

УДК 629.113

Д.Л. Мойся, ст. преподаватель

Донецкая академия автомобильного транспорта пр. Дзержинского, 7, г. Донецк, Украина, 83086

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОПОЕЗДА С УПРАВЛЯЕМЫМ ПОЛУПРИЦЕПОМ В КРУГОВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ**

Выполнен анализ устойчивости стационарных режимов автопоезда с управляемым полуприцепом. Устойчивость прямолинейного режима оценена на основе критерия Рауса - Гурвица. Поиск области устойчивости произведен в пространстве параметров: продольная скорость – передаточное отношение механизма управления осью полуприцепа. Устойчивость круговых режимов проанализирована на основе анализа собственных значений системы линейного приближения.

**Ключевые слова:** устойчивость автопоезда, критерий Рауса-Гурвица, круговой режим.

**Введение.** В более ранних работах [1-2] были разработаны рекомендации по выбору передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа на основе условий совпадения следа второй и третьей осей в круговых стационарных режимах без анализа условий их устойчивости. В данной статье выполнен анализ устойчивости стационарных режимов автопоезда для рекомендованных передаточных отношений. Устойчивость круговых стационарных режимов движения изучена менее полно – обычно рассматривались случаи движения по траекториям достаточно большого радиуса [4-6]. В данной работе развивается программно-вычислительная база, позволяющая исследовать устойчивость и круговых стационарных состояний модели автопоезда с управляемым полуприцепом.

**Цель работы:** исследование устойчивости прямолинейного и круговых стационарных режимов движения модели автопоезда с управляемым полуприцепом. Получение условий вписываемости автопоезда в кольцевой коридор европейского стандарта.

1. Математическая модель трехзвенного автопоезда с безпорным промежуточным звеном и жестким рулевым управлением тягача.

Передняя ось тягача может поворачиваться на угол  $\theta$ , рисунок 1. Связь между звеньями осуществляется цилиндрическими шарнирами, которые допускают относительное поворачивание звеньев в плоскости их движения. Ось полуприцепа поворачивается на угол  $\theta_1$ , относительно продольной оси полуприцепа, с помощью тросовой передачи, которая соединяет шкивы неподвижно прикрепленные к тягачу и к поворотной оси полуприцепа соответственно (рисунок 2). Трёхзвенный автопоезд, который состоит из тягача, полуприцепа и поворотной оси (см. рисунок 2), при отсутствии управления осью будет неустойчивым (вращение полуприцепа будет непредвиденным). При введении пассивного управления осью (вводится жесткая связь между углом складывания и углом поворота управляемой оси полуприцепа) может быть решена задача стабилизации и улучшения показателей маневренности. При этом возникает вопрос выбора синтеза такого управления.

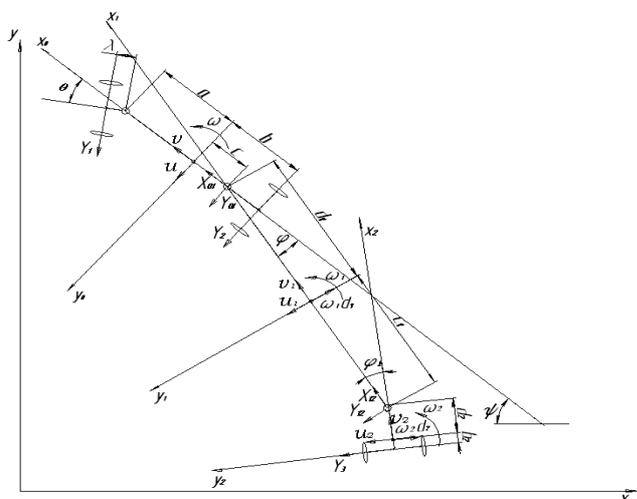


Рисунок 1 - Принципиальная расчетная схема автопоезда

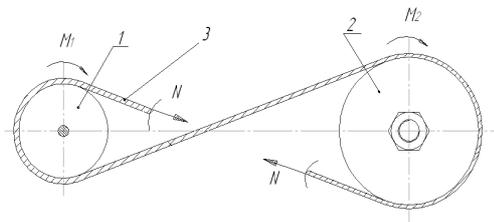


Рисунок 2 – Схема тросовой передачи

Обеспечить заданную траекторию движения полуприцепа можно за счет управления поворотной осью полуприцепа (см. рисунок 1). Управление осью тележки предлагается осуществлять передачей с

гибкой связью (тросовой передачей, обозначенной на рисунке 2 заштрихованной полосой). Тросовая передача состоит из системы шкивов 1, 2 и троса 3 (см. рисунок 2)

При повороте автопоезда между продольными осями тягача и полуприцепа образуется угол складывания, за счет чего на поверхности соприкосновения шкива 1 и троса 3 возникают силы трения. Эти усилия передаются вдоль троса на шкив 2. Шкив 2 неподвижно связан с управляемой осью тележки, то есть момент сил трения будет вращать и ее.

Вращающие моменты, которые возникают на шкивах, связанные соотношениям:

$$M_1 = PCN \cdot M_2, \tag{1}$$

где PCN – передаточное соотношение тросовой передачи.

Положение каждого звена автопоезда задается координатами  $x_i, y_i$  его центра масс  $C_i$  и курсовым углом  $\psi_i$  (который образовывается между продольной осью соответствующего звена и осью абсцисс (x) неподвижной системы координат).

Параметры системы:  $v$  - продольная составляющая скорости центра масс тягача;  $a, b$  - расстояние от центра масс тягача к точкам крепления передней и задней осей тягача;

$c$  - расстояние от центра масс тягача к точки сцепки с задним звеном;  $d_1, d_2$  – расстояние от центра масс полуприцепа и оси к точкам сцепки соответственно; коэффициент трения  $k_f$ ; коэффициенты увода на осях ( $k_1, k_2, k_3$ ); коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода ( $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ ); установленный угол поворота колес управляемого модуля  $\theta$ , приведенная боковая реакция полотна дороги на опорных осях тягача и полуприцепа ( $Y_1, Y_2, Y_3$ ).

Обозначим через  $C, C_1, C_2$  - центры масс,  $m, m_1, m_2$  - массы,  $I, I_1, I_2$  - центральные моменты инерции относительно соответствующих вертикальных осей звеньев автопоезда,  $\varphi$  - угол складывания (образовывается между продольными осями тягача и полуприцепа).

$\omega = \dot{\psi}, \omega_1 = \dot{\psi}_1, \omega_2 = \dot{\psi}_2$  - абсолютные угловые скорости звеньев,

Система дифференциальных уравнений движения автопоезда описывает изменение фазовых переменных ( $u, \omega, \varphi, \Phi$ ):  $u$  – поперечная составляющая скорости центра масс тягача,  $U$  – ее производная в подвижной системе координат;  $\Omega$  – угловое ускорение относительно вертикальной оси;  $\Phi$  – скорость складывания угла  $\varphi$ ;  $\dot{\varphi}$  – угловое ускорение полуприцепа.

Среди разных теорий качения упругодеформируемых колес самое большое распространение получила аксиоматика И. Рокара, согласно которой боковая реакция  $Y_i$  полотна дороги, приложенная в центре пятна контакта упругого колеса, которое катится, является функцией лишь так называемого угла увода  $\delta_i$ .

Приведенные углы бокового увода колесных осей определяются выражениями

$$\delta_1 = \theta - \arctg \frac{(u + a\omega)}{v}; \quad \delta_2 = \arctg \frac{-u + b\omega}{v}; \quad \delta_3 = -\theta_1 + \arctg \frac{-u_1 + b_1\omega_1}{v_1}. \tag{2}$$

Зависимости сил бокового увода, которые имеют эмпирическое происхождение [3], можно аппроксимировать зависимостью (монотонно возрастающая функция, которая имеет характер кривой насыщения)

$$Y_i = k_i \delta_i / \sqrt{1 + (k_i \delta_i / \chi_i Z_i)^2}, \tag{3}$$

где  $Z_i$  – вертикальные реакции опорной поверхности на осях.

Пренебрегая перераспределением нормальных реакций между бортами, будем рассматривать одно сведенное колесо с центром в середине каждой оси. Тогда

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{l} [mgb + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (b - c)]; \quad Z_2 = \frac{1}{l} [mga + m_1 g \frac{c_1}{L_1} (c + a)]; \\ Z_3 &= m_2 \cdot g + \frac{m_1 \cdot g \cdot d_1}{L_1}; \quad l = a + b; \quad L_1 = d_1 + c_1; \quad L_2 = d_2 + b_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Примечание: дальше будем считать  $L_2 \approx 0$  (соответствующие размеры опорной оси сравнительно малые).

На основе общих теорем динамики получены следующие уравнения движения:

## 1. Уравнение движения тягача

$$\begin{aligned} m(V - u\omega) - X_{01} + Y_1 \sin(\theta) &= 0, \\ m(U + v\omega) - Y_{01} - Y_1 \cos(\theta) - Y_2 &= 0, \\ J\Omega + Y_{01}c - Y_1a \cos(\theta) + Y_2b + M_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. Уравнение движения полуприцепа

$$\begin{aligned} m_1(V_1 - u_1\omega_1) + X_{01} \cos(\varphi) - Y_{01} \sin(\varphi) - X_{12} &= 0, \\ m_1(U_1 + v_1\omega_1) + X_{01} \sin(\varphi) + Y_{01} \cos(\varphi) - Y_{12} &= 0, \\ J_1\Omega_1 + X_{01} d_1 \sin(\varphi) + Y_{01}d_1 \cos(\varphi) + Y_{12}c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

## 3. Уравнение движения тележки

$$\begin{aligned} m_2(V_2 - u_2\omega_2) + X_{12} \cos(\theta_1) - Y_{12} \sin(\theta_1) &= 0, \\ m_2(U_2 + v_2\omega_2) + X_{12} \sin(\theta_1) + Y_{12} \cos(\theta_1) - Y_3 \cos(\theta_1) &= 0, \\ J_2\Omega_2 + X_{12} d_2 \sin(\theta_1) + Y_{12}d_2 \cos(\theta_1) + Y_3 \cos(\theta_1)b_2 + M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2. Анализ устойчивости прямолинейного режима движения.

На основе условий устойчивости Рауса – Гурвица построены области устойчивости в плоскости характерных конструктивных и управляемых параметров модели автопоезда (например, передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа и продольной скорости движения центра масс тягача, но выбор этих параметров может варьироваться в зависимости от поставленной задачи).

Необходимым условием устойчивости являются положительность всех коэффициентов характеристического уравнения (условия А. Стодолы). Необходимыми и достаточными условиями устойчивости стационарного режима – положительность всех определителей Гурвица и положительность коэффициента при старшем члене характеристического уравнения [8].

При выбранных числовых значениях конструктивных параметров системы (параметры автопоезда соответствуют работе [7]):

$$m = 6500 \text{ кг}, m_2 = 36500 \text{ кг}, a = 0,4 \text{ м}, b = 3,2 \text{ м}, c = 2,7 \text{ м}, c_1 = 2,6 \text{ м}, d_1 = 5,6 \text{ м}, m_3 = 800 \text{ кг}, J_2 = 775 \text{ кг м}^2$$

$$d_2 = 0,8 \text{ м}, b_2 = 0,2 \text{ м}, k_1 = 160000 \text{ Н}, k_2 = 226000 \text{ Н}, k_3 = 270000 \text{ Н}, J = 25410 \text{ кг м}^2, J_1 = 3920000 \text{ кг м}^2$$

в плоскости параметров передаточное отношение механизма управления осью полуприцепа и продольная скорость движения центра масс тягача получены границы устойчивости (рисунок 3).

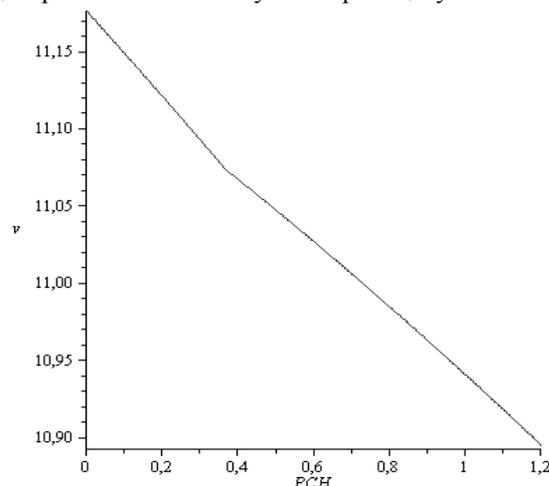


Рисунок 3 – Область устойчивости в плоскости параметров РСН, v

Область устойчивости, представленная на рисунке, определяется условием положительности старшего определителя Гурвица (область устойчивости находится на графике ниже линии  $DG[4]=0$ ).

## 3. Анализ устойчивости круговых режимов движения.

На основании результатов анализа рациональных значений передаточных отношений [2], обеспечивающих приближенное совпадение траекторий качения колес второго и третьего ряда выбираем

значение передаточного отношения  $PCH=0,75$ , которое обеспечивает условие устойчивости прямолинейного движения. Далее определим условия устойчивости круговых стационарных режимов при выбранном значении передаточного отношения (режим устойчивый, если действительные части корней характеристического уравнения отрицательны).

Выбранные, на основе численного интегрирования, параметры управления  $v = 2,5$  м/с и  $\theta = 0,5$  рад обеспечивают вписываемость автопоезда в кольцевой коридор, габариты которого соответствуют стандартам ЕС, см. рисунок 4.

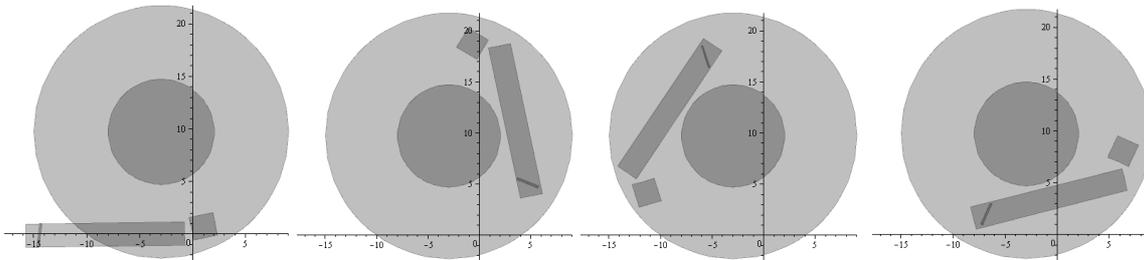


Рисунок 4 – Прохождение автопоездом стандартного кольцевого коридора

Графическое представление конфигурации автопоезда получено в программном пакете «Maple», выполнялось на основе численного интегрирования, указывает на устойчивость реализуемого режима движения.

Итерационный метод нахождения стационарного режима движения автопоезда  $\{u = 0,7733$  м/с ;  $\omega = 0,2756$  рад/с ;  $\varphi_1 = -0,9001$  рад} подтверждает результаты численного интегрирования.

Отобразим фазовые переменные, соответствующие этому стационарному режиму в виде интегральных кривых, полученных в результате численного моделирования матмодели.

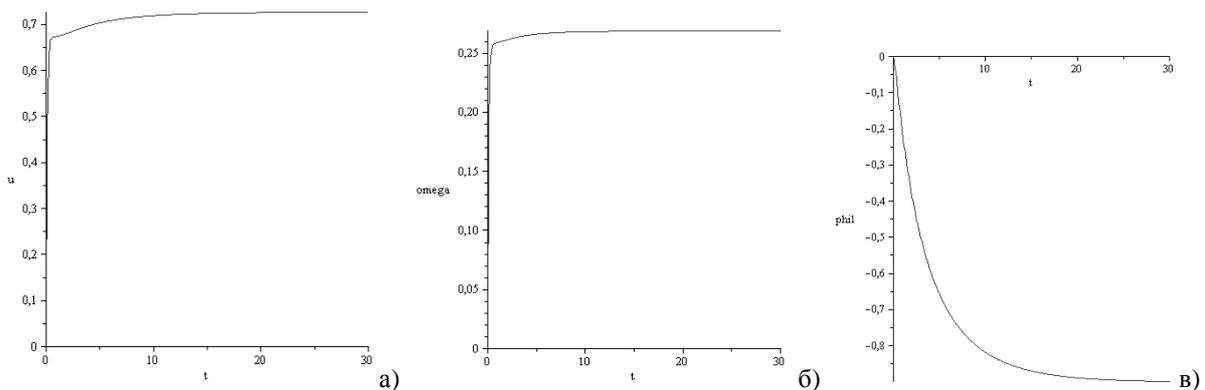


Рисунок 5 – Графики изменения фазовых переменных при вхождении автопоезда в круговой стационарный режим (а – поперечная скорость; б – угловая скорость; в – угол складования)

Графики подтверждают, что с течением времени все фазовые переменные стремятся к постоянным величинам, отвечающим стационарному режиму.

Для подтверждения устойчивости кругового стационарного режима определим спектр собственных значений соответствующего характеристического уравнения (рисунок 6, 7).

На рисунке 6 видно, что все действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, что подтверждает устойчивость полученного стационарного режима.

Сопоставим радиусы движения центров второй и третьей осей автопоезда, полученные при помощи матмоделей линейной и нелинейной постановок при движении по стандартному кольцевому коридору. При выбранных параметрах системы ( $v = 2,5$  м/с ,  $\theta = 0,5$  и  $PCH = 0,75$ ), получаем следующие значения радиусов:

- $R_2 = 10,3$  м;  $R_3 = 11,2$  м – линейная модель;
- $R_2 = 10,3$  м;  $R_3 = 9,3$  м – нелинейная модель.

Очевидно, что при малых скоростях и  $PCH < 1$ , радиусы  $R_2$  и  $R_3$  должны быть близки для линейной и нелинейной моделей. Из – за простоты расчетов линейную модель можно применять в качестве

«оценочной», а нелинейную для окончательных уточнений. Так при помощи нелинейной модели было определено, что при  $\theta = 0,5$  и РСН = 0,75 потеря устойчивости произойдет, когда скорость автопоезда достигнет  $v_{кр} = 6,25$  м/с. При данной скорости пара комплексно - сопряженных корней характеристического уравнения будут иметь нулевую действительную часть, что говорит о флатерной потере устойчивости см рисунок 7.

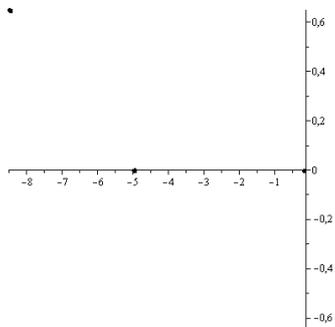


Рисунок 6 – Спектр собственных значений характеристического уравнения, отвечающего круговому режиму движения

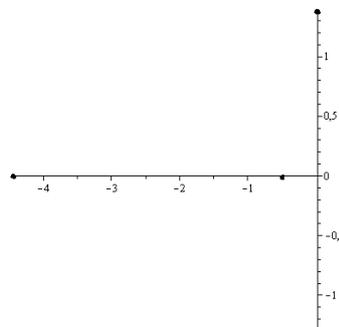


Рисунок 7 - Спектр собственных значений характеристического уравнения, отвечающего флатерной потере устойчивости кругового режима движения

**Выводы.** Разработана программно-вычислительная база, позволяющая строго обосновать выбор значения передаточного отношения механизма управления осью полуприцепа (РСН), обеспечивающего вписываемость в стандартный кольцевой коридор и устойчивость прямолинейного движения в заданном диапазоне скоростей.

#### **Библиографический список использованной литературы**

1. Мойся Д.Л. Експериментальне визначення маневреності автопоїзда з керуванням напівприцепом / Д.Л. Мойся// Вісник національного транспортного університету 2011р. – № 24. – С.48–52.
2. Мойся Д.Л. Анализ поворачиваемости двухзвенного автопоезда с управляемой осью полуприцепа. /Д.Л. Мойся// Наука и инновации в области сервиса автотранспортных средств и обеспечения безопасности дорожного движения: матер. междунар. науч.-практ. конф. / под ред. Б.Ю. Калмыкова [и др.]; Южно-Рос. гос. ун-т экономики и сервиса. – Шахты : ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2012. – 202 с.: ил.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике./ И. Рокар – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 288с.
4. Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин /Л.Г. Лобас. – Киев: Наук. думка, 1990. – 232 с.
5. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля./Д.Р. Эллис – М.: Машиностроение, 1975. – 216с.
6. Вербицкий В.Г. Бифуркации и устойчивость стационарных состояний связки катящихся упруго-деформированных тел./ В.Г. Вербицкий // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 101–106.
7. Nonlinear Dynamics of a Wheeled Vehicle - R. Andrejloski, J. Awrejcewicz (Springer, 2005) WW – 326р.
8. Постников М.М. Устойчивые многочлены. /М.М. Постников. – М.: Наука, 1981. – 176с.

Поступила в редакцию 02.05.2013 г.

#### **Мойся Д.Л.. Аналіз стійкості автопоїзда з керуваннями напівприцепом в кругових стаціонарних режимах**

Виконано аналіз стійкості стаціонарних режимів автопоїзда з керуванням напівприцепом. Стійкість прямолінійного режиму оцінена на основі критерію Рауса - Гурвіца. Пошук області стійкості проведений в просторі параметрів: поздовжня швидкість - передавальне відношення механізму управління віссю напівприцепа. Стійкість кругових режимів проаналізована на основі аналізу власних значень системи лінійного наближення.

**Ключові слова:** стійкість автопоїзда, критерій Рауса-Гурвіца, коловий режим.

#### **Moisia D.L. Stability analysis of train with driving semi-trailers in circular stationary mode**

The stability analysis of the road trains steady states with a controlled semi-trailer is made. Stability of linear regime is evaluated on the basis of Routh – Hurwitz criteria. Search of the stability area is produced in the parameters space: the longitudinal speed is gear ratio control of semi-trailer axle. The stability of circular modes is analyzed using the analysis of its own value of the linear approximation system.

**Keywords:** resistance train, Routh-Hurwitz criterion, the circular mode.