \omega R . \tag{10}$$

В случае строгого неравенства выражение (10) рассматривается вариант соударения гранул с их проскальзыванием, в случае равенства – вариант соударения с качением без скольжения. Такие варианты соударения гранул, а так же гранул и деталей, обуславливают процессы микрорезания и упругопластического деформирования, присущие различным операциям виброобработки.

Максимально возможная величина $\omega_{\max} = \Delta\omega$, определяемая соотношением (5), будет равна:

$$\omega_{\max} = \Delta\omega = \frac{RkV_{2_R} m}{I_m} = \frac{5}{2}\frac{kV_{2_R} mR}{mR^2} = \frac{5}{2}\frac{kV_{2_R}}{R} . \tag{11}$$

Величина $\Delta V_{2_T \max}$, определяемая соотношением (4), будет равна:

$$\Delta V_{2_T \max} = kV_{2_R} . \tag{12}$$

Неравенство (10) с учетом выражений (11) и (12) примет вид:

$$V_{2_T} - kV_{2_R} - \frac{5}{2}kV_{2_R} \geq kV_{2_R} + \frac{5}{2}kV_{2_R} \text{ или } V_{2_T} \geq 12kV_{2_R} ;\ \operatorname{tg}\alpha \geq 12k . \tag{13}$$

Если угол α при соударении гранул 1 и 2 принимает значения меньшие 90°, то передача энергии гранулы 2 для организации ее собственного вращения, а также для вращения и разгона первоначально покоящейся гранулы 1, будет происходить за время Δt меньшее, чем время t $(\Delta t < t)$, соответствующее упругому взаимодействию гранул 1 и 2 вдоль отрезка прямой, соединяющей их центры масс. Это объясняется тем, что скорости движения гранул в точке их соударения через время Δt станут равными и передача импульса прекратится. В данном случае можно записать следующее выражение:

$$V_{2_T} = 2\Delta V_{2_T} + 2\omega R = 2\frac{F_{\text{сдв}}\Delta t}{m} + \frac{2F_{\text{сдв}}\Delta t R^2}{I_m} . \tag{14}$$

Из выражения (14) следует:

$$F_{\text{сдв}}\Delta t = \frac{V_2}{2\left(\frac{1}{m} + \frac{R}{I}\right)} = \frac{mV_2}{7} . \tag{15}$$

Подставив выражения (14) и (15) в соотношения (5) и (6), где необходимо заменить $k\int_0^t |N(t)dt|$ на $F_{\text{сдв}}\,\Delta t$ получим:

$$\Delta V_{2_T} = \frac{V_{2_T}}{7} ;\ \ \Delta\omega = \frac{5}{14}\frac{V_{2_T}}{R} . \tag{16}$$

В соотношениях (16) отсутствует коэффициент трения, так как взаимодействие гранул происходит без учета их проскальзывания.

Таким образом, решение задачи соударения двух гранул рабочей среды возможно при следующих условиях:

– если угол соударения гранул $\alpha \geq \mathrm{arctg}7k$, то для определения изменения скорости V_{2_T} движения налетающей гранулы 2 используются соотношения (4) и (5), соответственно, $\Delta V_{2_T} = kV_{2_R}$; $\Delta\omega = \frac{5}{2}\frac{kV_{2_R}}{R}$.

– если угол соударения гранул $\alpha < \mathrm{arctg}7k$, то для определения изменения скорости V_{2_T} налетающей гранулы 2 используются соотношения (16).

Получив соотношения (16), отражающие изменения тангенциальной V_{2_T} и угловой ω скоростей гранулы 2, полученные в результате соударения с гранулой 1, перейдем к установлению изменения кинетической и вращательной энергии соударяющихся гранул.

Рассмотрим первое условие, когда $\alpha \geq \mathrm{arctg}7k$. При этом вдоль отрезка прямой, соединяющей центры масс гранул 1 и 2 происходит обмен импульсами, что соответствует условию протекания абсолютно упругого удара гранул. Покоящаяся гранула 1 приобретает скорость движения, равную $V_2\cos\alpha$, а налетающая гранула 2 теряет скорость V_{2_R}, направленную вдоль отрезка прямой, соединяющей центры масс гранул, а также скорость V_{2_T}, направленная тангенциально, уменьшается на величину $\Delta V_{2_T} = kV_{2_R} = kV_2\cos\alpha$. Одновременно с этим, налетающая гранула 2 приобретает угловую скорость вращения, равную $\Delta\omega = \frac{5}{2}k\frac{\omega\cos\alpha}{R}$, а покоящаяся гранула 1 после соударения получает направленную тангенциально скорость ΔV_{T_2}, которая согласно второму и третьему законам Ньютона будет равна $\Delta V_{T_2} = kV\cos\alpha$. Скорость вращения изначально покоящейся гранулы 1 после соударения будет равна скорости вращения налетающей гранулы 2 и составит $\Delta\omega = \frac{5}{2}k\frac{V_2\cos\alpha}{R}$.

Суммарная кинетическая энергия гранул, взаимодействующих друг с другом, будет равна:

$$E_\Sigma = E_R + 2E_{\text{вр}} + E_2 + E_1, \tag{17}$$

где E_R, $E_{\text{вр}}$ – кинетическая энергия соударения и вращения гранул, $E_R = \frac{mV_2^2\cos^2\alpha}{2}$; $E_{\text{вр}} = \frac{I_m\Delta\omega^2}{2} = \frac{2}{5}\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{25}{4}\frac{k^2V_2^2\cos^2\alpha}{R^2} = \frac{5}{4}mk^2V_2^2\cos^2\alpha$; E_1 – кинетическая энергия налетающей гранулы 2 с учетом потери скорости ΔV_{2_T}, $E_2 = \frac{m}{2}(V_2\sin\alpha - kV_2\cos\alpha)^2$; E_1 – кинетическая энергия изначально покоящейся гранулы 1, приобретающей направленную тангенциально скорость ΔV_{2_T}, $E_1 = \frac{mV_2^2\cos^2\alpha}{2}$.

Подставив в выражение (17) значения всех его слагаемых, получим:

$$\begin{aligned} E_\Sigma &= \frac{mV_2^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{5}{2}mk^2V_2^2\cos^2\alpha + \frac{mV_2^2\cos^2\alpha}{2} + \frac{mV_2^2}{2}\times \\ &\times(\sin\alpha - k\cos\alpha)^2 = \frac{mV_2^2}{2} + mV_2^2k\cos\alpha\left(\frac{7}{2}k\cos\alpha - \sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{18}$$

В выражении (18) разность, заключенная в скобках, имеет отрицательное значение, исходя из условия, что $\alpha \geq \mathrm{arctg}7k$.

Далее рассмотрим второе условие, когда $\alpha < \mathrm{arctg}7k$. При этом передача импульса и энергии происходит при отсутствии проскальзывания в точке соударения гранул, таким образом:

$$V_{2_T} = 2\Delta V_{2_T} + 2\Delta\omega R = V_{2_T} = V_2\sin\alpha. \tag{19}$$

Из выражения (19), следует, что время Δt, необходимое для передачи импульса от гранулы 2 к грануле 1 в тангенциальном направлении, будет меньше времени t соударения гранул, то есть: $\Delta V_{2_T} = k\int_0^{\Delta t}\frac{N(t)dt}{m}$; $\Delta\omega = \frac{kR}{I}\int_0^{\Delta t}N(t)dt$.

Подставив в выражение (19) значения слагаемых, получим:

$$V_2 \sin\alpha = \frac{2k}{m}\int_0^{\Delta t} N(t)dt + \frac{2R^2 k}{I_m}\int_0^{\Delta t} N(t)dt\,, \tag{20}$$

Из выражения (20) следует:

$$\int_0^{\Delta t} N(t)dt = \frac{V_2 \sin\alpha}{2k\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{R^2}{I_m}\right)} = \frac{V_2 \sin\alpha}{7k}\,. \tag{21}$$

Подставив выражение (21) в приведенные выше выражения для определения ΔV_{2_T} и $\Delta\omega$ получим:

$$\Delta V_{2_T} = \frac{V_2 \sin\alpha}{7}\,; \quad \Delta\omega = \frac{5}{14}\frac{V_2 \sin\alpha}{R}\,. \tag{22}$$

В выражениях (22) отсутствует зависимость от коэффициента трения k, что является следствием передачи импульса без скольжения.

В данных условиях ($\alpha < \mathrm{arctg}7k$), как и в предыдущих ($\alpha \ge \mathrm{arctg}7k$), суммарная кинетическая энергия определяется аналогично, то есть:

$$E_\Sigma = E_R + 2E_{\text{вр}} + E_1 + E_2\,; \tag{23}$$

$$E_2 = \frac{mV_2^2}{2}\left(1 - \frac{7}{98}\sin\alpha\right). \tag{24}$$

Вследствие того, что гранула 2, налетающая на гранулу 1, имеет возможность перемещения в различных направлениях, ее кинетическая энергия, теряемая при соударении с покоящейся гранулой 1, определяется при осреднении по углу α. Без потери общности считаем любое из направлений движения гранулы 2 одинаково вероятным. Тогда в телесном угле Ω, определяемом конусом с углом раскрытия $\alpha = \mathrm{arctg}7k$ (см. рисунок 1), осреднение проведем, исходя из следующего выражения:

$$\langle E_\Sigma \rangle = -\frac{1}{\Omega}\frac{7}{98}\int_0^{\mathrm{arctg}7k} mV_2^{\,2}\sin^2\alpha \cdot 2\pi\sin\alpha d\alpha + \frac{mV_2^{\,2}}{2}\,, \tag{25}$$

Принимая $d\Omega = 2\pi\sin\alpha d\alpha$, получим:

$$\langle E_\Sigma \rangle = \frac{mV_2^{\,2}}{2} - \frac{1}{\Omega_1}\frac{7}{98}2\pi\int_0^{\mathrm{arctg}7k} mV_2^2\sin^3\alpha = \frac{14\pi}{\Omega_1}mV_2^{\,2}\left(\frac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha\right)\Bigg|_0^{\mathrm{arctg}7k} + \frac{mV_2^{\,2}}{2}.$$

То есть потеря суммарной кинетической энергии гранул, взаимодействующих друг с другом, будет равна:

$$\langle \Delta E_\Sigma \rangle = \frac{14\pi}{\Omega_1}mV_2^{\,2}\left(\frac{\cos^3\alpha}{3} - \cos\alpha\right)\Bigg|_0^{\mathrm{arctg}7k}\,, \tag{26}$$

где $\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos(\mathrm{arctg}7k))$.

В случае, когда выполняется условие $\alpha < \mathrm{arctg}7k$ согласно (18) получим выражение усредненной величины суммарной кинетической энергии соударения гранул:

$$\langle E_\Sigma \rangle = \frac{mV_2^{\,2}}{2} + \frac{mV_2^{\,2}k2\pi}{(2\pi - \Omega_1)}\int_{\mathrm{arctg}7k}^{\pi/2}\left(\frac{7}{2}k\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha\right)d\alpha\,;$$

или после преобразования:

$$\langle E_\Sigma \rangle = \frac{mV_2^{\,2}}{2} + \frac{mV_2^{\,2}k2\pi}{(2\pi - \Omega_1)}\left(\frac{7}{2}k\frac{\cos^3\alpha}{3}\Bigg|_{\pi/2}^{\mathrm{arctg}7k} - \frac{\sin^3\alpha}{3}\Bigg|_{\mathrm{arctg}7k}^{\pi/2}\right). \tag{27}$$

Потери суммарной кинетической энергии согласно (27) будут равны:

$$\langle \Delta E_\Sigma \rangle = \frac{mV_2^{\,2}k2\pi}{(2\pi - \Omega_1)}\left(\frac{7}{2}k\frac{\cos^3\alpha}{3}\Bigg|_{\pi/2}^{\mathrm{arctg}7k} - \frac{\sin^3\alpha}{3}\Bigg|_{\mathrm{arctg}7k}^{\pi/2}\right). \tag{28}$$

Общая потеря энергии соударения гранул для двух, рассмотренных выше, условий с учетом принятых значений телесных углов составит сумму потерь с весами этих телесных углов:

$$\left\langle \Delta E_{\text{общ}} \right\rangle = \left\langle \Delta E_{\Sigma} \right\rangle \frac{\Omega_1}{2\pi} + \left\langle \Delta E_{\Sigma} \right\rangle \frac{(2\pi - \Omega_1)}{2\pi}. \tag{29}$$

Величина кинетической энергии, теряемой при одном соударении гранул, составит $\varepsilon = 2\frac{\left\langle \Delta E_{\text{общ}} \right\rangle}{mV_2^{\,2}}$. Как видно из выражений (27) и (29) ε не зависит от скорости соударения гранул среды. Следовательно, потеря кинетической энергии при соударении гранул подчиняется следующему закону:

$$\left\langle \Delta E_n \right\rangle = \left\langle E_0 \right\rangle (1-\varepsilon)^n, \tag{30}$$

где E_n – кинетическая энергия после n-го – соударения гранул в их поступательном движении; E_0 – начальная кинетическая энергия гранул; n – количество соударений гранул.

Давление рабочей среды связано с кинетической энергией ее поступательного движения $\left\langle E_n \right\rangle$ соотношением $P = \frac{2}{3}\left\langle E_n \right\rangle \nu$, где ν – величина концентрации гранул [2]. Следуя идеологии кинетической теории, считаем, что $\left\langle \Delta E_{\text{общ}} \right\rangle$ одинаково распределена между степенями свободы поступательного и вращательного движения каждой гранулы рабочей среды. Это означает, что выражение (30) позволяет определить изменение коллективного давления гранул, передаваемого поверхностью резервуара в глубину загруженной в него среды, следующим образом $P = P_0 (1-\varepsilon)^n$, где P_0 – давление рабочей поверхности резервуара.

Как следует из выражения (28) потеря энергии при соударении гранул, а следовательно и потеря коллективного давления гранул зависит от коэффициента трения. Из литературных источников известны данные о трении скольжении для различных марок сталей и керамики. Все эти данные лежат в диапазоне $k = 0{,}14\ldots0{,}19$. Влияние коэффициента трения k на величину ε потери энергии при соударении гранул показано графиком (рисунок 3), где процентный диапазон изменения ε составляет 5,40 ... 6,35.

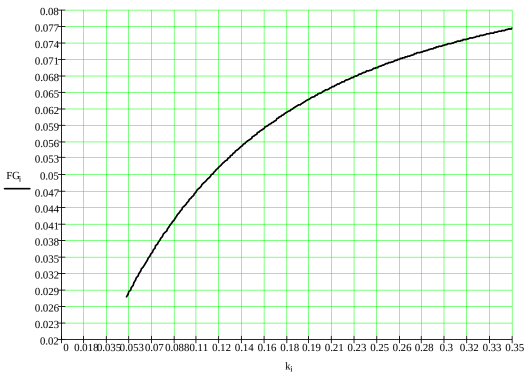

Рисунок 3 – Зависимость величины ε потери энергии от коэффициента трения k при соударении гранул

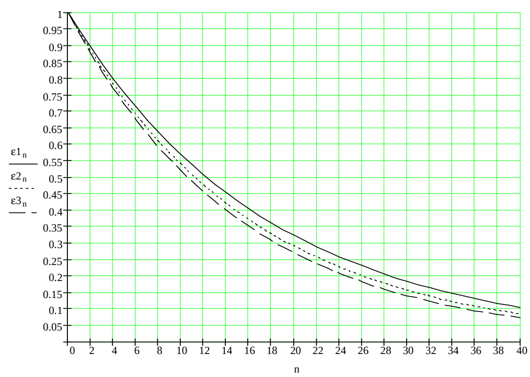

Рисунок 4 – Зависимость величины ε потери энергии от числа n соударений гранул

Из графиков кривых (рисунок 4), описываемых выражением (30), видно, что влияние коэффициента трения на функцию $\varepsilon(n)$ невелико. При этом потеря половины кинетической энергии (~30 % скорости) происходит через 10…13 соударений гранул среды, а потеря 90 % кинетической энергии (~70 % скорости) через 34…40 соударений.

Далее определим физический смысл величины n, характеризующейся количеством соударений гранул. Она представляет собой отношение длины L пути циркуляционного движения, на котором гранулы среды передают энергию (при этом часть энергии теряется), к длине l свободного пробега гранулы. При оценке коллективного давления гранул на обрабатываемую поверхность, за величину L можно принять кратчайшее расстояние от рабочей поверхности резервуара до поверхности детали. Для вычисления длины свободного пробега гранулы воспользуемся соотношением $l = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\nu R^2}$ [2].

Концентрацию гранул среды определим зависимостью $\nu = \dfrac{r}{4\pi R^3/3 + F_{\text{сдв}}E_n}$, где r – коэффициент укладки гранул, $r = 0,66$. Согласно уравнению Ван-дер-Ваальса зависимость между давлением P, объемом – υ и температурой T^* определяется выражением:

$$(P - P_0)(\upsilon - b) = N_A k_B T^*, \tag{31}$$

где P_0 – внутреннее давление; N_A – число Авогадро; k_B – постоянная Больцмана.

Для определения концентрации гранул среды необходимо установить отношение $\dfrac{N_A}{\upsilon} = \nu$. Из (31) следует, что $\upsilon = \dfrac{N_A k_B T^*}{P - P_0} + b$, а, следовательно: $\nu = \dfrac{1}{k_B T^*/(P - P_0) + b/N_A}$. Применительно к виброобработке, когда рассматривается взаимодействие твердых гранул среды, $b = \dfrac{4\pi R^3 N_A}{3r}$. Используя выражение $\langle V\rangle = \sqrt{3k_B T^*/m}$, установим соответствие: $k_B T^* = \dfrac{m\langle V\rangle^2}{3} = \dfrac{4\pi R^3 \rho \langle V\rangle^2}{9}$, где ρ – плотность материала гранулы рабочей среды. Из этого следует, что соотношение, определяющее число соударений гранул на длине L пути их движения, имеет вид:

$$\frac{L}{l} = \frac{3\sqrt{2}Lr}{R\left(1 + \dfrac{4\pi^2 A^2 \omega^2 \rho r}{3(P - P_0)}\right)}, \tag{32}$$

где $\langle V\rangle = 4\pi^2 A^2 \omega^2$. Таким образом, среднеквадратичная скорость гранулы принимается равной скорости движения рабочей поверхности резервуара.

Из выражения (32) концентрацию гранул определим соотношением:

$$\nu = \frac{3r}{4\pi R^3\left(1 + CA^2\omega^2\right)}, \tag{33}$$

где $C = \dfrac{4\pi^2 \rho r}{3(P - P_0)}$. Вычисление константы C с помощью принятой теории не дает точного значения, так как уравнение Ван-дер-Ваальса описывает состояние кинетики гранул при виброобработке только качественно. Согласно Международной системе единиц (СИ) $C \approx 100...300$. Константа C пропорциональна величине отношения плотности материала гранул к давлению, создаваемому ими при циркуляционном движении, и не зависит от плотности материала гранулы. Выражение потери кинетической энергии $\langle \Delta E_L\rangle$ гранул среды на длине L пути их циркуляционного движения можно записать в виде:

$$\langle \Delta E_L\rangle = \langle E_0\rangle(1 - \varepsilon)^{\frac{3\sqrt{2}Lr}{R\left(1 + CA^2\omega^2\right)}}. \tag{34}$$

При виброобработке величина давления, создаваемая гранулами среды в резервуаре, пропорциональна произведению концентрации гранул на их среднюю кинетическую энергию. При изучении процессов сопровождающих виброобработку рассматриваемое давление пропорционально силе взаимодействия гранул среды и изделий при их соударении.

Эта сила прямо пропорциональна изменению скорости гранул в направлении перпендикулярном плоскости обрабатываемой поверхности изделия и обратно пропорциональна времени их соударения. Время соударения является функцией физико-механических свойств материала гранулы, ее массы и не зависит от ее скорости. Таким образом, величины сил соударения а, следовательно, и давления пропорциональны скорости циркуляционного движения гранул. Тогда, исходя из (19), можно записать выражение:

$$\langle P_{imp}\rangle = \langle P_{imp_0}\rangle(1 - \varepsilon)^{\frac{3\sqrt{2}Lr}{2R\left(1 + CA^2\omega^2\right)}}, \tag{35}$$

где P_{imp} – давление гранул в любой точке объема резервуара; P_{imp_0} – давление гранул в любой точке у рабочей поверхности резервуара.

Выражения (34) и (35) показывают влияние амплитуды и частоты колебаний резервуара, размера гранулы среды, расстояния от рабочей поверхности резервуара до обрабатываемой поверхности детали на диссипацию энергии рабочей среды.

Механизм распространения импульса от рабочей поверхности резервуара вглубь среды имеет свои особенности. Гранулы среды теряют энергию при соударениях друг с другом и с обрабатываемой поверхностью детали, что объясняется наличием трения. Отличия величин импульсов, передаваемых гранулами у рабочих поверхностей резервуара и на удалении от них, восполняются эффектами переноса импульса, который пропорционален произведению концентрации гранул и средней скорости потоков среды. Исходя из этого выражение (35) можно записать в следующем виде:

$$\left\langle P_{imp} \right\rangle = \frac{C_p r A \omega}{\left(1 + CA^2 \omega^2\right)} (1 - \varepsilon)^{\frac{3\sqrt{2} Lr}{2R\left(1 + CA^2\omega^2\right)}} . \tag{36}$$

Таким образом, можно говорить о том, что полученное выражение (36) дает представление о процессе распространения импульса, передаваемого колеблющимся резервуаром в рабочую среду, и диссипации кинетической энергии гранул при их соударении, как между собой, так и с обрабатываемой деталью.

При дальнейшем развитии вопроса математического моделирования процесса отделочно-зачистной виброобработки, одним из направлений интенсификации которого является комбинирование различных схем энергетического воздействия на рабочую среду и обрабатываемые детали [4], целесообразно обратить внимание на фактор динамического давления, создаваемого гранулой рабочей среды при ее соударении с поверхностью обрабатываемой детали, что при получении математических зависимостей упростит комплексное описание коллективных процессов, сопровождающих отделочно-зачистную обработку в колеблющемся резервуаре.

Библиографический список использованной литературы

1. Обработка деталей свободными абразивами в вибрирующих резервуарах: монография / И.Н. Карташов [и др]. — К.: Вища школа, 1975. — 188 с.

2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие. В 10 т. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — 5-е изд., стер. — М.: Физматлит, 2003. — 264 с.

3. Мицык А.В. Развитие вопросов кинематики и динамики процессов отделочно-зачистной обработки в колеблющемся резервуаре / А.В. Мицык, В.А. Фадеев, В.А Федорович // Резание и инструмент в технологических системах: межд. научн.-техн. сборник НТУ «ХПИ». — Харьков, 2012. — Вып. 82. — С. 171–182.

4. Мицык А.В. Пути интенсификации вибрационной отделочно-зачистной обработки комбинированием схем энергетических воздействий на рабочую среду и детали / А.В. Мицык, В.А. Федорович // Авіаційно-космічна техніка і технологія. — 2011. — № 6 (83). — С. 26–34.

Поступила в редакцию 22.03.2013 г.

Міцик А.В., Федорович В.О. Розвиток питань математичного моделювання процесу оздоблювально-зачищувальної обробки у коливних резервуарах

Виявлено, що у процесі віброобробки одинична гранула робочого середовища, взаємодіє з коливним резервуаром, оброблюваними деталями та іншими гранулами. Відмічено, що при математичному моделюванні необхідно визначити закономірності усіх взаємодій між учасниками процесу віброобробки. Отримано вираз, що характеризує механізм розповсюдження силового імпульсу та дисипації енергії гранул середовища.

Ключові слова: віброобробка, одинична гранула, резервуар, деталь, математичне моделювання, силовий імпульс, дисипація енергії.

Mitsyk A.V., Fedorovich V.A. Development of the problems of mathematical simulation of grinding-finishing machining in vibrating reservoir

It is determinated that in vibration treatment process the unit granule of working medium interacts with vibrating reservoir, processed parts and other granules. It is noted that at mathematical simulation the determination of mechanism of the interactions between the vibration treatment process participants is necessary. The expression that characterizes the mechanism of propagation of forcing impulse and dissipation of energy of granule under co-impacting of granules with granules and processed part has been received.

Keywords: vibration treatment, unit granule, reservoir, part, mathematical simulation, forcing impulse, dissipation of energy.