

УДК 532.542

Я.В. Соколова, доцент, канд. техн. наук*Восточноукраинский национальный университет имени Владимира Даля,**ул. Тухачевского, 11, г. Луганск, 91050**ya.v.sokolova@inbox.ru***РАСЧЕТ РАСХОДА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В МИКРОЗАЗОРАХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ
С УЧЕТОМ ГРАНИЧНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ВЯЗКОСТИ**

Предложена математическая модель течения и зависимости для расчета расхода вязкой несжимаемой жидкости в микрозазорах гидравлических устройств с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости вблизи твердой поверхности. На примере плоской щели дан анализ падения пропускной способности проходного сечения.

Ключевые слова: динамическая вязкость, жидкость, давление, расход, распределение скорости.

Течение жидкости в микрозазорах представляет практический интерес в связи с решением задач по уплотнениям гидравлических устройств и аппаратов, герметичность соединения подвижных пар которых часто обеспечивается выполнением гарантированного микронного зазора. Классический подход к расчету течения в узких щелях предполагает постоянство динамической вязкости жидкости по сечению. Поток жидкости для распространенных условий работы гидросистем носит ламинарный характер и расчет течения производят на основе известных зависимостей для плоской, концентрической и эксцентрической щелей [1, 2].

Однако, согласно теоретическим положениям и опытным данным ряда авторов [3, 4] вблизи границы твердого тела (до нескольких тысяч ангстрем, $1\text{Å}^0=10^{-4}\text{мкм}=10^{-10}\text{м}$) вязкость минеральных масел скачкообразно увеличивается. Хотя толщина слоев, где проявляется отклонение вязкости, заметно меньше величины микрозазоров (размеры щелей в гидроаппаратах обычно выполняют не меньше 10-15 мкм), возникает несомненный интерес к оценке гидромеханических параметров потока с учетом отмеченного эффекта.

На величину скачка оказывает влияние род жидкости, материал твердой стенки, температура и т.д. Исследование свойств приграничных слоев жидкостей показывает, что это слои, где жидкость находится в особом фазовом состоянии, характеризующимся высокой степенью упорядочения молекул. Одна из самых простых непротиворечивых теорий, учитывающих эффекты пристеночных течений, исходит из модели сплошной среды с внутренним вращением неточечных структурных элементов.

Несмотря на то, что качественная оценка граничного увеличения вязкости вблизи твердой поверхности достаточно широко представлена в литературе, количественные характеристики для оценки гидромеханических параметров течения в микрозазоре отсутствуют.

Целью данной статьи является предложить математическую модель течения вязкой несжимаемой жидкости в микрозазорах гидравлических устройств и аппаратов с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости и установить зависимости для расчета расхода жидкости, дать анализ падения пропускной способности проходного сечения.

Рассмотрим стационарное течение в плоской щели, образованной двумя параллельными стенками неограниченной ширины. Выбрав ось x по потоку, ось y – перпендикулярно к стенкам щели (рисунок 1), запишем уравнение движения несжимаемой среды с переменной динамической вязкостью [1, 2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где μ – динамическая вязкость; $\partial p/\partial x$ – градиент давления; u_x – скорость течения жидкости

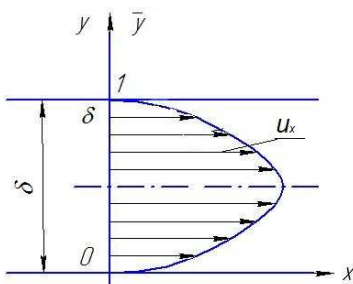


Рисунок 1 – Схема течения в плоской щели

Будем считать, что стенки, образующие щель, выполнены, в общем случае, из разных материалов. Это предполагает введения в рассмотрения различных величин скачков вязкости вблизи твердой поверхности, а также различных размеров приграничных слоев, где проявляется изменение вязкости. Поэтому, непротиворечивым является задание следующего распределения динамической вязкости по высоте зазора (рисунок 2):

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 + \Delta\mu_1, & y < \Delta\delta_1; \\ \mu_0, & \Delta\delta_1 \leq y \leq \delta - \Delta\delta_2; \\ \mu_0 + \Delta\mu_2, & y > \delta - \Delta\delta_2; \end{cases} \quad (2)$$

где δ – размер щели; $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2$ –размеры приграничных слоев у каждой из стенок, вблизи которых происходит увеличение вязкости; μ_0 – динамическая вязкость (в основном потоке жидкости вне граничных слоев); $\Delta\mu_1, \Delta\mu_2$ – величины приграничных скачков вязкости.

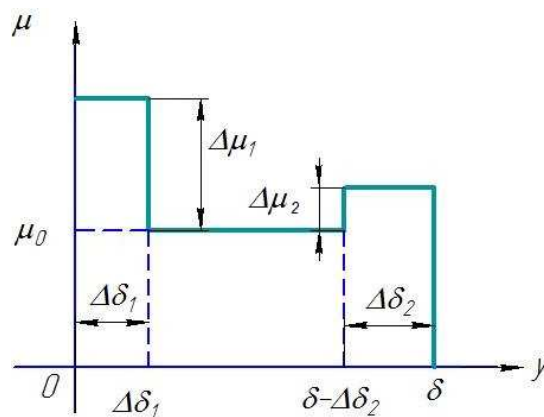


Рисунок 2 – Распределение динамической вязкости по высоте зазора

С целью дальнейшего упрощения математических выкладок введем следующие безразмерные переменные:
безразмерные координаты

$$\bar{y} = y/\delta; \quad \bar{\delta}_1 = \Delta\delta_1/\delta; \quad \bar{\delta}_2 = \Delta\delta_2/\delta; \quad (3)$$

безразмерная вязкость и ее скачки

$$\bar{\mu} = \mu/\mu_0; \quad \bar{\mu}_1 = \Delta\mu_1/\mu_0; \quad \bar{\mu}_2 = \Delta\mu_2/\mu_0; \quad (4)$$

безразмерная скорость

$$\bar{u} = \bar{u}_x/V_0; \quad (5)$$

где V_0 – средняя скорость при классическом расчете течения в плоской щели [1, 2]

$$V_0 = -\frac{\delta^2}{12\mu_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

или в виде, более удобном для технических расчетов,

$$V_0 = \frac{\Delta p \delta^2}{12\mu_0 l}, \quad (7)$$

где Δp – перепад давлений на щели; l – длина щели.

С учетом (3-6) уравнение (1) и распределение (2) принимают следующий безразмерный вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{y}} \right) = -12; \quad (8)$$

$$\bar{\mu} = \begin{cases} 1 + \bar{\mu}_1, & \bar{y} < \bar{\delta}_1; \\ 1, & \bar{\delta}_1 \leq \bar{y} \leq 1 - \bar{\delta}_2; \\ 1 + \bar{\mu}_2, & \bar{y} > 1 - \bar{\delta}_2. \end{cases} \quad (9)$$

Для нахождения распределения скорости $\bar{u}_x(\bar{y})$ по высоте щели выделим в зазоре (рисунок 3) три зоны (0, 1, 2), соответствующие постоянным значениям вязкости и проинтегрируем уравнение (8) для каждой из зон

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = -\frac{6}{1+\bar{\mu}_1} \bar{y}^2 + C_{11}\bar{y} + C_{12}; \quad (10)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = -6\bar{y}^2 + C_{01}\bar{y} + C_{02}; \quad (11)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = -\frac{6}{1+\bar{\mu}_2} \bar{y}^2 + C_{21}\bar{y} + C_{22}; \quad (12)$$

где $C_{11}, C_{12}, C_{01}, C_{02}, C_{21}, C_{22}$ - постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования рассматриваем следующие граничные условия

$$\bar{u}_1(0) = 0; \bar{u}_2(1) = 0 \quad (13)$$

и вводим согласно рисунку 3 пока еще неизвестные скорости \bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*

$$\bar{u}_1^* = \bar{u}_1(\bar{\delta}_1) = \bar{u}_0(\bar{\delta}_1); \quad (14)$$

$$\bar{u}_2^* = \bar{u}_2(1-\bar{\delta}_2) = \bar{u}_0(1-\bar{\delta}_2). \quad (15)$$

С учетом (13-15) получаем значения констант, после подстановки которых в (10-12) имеем

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = \frac{6}{1+\bar{\mu}_1} \bar{y}(\bar{\delta}_1 - \bar{y}) + \bar{u}_1^* \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_1}; \quad (16)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = \bar{u}_1^* + 6\bar{\delta}_1^2 - 6\bar{y}^2 + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1-\bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1-\bar{\delta}_2)} (\bar{y} - \bar{\delta}_1); \quad (17)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = \frac{6}{1+\bar{\mu}_2} (1-\bar{y})(\bar{\delta}_2 - 1 + \bar{y}) + \bar{u}_2^* \frac{(1-\bar{y})}{\bar{\delta}_2}; \quad (18)$$

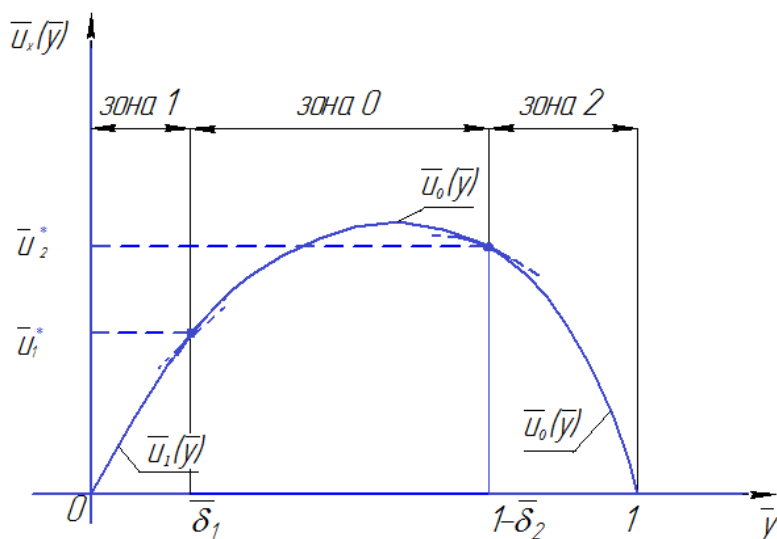


Рисунок 3 – К определению распределения скорости в плоской щели

Так как функциональная зависимость для скорости должна быть непрерывной и гладкой, то для нахождения скоростей \bar{u}_1^*, \bar{u}_2^* используем условия равенства производных от скорости в точках «сшивания» профилей скорости различных зон (рисунок 4):

$$\left. \frac{d\bar{u}_1}{d\bar{y}} \right|_{\bar{\delta}_1} = \left. \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}} \right|_{\bar{\delta}_1}; \quad (19)$$

$$\left. \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{y}} \right|_{1-\bar{\delta}_2} = \left. \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{y}} \right|_{1-\bar{\delta}_2}. \quad (20)$$

Зависимости (19), (20) дают следующие уравнения

$$-\frac{6\bar{\delta}_1}{1+\bar{\mu}_1} + \frac{\bar{u}_1^*}{\bar{\delta}_1} = -12\bar{\delta}_1 + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1-\bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1-\bar{\delta}_2)}; \quad (21)$$

$$-\frac{6\bar{\delta}_2}{1+\bar{\mu}_2} + \frac{12(1-\bar{y})}{1+\bar{\mu}_2} - \frac{\bar{u}_2^*}{\bar{\delta}_2} = -12(1-\bar{\delta}_2) + \frac{\bar{u}_1^* - \bar{u}_2^* + 6(\bar{\delta}_1^2 - (1-\bar{\delta}_2)^2)}{\bar{\delta}_1 - (1-\bar{\delta}_2)}; \quad (22)$$

Решая совместно (21) и (22), получаем

$$\bar{u}_1^* = \frac{6\bar{\delta}_1^3\bar{\mu}_1 - 6\bar{\delta}_1^2\bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} - \frac{6\bar{\delta}_1\bar{\delta}_2^2\bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} + 6\bar{\delta}_1(1-\bar{\delta}_1); \quad (23)$$

$$\bar{u}_2^* = \frac{6\bar{\delta}_2^3\bar{\mu}_2 - 6\bar{\delta}_2^2\bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} - \frac{6\bar{\delta}_1^2\bar{\delta}_2\bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} + 6\bar{\delta}_2(1-\bar{\delta}_2); \quad (24)$$

Подставляя (23), (24) в (16) – (18), имеем

$$\bar{u}_1(\bar{y}) = 6\bar{y} \left(1 - \frac{\bar{\delta}_2^2\bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} + \frac{\bar{\delta}_1^2\bar{\mu}_1 - 2\bar{\delta}_1\bar{\mu}_1 - \bar{y}}{1+\bar{\mu}_1} \right); \quad (25)$$

$$\bar{u}_0(\bar{y}) = -\frac{6\bar{\delta}_1^2\bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} + 6\bar{y} \left(1 - \bar{y} + \frac{\bar{\delta}_1^2\bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} - \frac{\bar{\delta}_2^2\bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} \right); \quad (26)$$

$$\bar{u}_2(\bar{y}) = 6(1-\bar{y}) \left(\frac{\bar{y} + \bar{\delta}_2^2\bar{\mu}_2 - 2\bar{\delta}_2\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_2}{1+\bar{\mu}_2} - \frac{\bar{\delta}_1^2\bar{\mu}_1}{1+\bar{\mu}_1} \right). \quad (27)$$

Зависимости (25) – (27) дают полное распределение безразмерной скорости по размеру щели. Примеры профилей скорости, рассчитанных по данным зависимостям для случая $\bar{\delta}_2 = 2\bar{\delta}_1$ и $\bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 2$, приведены на рисунке 4. Как видно, скорость течения меньше скорости, определенной по классическому расчету. Также, заметно смещение максимального значения скорости от центра зазора при неравномерном распределении вязкости.

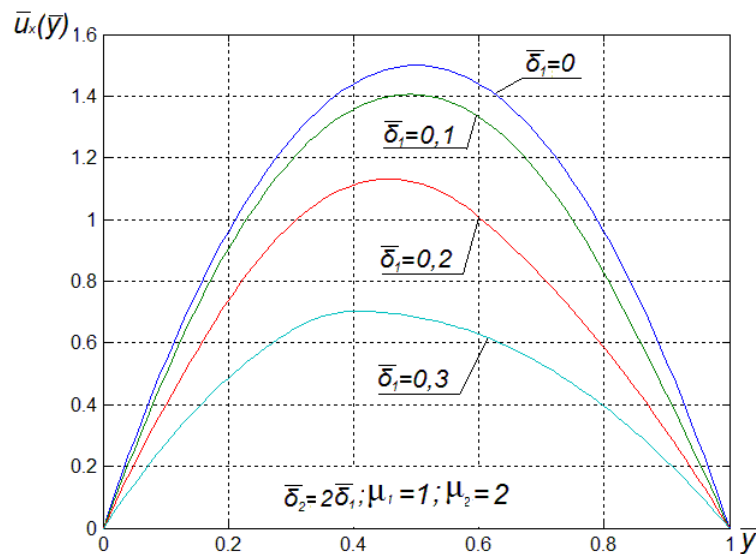


Рисунок 4 – Распределение скорости в щели

Введем безразмерный расход жидкости в зазоре

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\int_0^{\delta} u_x(y) dy}{V_0 \delta}, \quad (28)$$

где Q – действительный расход в зазоре; Q_0 – расход в зазоре по классическому расчету.

Нетрудно убедиться, что величина \bar{Q} есть соотношение между значением расхода, определенным с учетом скачкообразного граничного изменения вязкости, и значением расхода, определенным по классическому расчету. Величину \bar{Q} можно также рассматривать как падение пропускной способности проходного сечения микрозазора.

Учитывая (3, 5), вместо (28) имеем

$$\bar{Q} = \int_0^1 \bar{u}_x(\bar{y}) d\bar{y} \quad (29)$$

или, рассматривая интеграл (29) по зонам (рисунок 4),

$$\bar{Q} = \int_0^{\bar{\delta}_1} \bar{u}_1(\bar{y}) d\bar{y} + \int_{\bar{\delta}_1}^{1-\bar{\delta}_2} \bar{u}_0(\bar{y}) d\bar{y} + \int_{1-\bar{\delta}_2}^1 \bar{u}_2(\bar{y}) d\bar{y}. \quad (30)$$

Подставив (25-27) в (30), получаем следующее выражение для определения падения пропускной способности проходного сечения

$$\bar{Q} = 1 - \bar{\mu}_1 \bar{\delta}_1^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}_1}{1 + \bar{\mu}_1} - \bar{\mu}_2 \bar{\delta}_2^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}_2}{1 + \bar{\mu}_2}. \quad (31)$$

Необходимо отметить, что при $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2 \rightarrow 0$ или $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2 \rightarrow 0$ выражение (31) дает $\bar{Q} = 1$, т.е. имеется явный предельный переход к классическому расчету течения вязкой несжимаемой жидкости в микрозазоре.

Более общий анализ влияния скачкообразного увеличения вязкости можно сделать, если рассмотреть течение в плоской щели между стенками из однородных материалов. В этом случае имеем одно значение размера приграничной зоны и величины приграничного скачка вязкости

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2; \quad (32)$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2. \quad (33)$$

Ввиду появляющейся при этом симметрии распределения скорости зависимости (25-27) записываем для половины размера щели

$$\bar{u}(\bar{y}) = \begin{cases} 6\bar{y} \left(1 - \frac{2\bar{\delta}\bar{\mu} + \bar{y}}{1 + \bar{\mu}} \right), & 0 \leq \bar{y} < \bar{\delta}; \\ 6\bar{y}(1 - \bar{y}) - \frac{6\bar{\mu}\bar{\delta}^2}{1 + \bar{\mu}}, & \bar{\delta} \leq \bar{y} \leq 0,5. \end{cases} \quad (34)$$

На основании (32) и (33) получаем следующее выражение для падения пропускной способности проходного сечения плоской щели

$$\bar{Q} = 1 - 2\bar{\mu}\bar{\delta}^2 \frac{3 - 2\bar{\delta}}{1 + \bar{\mu}}. \quad (35)$$

Примеры расчета зависимости падения пропускной способности проходного сечения от размера приграничной зоны при различных значениях скачка вязкости показаны на рисунке 5.

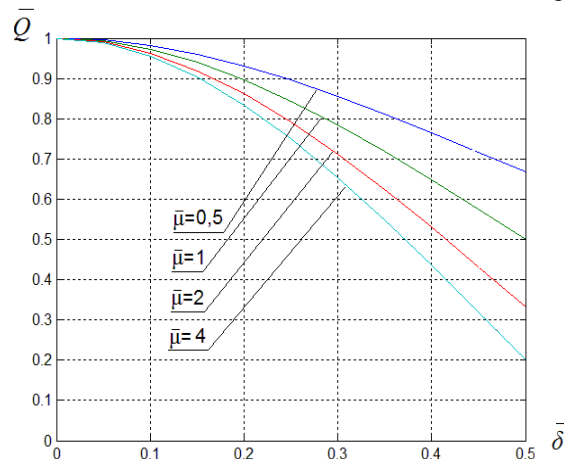


Рисунок 5 – Падение пропускной способности в зависимости от размера приграничного слоя с повышенной вязкостью

Анализ полученных результатов показывает, что скачкообразное граничное увеличение динамической вязкости однозначно приводит к падению пропускной способности проходного сечения микрозазора. Также можно считать, что падение расхода для плоской щели составляет не более 5 % при $\bar{\delta} < 0,1$ и $\bar{\mu} < 4$, а для расчета течения вполне применимы известные зависимости [1, 2].

В заключение отметим следующее. Аналогичную модель течения с учетом скачкообразного граничного увеличения вязкости можно построить и для капиллярного цилиндрического канала радиуса r_0 . Если обозначить: $\Delta\delta$ – размер приграничного слоя у стенки, где происходит увеличение вязкости, а

$$\bar{\delta} = \Delta\delta / r_0, \quad (36)$$

То, выполнив в цилиндрической системе координат выкладки, подобные (10) – (35), можно получить следующее выражение для падения пропускной способности капиллярного цилиндрического канала

$$\bar{Q} = 1 - \bar{\mu} \bar{\delta}^2 \frac{(2 - \bar{\delta})^2}{1 + \bar{\mu}}. \quad (36)$$

Выводы. Таким образом, проведены исследования течения вязкой несжимаемой жидкости в микроззорах гидравлических устройств и аппаратов с учетом скачкообразного граничного увеличения вязкости вблизи твердой поверхности. Предложена математическая модель течения и зависимости для расчета расхода жидкости. На примере плоской щели дан анализ падения пропускной способности проходного сечения.

Библиографический список использованной литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев. — М.: Машиностроение, 1987. — 440 с.
3. Дерягин Б.В. Поверхностные силы / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, В.М. Муллер. — М.: Наука, 1983. — 399 с.
4. Дерягин Б.В. Смачивающие пленки / Б.В. Дерягин, Н.В Чураев. — М.: Наука, 1984. — 160 с.

Поступила в редакцию 24.03.2013 г.

Соколова Я.В. Розрахунок витрати в'язкої нестисливої рідини у мікроззорах гідравлічних пристроїв з урахуванням межевої зміни в'язкості

Запропоновано математичну модель течії та залежності для розрахунку витрати в'язкої нестисливої рідини у мікроззорах гідравлічних пристроїв з урахуванням стрибкоподібної граничної зміни в'язкості поблизу твердої поверхні. На прикладі плоскої щілини дано аналіз падіння пропускної здатності прохідного перетину.

Ключові слова: динамічна в'язкість, рідина, тиск, витрата, розподіл швидкості

Sokolova Ya. Calculating the cost of a viscous incompressible fluid in hydraulic machinery microgaps based on surveying change in viscosity

A mathematical model of the flow and dependences to calculate the flow of an incompressible viscous fluid in the microgaps of hydraulic devices with the abrupt change in viscosity of the boundary near the solid surface are proposed. On the example of a flat gap the analysis of the fall of bandwidth flow section is given.

Keywords: dynamic viscosity, fluid, pressure, flow, velocity distribution.