УДК 621.923

С.М. Братан, профессор, д-р техн. наук,
Д.А. Каинов, доцент, канд. техн. наук,
Н.Н. Столяров, магистр
Севастопольский национальный технический университет,
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
serg.bratan@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТРУЖКООБРАЗОВАНИЯ ПРИ ХОНИНГОВАНИИ

В работе, на основе теории выбросов, построена стохастическая модель процесса хонингования отверстий абразивным инструментом, позволяющая оценивать съем материала.

Ключевые слова: *хонингование, математическая модель, марковский процесс, стохастическое описание.*

При хонинговании съем материала в существенной степени происходит в пределах слоя, в котором распределена шероховатость. При моделировании процессов стружкообразования необходимо учитывать специфику происходящих явлений [1,2], при съеме материала в зоне контакта хона и заготовки. В этом случае необходимо уточнение модели взаимодействия абразивных зерен с поверхностным слоем заготовки.

В связи с этим поставлена задача построения математической модели для оценки параметров съема материала при хонинговании, что и является целью данной работы.

Для достижения поставленной цели шероховатая поверхность детали представлена нормальной марковской функцией (марковским процессом). В соответствии с теорией выбросов [3] построены оценки нестационарной условной плотности распределения вероятностей прохождения трассы зерна в шероховатом слое детали, которые и определяют основные стохастические параметры стружек.

Для построения математической модели, позволяющей оценивать происходящие явления необходимо математическое описание формы отверстия.

Наиболее просто описать форму отверстия в полярной системе координат с началом, расположенным в центре отверстия и углом ϕ, отсчитываемым от некоторой фиксированной точки, посредством разложения в ряд Фурье

$$R(\phi) = R_0 + \sum \mathrm{R_i} \cdot Cos(\omega_i \phi + \mu_i)\,. \qquad (1)$$

Представление формы отверстия в виде (1) справедливо вследствие периодического характера ее формы как функции ϕ. Конкретные значения соответствующих коэффициентов R_i, $i \in \{0..n\}$ могут быть определены в результате измерений соответствующих отстояний образующей детали от ее центра.

Для установившегося режима хонингования можно считать, что деталь вращается относительно хона с постоянной угловой скоростью ω и угол ϕ может быть определен как

$$\phi = \omega \cdot t + \mu_0 \qquad (2)$$

Для высокочастотной составляющей уравнения (1) – компонентам с большими значениями i определение соответствующей фазы μ_i в силу ограниченной точности фиксации начальной точки производится со значительной погрешностью, имеющей случайный характер.

Целесообразно использовать представление энергетических спектров (спектров мощности) процессов $S(\omega)$, которые могут быть построены на основе уравнений Винера - Хинчина [4],

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K(\phi\cdot)Cos(\omega\phi)d\phi \quad , \quad K(\phi) = \int_0^{\infty} S(\omega)Sin(\omega\phi)d\omega\,, \qquad (3)$$

однозначно связывающие корреляционные (взаимокорреляционные) функции $K(\phi)$ и энергетические спектры $S(\omega)$.

Определение конкретного вида корреляционной функции $K(\phi)$ для решения уравнения (3) может быть произведено по круглограмме отверстия.

Предпочтительным является представление зависимостей (1) в форме (3) как случайного процесса изменения радиуса как функции угла поворота, а, с учетом (2), и как функции времени. Эту зависимость можно моделировать одномерным марковским процессом, считая, что условная плотность вероятности $f(\phi_i, R_i; \phi_j, R_j)$, $\phi_i < \phi_j$ кроме общих условий, которым удовлетворяет всякая плотность вероятностей

$$f(\phi_i, R_i; \phi_j, R_j) > 0, \qquad f(\phi_i, R_i; \phi_j, \pm\infty) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_i, R_i; \phi_j, R_j) dR_j = 1$$

удовлетворяет и соотношениям Чепмена-Колмогорова

$$f(\phi_i, R_i; \phi_j, R_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi_i, R_i; \phi_k, z) f(\phi_k, z; \phi_j, R_j) dz$$

для любого $\phi_i \le \phi_k \le \phi_j$, отражающего факт «гладкости» - непрерывности изменения $R(\phi)$ – отсутствие разрывов функции и дифференциальным уравнениям в частных производных Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} + \frac{\partial}{\partial R_j}[a(\phi_j, R_j) \cdot f] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial {R_j}^2}[b(\phi_j, R_j) \cdot f] = 0 . \qquad (4)$$

Функции $a(\phi_i, R_i)$ и $b(\phi_j, R_j)$ характеризуют изменчивость математического ожидания и дисперсии радиуса, соответственно. Для компактности записи опущены соответствующие аргументы плотности вероятности.

В предположении стационарности случайной функции, характеризующей радиус отверстия за период контакта, параметры уравнения (4) $a(\phi_i, R_i)$ и $b(\phi_j, R_j)$ не зависят от времени, причем $a(\phi_i, R_i)$ является линейной функцией радиуса обрабатываемого отверстия, а b – постоянной величиной. В указанном случае решением системы (4) является плотность нормального закона распределения реализации случайного стохастического процесса, а реализация $R(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dR(\phi)}{d\phi} + \alpha \cdot R(\phi) = \beta \cdot \xi(\phi) , \qquad (5)$$

где $\xi(\phi)$ и $\beta = \sigma_R / \sigma$ – нормальный белый шум единичной интенсивности и интенсивность входного воздействия.

Решением стохастического уравнения (5) при начальном условии $R(0) = R_0$ является

$$R(\phi) = R_0 \exp(-\alpha\phi) + \beta \exp(-\alpha\phi) \int_0^{\phi} \exp[\alpha\xi(x)] dx . \qquad (6)$$

В соответствие (3), соотношению (5) следует спектральная плотность вида и корреляционная функция вида

$$S_R(\omega) = \frac{\alpha \cdot \sigma_R^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} , \qquad (7)$$

$$K_{\mathrm{R}}(\phi) = \sigma_R^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot |\phi|) . \qquad (8)$$

Справедливо и обратное [2]. Нормальные стационарные процессы с корреляционными функциями вида (7) или спектральными плотностями (8) являются марковскими. К таким процессам или к n – мерным марковским процессам с более сложным описанием следует отнести основные классы нормальных случайных процессов при шлифовании, которые могут быть представлены энергетическими спектрами с дробно-рациональным представлением, рассмотренные в [2].

Вероятность того, что ордината марковского процесса $R(\phi)$ при прохождении режущей кромкой пути ϕ ни разу не выйдет за границы интервала (R_1, R_2) определится зависимостью

$$W(\phi) = \int_{R_1}^{R_2} w(\phi, y) dy , \qquad (9)$$

где $w(\phi, R)$ удовлетворяет второму уравнению системы (4)

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial R}(aw) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(bw) = 0 , \qquad (10)$$

с граничными и начальными условиями, $w(\phi, R_1) = w(\phi, R_2) = 0$ при $R \ge 0$, $w(\phi, R)\big|_{\varphi=0} = \delta(R - x)$, если задано начальное значение ординаты x процесса $w(\phi, R)\big|_{\varphi=0} = w_0(R)$, если задана плотность вероятности ординаты процесса при

$$\phi = 0 + 0. \qquad (11)$$

Для вычисления коэффициентов $a(\phi, R)$ и $b(\phi, R)$ могут быть использовано соотношение (5) с учетом требований (4), приближенного разложения $\exp(-\alpha \cdot \Delta\phi) \approx 1 - \alpha \cdot \Delta\phi$ для $\alpha \cdot \Delta\phi << 1$ и учета стробирующих свойств дельта функции

$$\begin{aligned} b(\phi, R) &= \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{1}{\Delta\phi} \left\langle [R(\phi+\Delta\phi) - R(\phi)] \middle| R(\phi) \right\rangle = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{1}{\Delta\phi} \{R^2[\exp(\alpha \cdot \Delta\phi) - 1]^2 \\ &+ \beta^2 \exp[-2\alpha(\phi+\Delta\phi)] \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \exp[\alpha(x+y)] \langle \xi(x)\xi(y) \rangle dxdy\} = \\ &= \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{1}{\Delta\phi} \beta^2 \exp[-2\alpha(\phi+\Delta\phi)] \frac{\Xi_0}{2} \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \exp[\alpha(x+y)] \delta(y-x) dxdy = \\ &= \beta^2 \frac{\Xi_0}{2} = const, \end{aligned} \qquad (13)$$

где $\langle \Psi(q) \rangle$ – математическое ожидание соответствующего аргумента (функции), а параметры α, β, Ξ соответствуют (5).

С учетом (12), (13) обратное уравнение Колмогорова (4) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\phi, R) = \alpha \frac{\partial}{\partial R}(Rw) + \frac{\beta^2 \Xi_0}{4} \frac{\partial^2}{\partial R^2} w, \qquad (14)$$

которое может быть решено методом Гаусса представлением функции $w(R, \phi)$ в виде

$$w(\phi, R) = \Lambda(R) \cdot \Omega(\phi). \qquad (15)$$

Деление левой и правой частей (14) на (15) приводит после соответствующих преобразований к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} = -\gamma^2 \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2}[b(R)\Lambda(R)] - \frac{\partial}{\partial R}[a(R)\Lambda(R)] + \gamma^2 \Lambda(R) = 0, \qquad (16)$$

решением первого из которых является

$$\Omega(\phi) = \exp(-\gamma^2 \phi). \qquad (17)$$

Второе уравнение системы (16) может быть определено известными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и для рассматриваемого случайного процесса

$$w(\phi, R) = w_{st}(R)\{\Omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n(R)\Omega_n \exp[-\gamma_n{}^2(\phi - \phi_0)]\}, \qquad (18)$$

где Ω_i – постоянные коэффициенты, $\Lambda_i(R)$ – ортонормированные собственные функции второго уравнения системы (16), соответствующие собственным значениям γ^2, т.е.

$$\int \frac{\Lambda_i(R) \cdot \Lambda_j(R)}{w_{st}(R)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

При заданной начальной плотности вероятности $w(R, \phi) = w_0(R)$, коэффициенты Ω_n определятся как

$$\Omega_n = \int \frac{w_0(R)\Lambda(R)}{w_{st}(R)} dR,$$

а в случае заданной начальной ординаты процесса $w_0(R) = \delta(R - R_0)$ и

$$w(\phi, R) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n(R_0)\Lambda_n(R)}{w_{st}(R)} \exp[-\gamma_n{}^2(\phi - \phi_0)]\}, \quad \Lambda_0(R) = w_{st}(R), \quad \gamma_0 = 0.$$

Для рассматриваемого случая одномерного нормального Марковского процесса при начальном условии $R(0) = R_0$ решение может быть представлено в форме:

$$w(\phi, R|_{R_0, 0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2[1 - \exp(-2\alpha\phi)]}} \exp\left\{ -\frac{[R - R_0 \exp(-\alpha\phi)]^2}{2\sigma^2[1 - \exp(-2\alpha\phi)]} \right\}, \qquad (19)$$

которая представляет собой нестационарную условную плотность вероятности. Из (19) непосредственно определяются нестационарное математическое ожидание и нестационарная дисперсия процесса:

$$M(\phi) = R_0 \exp(-\alpha\phi),$$
$$D(\phi) = \sigma^2[1 - \exp(-2\alpha\phi)]. \qquad (20)$$

В предположении больших величин

$$\phi >> 1/\alpha , \qquad (21)$$

что справедливо, например, для процесса хонингования, может быть получена и непосредственно использована установившаяся плотность условной вероятности, а ее параметры могут быть непосредственно оценены по соотношениям (19), (20), т.е.

$$w_{st}(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha}\Xi_0 . \qquad (22)$$

Соотношение (19) и его стационарное представление (22) с учетом известной функции плотности вероятности распределения режущих кромок инструмента по глубине рабочего слоя:

$$f(R) = C_f R^{\chi-1}, \qquad (23)$$

(здесь C_f – коэффициент, вычисляемый из условия равенства единице площади, ограниченой кривой распределения:

$$C_f = \frac{\chi}{H_R^{\chi}},$$

где H_R – величина слоя рабочей поверхности хона по глубине, в пределах которой подсчитывается число активных зерен) позволяет получить зависимость для плотности вероятности съема материала при хонинговании в виде:

$$w(\phi, R) = w(\phi, R|_{R_0,0}) \cdot f(R) \qquad (24)$$

или для стационарного случая

$$w_{st}(R) = \frac{\chi}{H_R^{\chi}\sigma\sqrt{2\pi}} R^{\chi-1} \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (25)$$

Выражения (24),(25) представляют собой стохастическое описание процесса съема материала при контактировании абразивного инструмента и заготовки, и является основой для определения стохастических представлений основных технологических показателей процесса хонингования.

Библиографический список использованной литературы

1. Новоселов Ю.К. Динамика формообразования поверхностей при абразивной обработке / Ю.К. Новоселов. — Севастополь: СевНТУ, 2012. — 304 с.

2. Братан С.М. Технологические основы обеспечения качества и повышения стабильности высокопроизводительного чистового и тонкого шлифования: дис. … д-ра техн. наук: 05.02.08: защищена 24.03.2006: утв. 01.07. 2006 / Братан Сергей Михайлович. — Одесса, 2006. — 321 с.

3. Хусу А.П. Шероховатость поверхностей / А.П. Хусу, Ю.Р. Виттенберг. — М: Наука, 1975. — 344 с.

4. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — М.: Наука, 1977. — 586 с.

Поступила в редакцию 23.03.2013 г.

Братан С.М., Каінов Д.А., Столяров Н.Н. Моделювання процесу стружкоутворення при хонінгуванні

В роботі, на основі теорії викидів, побудована стохастична модель процесу хонінгування отворів абразивним інструментом, що дозволяє оцінювати знімання металу.

Ключові слова: хонінгування, математична модель, марковський процес, стохастичне опис.

Bratan S.M., Kainov D.A. Stolyarov N.N. Simulation of the process of chips forming in honing

A stochastic model of the process of honing holes with abrasive tool on the basis of the emission theory is constructed in the work, which allows to assess the perception of the metal.

Keywords: honing, mathematical model, Markov process, a stochastic description.