

УДК 539.3

**А.Е. Бабенко, профессор, д-р техн. наук**

**Я.И. Лавренко, ассистент**

*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,  
пр-т Победы, 37, г. Киев-56, Украина, 03056*

*babenko.ae@gmail.com, lavrenko.iaroslav@gmail.com*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАБОРАТОРНОЙ ЦЕНТРИФУГИ С УЧЕТОМ ЕЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ**

*Определены динамические характеристики центрифуги с учетом ее конструктивных особенностей, которые заключаются в том, что она является многомассовой системой закрепленной на упругих опорах. Показано отличие от предыдущих широко известных подходов, в которых центрифуга рассматривается как одномассовая конструкция и не учитываются конструктивные особенности закрепления. Для исследования ее движения использованы уравнения Лагранжа второго рода. Получены дифференциальные уравнения движения и определены особенности движения центрифуги.*

**Ключевые слова:** лабораторная центрифуга, ротор, уравнение движения.

**Введение.** Центрифуги используются для разделения смесей, состоящих из веществ разной плотности на фракции. Центрифуги, как правило, имеют большие скорости вращения до 15000 оборотов в минуту.

Определение динамических характеристик необходимо для определения сил действующих на конструкцию. Силы, действующие на центрифугу, возникают в результате ее вращательного движения и колебаний.

Центрифуги должны удовлетворять требованиям надежности и безопасности. Надежность обеспечивается необходимым сроком долговечности. Безопасность конструкции дополнительно обеспечивается за счет наличия защитного кожуха.

Для определения долговечности конструкции необходимо определение действующих сил. Поэтому необходимо изучение движения центрифуги и ее динамики. В силу высоких скоростей необходимо при определении динамических характеристик учитывать гироскопические эффекты.

**Актуальность.** Анализ предыдущих работ показал, что центрифуги рассматриваются как одномассовая система, но динамические характеристики, полученные для одномассовой системы, как показывают экспериментальные исследования, не соответствуют реальным характеристикам реальной конструкции. Анализ конструкции и экспериментальные исследования показали, что центрифуга есть многомассовой системой, поэтому описать ее динамические характеристики, используя модель одного тела, невозможно. В связи с этим существует необходимость рассмотрения системы, состоящей из нескольких тел.

Большинство существующих работ данной тематики носят индивидуальный несистемный характер. Уравнения движения получают для конкретных центрифуг, как правило, одномассовой [1, 2, 5], и потом выполняется их анализ. Отсутствие единого обобщенного подхода к анализу центрифуг произвольного вида затрудняет возможность определения их характеристик в общем случае.

Расчеты для одномассовой системы, как правило, основаны на использовании теоремы о кинетическом моменте. При рассмотрении многомассовых систем такой подход является достаточно сложным и громоздким. Естественным подходом к решению задач динамики многомассовых систем является использование уравнение Лагранжа второго рода.

**Целью работы** является определение динамических характеристик лабораторной центрифуги с учетом ее конструктивных особенностей, состоящих в том, что центрифуга рассматривается как многомассовая система закрепленная на упругих опорах, что соответствует конструкции.

При аналитическом описании движения твердого тела и гироскопов используются Декартова система координат и углы Эйлера-Крылова. Введем условно неподвижную или абсолютную систему координат  $\xi\eta\zeta$  с началом в некоторой точке вала.

Центрифуга состоит из цилиндра (ротор) 3, вращающегося вокруг вертикальной оси, который приводится во вращение электродвигателем, ротор (анкер) которого 2, сидит на том же самом валу, вал закреплен в корпусе, а корпус 1 закреплен на упругих опорах. Опоры сконструированы так, что позволяют центрифуге поворачиваться относительно неподвижных осей  $\xi, \eta$ , причем в силу конструкции жесткость при повороте относительно осей одинакова.

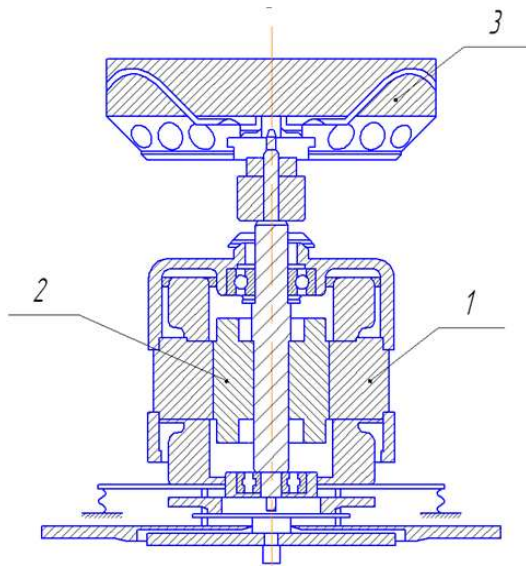


Рисунок 1 – Эскиз центрифуги Pico 21

Лабораторную центрифугу (рисунок 1) типа Pico 21 можно свести к эквивалентной системе с тремя телами (статора, анкера и ротора), одно из которых (статор) закреплен на упругих опорах. В качестве параметров определяющих конфигурацию соответствующей многомассовой системы можно выбрать следующие  $\xi_i, \eta_i, \psi_i, \theta_i, \varphi$ , где  $\xi_i, \eta_i$  – перемещение центра масс каждого тела,  $\psi_i, \theta_i$  – углы поворота сечения вала,  $\varphi$  – угол поворота относительно оси вращения, поскольку перемещения в направлении оси малы, то они не учитываются,  $i = 1, 2, 3$  – нумерация тел в системе, которая исследуется.

Из показанных трех тел вращаются только два (анкер и ротор), поэтому при дальнейших расчетах угловая скорость статора равна нулю, закручивание вала не учитывалось. Исследуемый механизм при сделанных допущениях имеет 14 степеней свободы.

Для решения задачи использовалось уравнение

Лагранжа второго рода  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , где  $L$  – функция Лагранжа,  $L = T - \Pi$ ,  $T$  – кинетическая энергия,  $\Pi$  – потенциальная энергия [3,4].

Разработанная методика была проверена на тестовых примерах. Для описания движения использован один из вариантов углов Эйлера-Крылова рис.2.

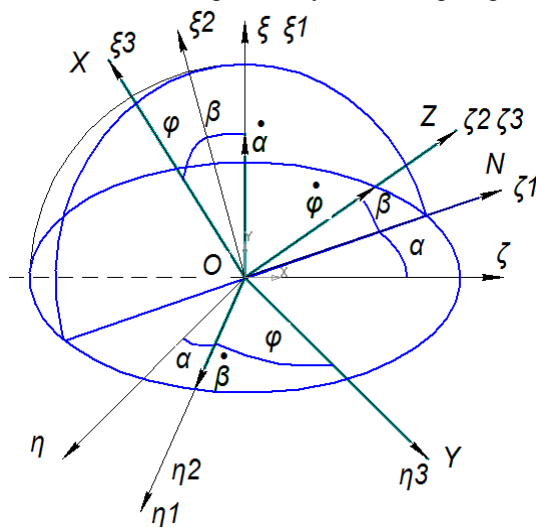


Рисунок 2 – Углы Эйлера-Крылова, которые определяют положение тела и угловые скорости тела

С помощью матрицы преобразования определены угловые скорости вращения в неподвижной системе координат

$$\omega_\xi = \dot{\alpha} + \dot{\varphi} \sin \beta,$$

$$\omega_\eta = -\dot{\varphi} \cos \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} \cos \beta \cos \alpha + \dot{\beta} \sin \alpha,$$

в то время  $\omega_\xi = \dot{\psi}$ ,  $\omega_\eta = \dot{\theta}$ ,  $\omega_\zeta = \dot{\gamma}$ , и системе связанной с телом

$$\omega_x = \dot{\alpha} \cos \varphi \sin \beta + \dot{\beta} \sin \varphi,$$

$$\omega_y = -\dot{\alpha} \sin \varphi \cos \beta + \dot{\beta} \cos \varphi,$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta.$$

Выражения угловых скоростей в главных осях

$$\omega_{\xi 2} = \dot{\alpha} \cos \beta,$$

$$\omega_{\eta 2} = \dot{\beta},$$

$$\omega_{\zeta 2} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta.$$

Выразим угловые скорости в главной плоскости  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\varphi}$  через углы в неподвижной системе координат  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\omega}$ . Поскольку оси вращения совпадают, то  $\dot{\alpha} = \dot{\psi}$  и соответственно в силу малости углов  $\alpha = \psi$ . Вектор  $\vec{B} = \vec{\beta}$  проецируем на оси  $\eta$  и  $\zeta$ . Проекции будут иметь вид  $\dot{\beta} \cos \alpha$  и  $\dot{\beta} \sin \alpha$  соответственно. То есть, в первом приближении  $\dot{\theta} = \dot{\beta}$ , и следовательно в силу малости углов  $\theta = \beta$ . Учитывая, что углы поворота малы, то синус угла заменяем углом, косинус – единицей, а произведение углов отбрасываем и линеаризуем задачу.

Как тестовые примеры рассмотрим расчетную схему центрифуги как одномассовую систему без учета податливости опор. Рассматривается консольно-закрепленный вал длиной  $l$ .

Кинетическая энергия для одномассовой системы запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{U}_C^2 \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\omega_{\xi 2R}^2 + \omega_{\eta 2R}^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot \omega_{\zeta R}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2$$

Через перемещения потенциальная энергия выражается в следующем виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (\xi \ \theta \ \eta \ \alpha) \cdot \|C_{ij}\| \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \eta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$\|C_{ij}\| = \|\delta_{ij}\|^{-1}$  - матрица жесткости,  $\|\delta_{ij}\|$  - матрица податливости

$$\|\delta_{ij}\| = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} l^3/3 & l^2/2 & 0 & 0 \\ l^2/2 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^3/3 & l^2/2 \\ 0 & 0 & l^2/2 & l \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия для консольной балки на свободном конце которой закреплен диск запишется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot EI \cdot \left( \frac{12}{l^3} \cdot \xi^2 - \frac{12}{l^2} \cdot \xi \theta + \frac{4}{l} \cdot \theta^2 + \frac{12}{l^3} \cdot \eta^2 - \frac{12}{l^2} \cdot \eta \alpha + \frac{4}{l} \cdot \alpha^2 \right).$$

Лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{12}{l^3} \cdot \xi^2 - \frac{12}{l^2} \cdot \xi \theta + \frac{4}{l} \cdot \theta^2 + \frac{12}{l^3} \cdot \eta^2 - \frac{12}{l^2} \cdot \eta \alpha + \frac{4}{l} \cdot \alpha^2 \right).$$

В силу того, что потенциальная энергия не зависит от угла  $\varphi$ , то угловая скорость относительно оси вращения  $z$ ,  $\omega_z = (\dot{\psi} \sin \beta + \dot{\varphi}) = F = const$ , является циклической координатой. Составляем систему дифференциальных уравнений

$$m \cdot \ddot{\xi} + \frac{2EI}{l^3} (6 \cdot \xi - 3 \cdot \theta \cdot l) = 0,$$

$$I_X \cdot \ddot{\theta} - I_P \cdot F \cdot \dot{\alpha} + \frac{2EI}{l^3} (-3 \cdot \xi \cdot l + 2 \cdot \theta \cdot l^2) = 0,$$

$$m \cdot \ddot{\eta} + \frac{2EI}{l^3} (6 \cdot \eta - 3 \cdot \alpha \cdot l) = 0,$$

$$I_X \cdot \ddot{\alpha} - I_P \cdot F \cdot \dot{\theta} + \frac{2EI}{l^3} (-3 \cdot \eta \cdot l + 2 \cdot \alpha \cdot l^2) = 0.$$

Поскольку рассматриваем периодические колебания, то перемещения ищутся в виде  $\xi = a \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\theta = b \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\eta = c \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\alpha = d \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ , где  $a, b, c, d$  - амплитуды, и подставляя в систему уравнений упростив при этом выражения, получим:

$$a \cdot \left( -m\lambda^2 + \frac{12EI}{l^3} \right) - b \cdot \frac{6EI}{l^2} = 0,$$

$$-a \cdot \frac{6EI}{l^2} + b \cdot \left( -I_X \lambda^2 + \frac{4EI}{l} \right) - d \cdot I_P \lambda \cdot F = 0,$$

$$c \cdot \left( -m\lambda^2 + \frac{12EI}{l^3} \right) - d \cdot \frac{6EI}{l^2} = 0,$$

$$-b \cdot I_P \lambda \cdot F - c \cdot \frac{6EI}{l^2} + d \cdot \left( -I_X \lambda^2 + \frac{4EI}{l} \right) = 0.$$

Приравняв к нулю определитель, получаем уравнение для определения частот:

$$\begin{bmatrix} -m\lambda^2 + \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & -I_X \lambda^2 + \frac{4EI}{l} & 0 & -I_P \lambda \cdot F \\ 0 & 0 & -m\lambda^2 + \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -I_P \lambda \cdot F & -\frac{6EI}{l^2} & -I_X \lambda^2 + \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = 0.$$

Решив уравнение для определения частот, получаем зависимость собственных частот от скорости вращения вала  $\lambda$ . В зависимости от направления вращения вала, собственные частоты могут как увеличиваться (прямая прецессия) так и уменьшаться (обратная прецессия). С увеличением частоты  $\lambda$  - разница частот между прямой и обратной прецессией увеличивается. Таким образом, для каждой степени свободы, мы имеем две резонансные частоты.

В качестве следующего тестового примера теперь исследуем влияние податливости опор на колебания конструкции. Расчет коэффициентов жесткости как и в предыдущем случае проводился аналитическим путем и приведен ниже.

$$\delta_{11} = \frac{1}{C_Q} + \frac{l^2}{C_M} + \frac{l^3}{3EI}, \quad \delta_{12} = \frac{l}{C_M} + \frac{l^2}{2EI}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{C_M} + \frac{l}{EI},$$

где  $C_M$  и  $C_Q$  – жесткости опор для угла поворота и прогиба, соответственно. В результате как и в предыдущем случае найдены матрицы податливости и жесткости.

Как и для предыдущей расчетной схемы, в силу того, что потенциальная энергия не зависит от угла  $\varphi$ , то угловая скорость вращения относительно оси  $z$ ,  $(\dot{\psi} \sin \beta + \dot{\varphi}) = F = const$ , является циклической координатой. Составляем систему дифференциальных уравнений

$$m \cdot \ddot{\xi} + 13756,81110 \cdot \dot{\xi} - 1511,276443 \cdot \theta = 0,$$

$$I_X \cdot \ddot{\theta} - I_P \cdot F \cdot \dot{\alpha} - 1511,276443 \cdot \xi + 941,2272820 \cdot \theta = 0,$$

$$m \cdot \ddot{\eta} + 13756,81110 \cdot \dot{\eta} - 1511,276443 \cdot \alpha = 0,$$

$$I_X \cdot \ddot{\alpha} - I_P \cdot F \cdot \theta - 1511,276443 \cdot \eta + 941,2272820 \cdot \alpha = 0.$$

Поскольку рассматриваем периодические движения, то  $\xi = a \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\theta = b \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\eta = c \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ ,  $\alpha = d \cdot \cos(\lambda \cdot t)$ , где  $a, b, c, d$  – амплитуды, получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений из условия существования нетривиальных решений и находим характеристические уравнения и собственные частоты.

На рисунке 3 приведены результаты расчетов и сравнительный анализ расчетной схемы с учетом упругих опор и без учета.

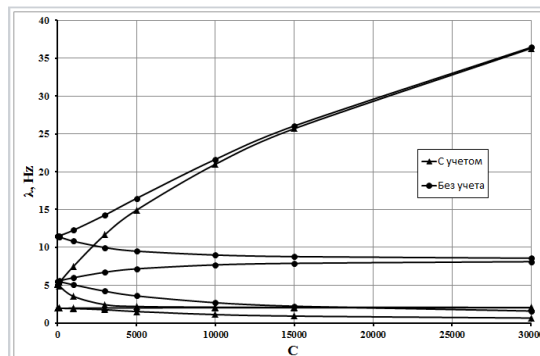


Рисунок 3 – Сравнительный анализ расчетных схем

Расчетная схема без учета податливости упругих опор дает завышенные частотные характеристики на 55 – 65 %, поэтому податливость опор необходимо учитывать.

Реальная лабораторная центрифуга (рисунок 1) типа Pico 21 может быть приведена к эквивалентной системе из трех тел (статора, анкера и ротора), одно из которых не вращается, поэтому выведем систему уравнений движения для лабораторной центрифуги Pico 21, которая имеет суммарно 14 степеней свободы для всех ее элементов.

Потенциальная энергия выражается через перемещения в следующем виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (\xi \ \theta \ \eta \ \alpha) \cdot \|C_{ij}\| \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \theta \\ \eta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

где  $\|C_{ij}\| = \|\delta_{ij}\|^{-1}$ , матрица жесткости.

Матрица податливости с размером  $12 \times 12$  имеет клеточный характер и распадается на две одинаковые в виде

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{61} & \dots & \delta_{66} \end{bmatrix}.$$

Расчет коэффициентов проводился аналитически и приведен в работе [6].

Для определения собственных частот разработана расчетная схема, которая приведена на рисунке 4, максимально отображает реальную исследуемую центрифугу. На приведенной схеме  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  – силы и моменты инерции статора, анкера и ротора, соответственно.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел, из которых система состоит, то есть  $T = T_1 + T_2 + T_3$ , где  $T_1$  – кинетическая энергия статора и корпуса центрифуги,  $T_2$  – кинетическая энергия ротору двигателя (анкера),  $T_3$  – кинетическая энергия ротора:

$$\begin{aligned} T_{1S} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2), \\ T_{2A} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2] \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\alpha}_2^2 \cos^2 \beta_2 + \dot{\beta}_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2} I_{PA} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \sin \beta_2)^2, \\ T_{3R} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\alpha}_3^2 \cos^2 \beta_3 + \dot{\beta}_3^2) + \\ &+ \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \sin \beta_3)^2. \end{aligned}$$

Как и в предыдущих расчетных схемах для решения задачи использовалось уравнение Лагранжа второго рода.

Взяв производные от функции Лагранжа, составим систему уравнений для определения собственных частот колебаний.

Для численного расчета использовались следующие параметры центрифуги:

$$\begin{aligned} m_R &= 0,507 \text{ кг}, m_A = 0,6 \text{ кг}, m_S = 2,4 \text{ кг}, l = 86 \text{ мм}, l_1 = 45 \text{ мм}, l_2 = 32 \text{ мм}, l_3 = 120 \text{ мм}, I_R = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \\ I_{R0} &= 1529 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_A = 93 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{AR} = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{PR} = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{S0} = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2. \end{aligned}$$

Результаты расчетов с разным диапазоном частот приведены ниже (рисунок 5).

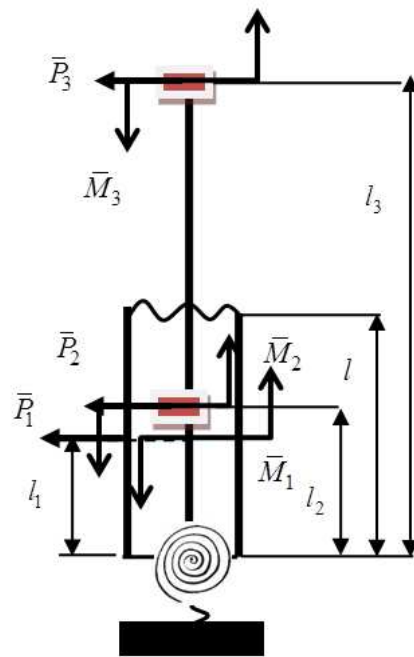


Рисунок 4 – Расчетная схема центрифуги

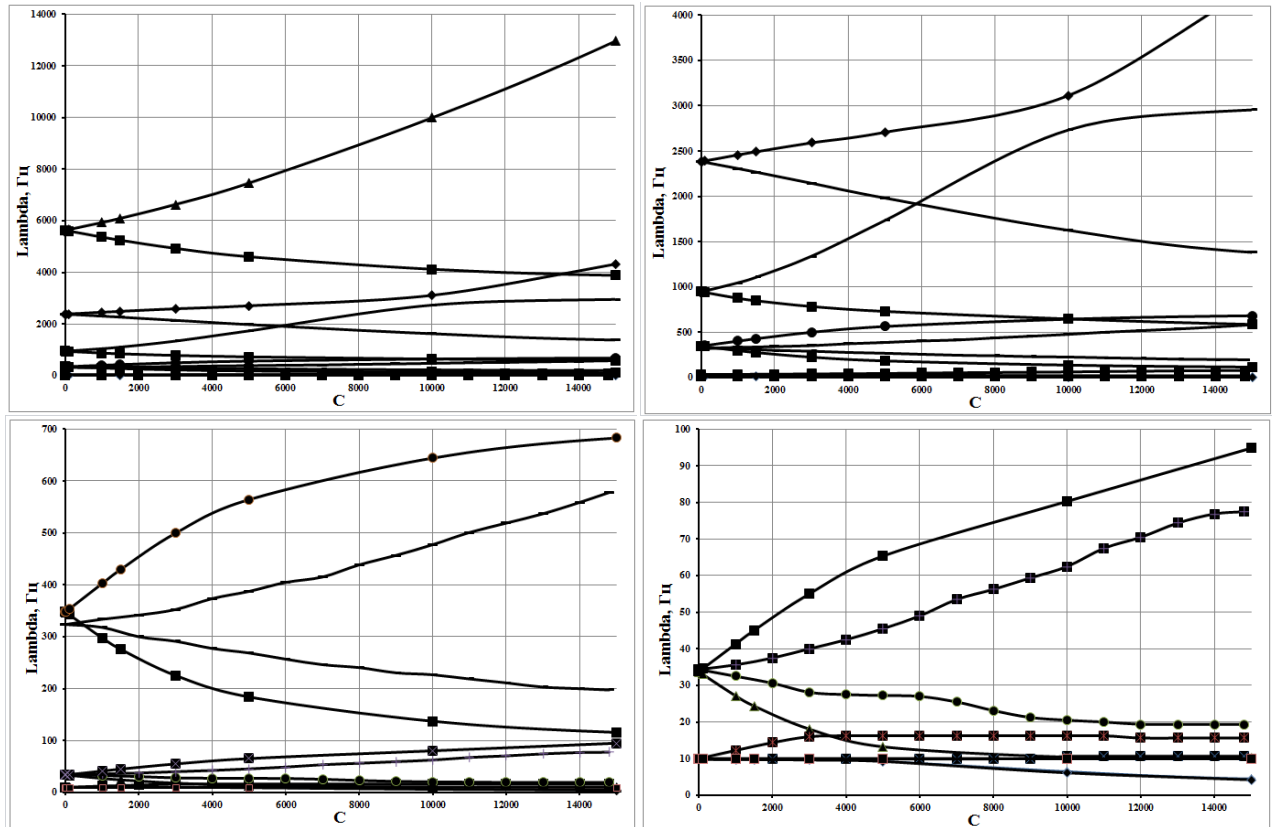


Рисунок 5 – Результаты определения зависимости собственных частот от частоты вращения

В результате построена диаграмма Кэмпбела, которая отображает зависимости собственных частот от частоты вращения, то есть влияние гироскопических эффектов на собственные частоты.

Расчетным путем при определении собственных частот наиболее близкими результаты были получены с помощью модели, которая учитывает степени свободы многомассовой системы, обусловленные осевой деформацией упругих опор, деформацией при сдвиге упругих опор, что соответствует реальной конструкции.

#### Выводы:

1. Показано, что существующие расчетные модели не достаточно точно описывают работу реальной конструкции центрифуги Pico 21. Предложена новая расчетная модель, которая отображает реальную конструкцию и динамическое поведение центрифуги Pico 21 с достаточной точностью. Дает возможность найти все основные частоты.

2. Аналитическим путем на основании использования уравнений Лагранжа второго рода и использования параметров модели, получены зависимости влияния гироскопических эффектов на собственные частоты колебаний центрифуги.

3. Разработана экспериментальная методика определения динамических параметров центрифуги. На ее основании определены жесткости опор и влияние скорости вращения на собственные частоты.

4. Показано, что расчетные и экспериментальные зависимости имеют достаточно высокую степень корреляции.

#### Библиографический список использованной литературы

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов проборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. – 84 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів авто балансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: 1961. – 824 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М.: Наука, 1974. – 431 с.
5. Гусаров А.А. Автоматическая балансировка роторов машин А.А. / Гусаров. – М.: Наука, 1979. – 306 с.

б. Бабенко А.Є. Вплив гіроскопічних ефектів на коливання валу центрифуги / А.Є. Бабенко, Я.І. Лавренко, М. Куренко // Вісник НТУУ “КПІ”, Машинобудування. — К.: НТУУ “КПІ”, 2012. — Вып. 65. — С. 166–174.

*Поступила в редакцію 24.01.2014 г.*

**Бабенко А.Є., Лавренко Я.І. Визначення динамічних характеристик лабораторної центрифуги з врахуванням її конструктивних особливостей**

Визначені динамічні характеристики центрифуги з врахуванням її конструктивних особливостей, які полягають в тому, що вона є багатомасовою системою закріпленою на пружних опорах. Показано відмінність від попередніх широко відомих підходів, в яких центрифуга розглядається як одномасова конструкція і не враховуються конструктивні особливості закріплення. Для дослідження її руху використані рівняння Лагранжа другого роду. Отримані диференціальні рівняння руху та визначені особливості руху центрифуги.

**Ключові слова:** лабораторна центрифуга, ротор, рівняння руху.

**Babenko A., Lavrenko Ia. Determination of the dynamic characteristics of a laboratory centrifuge in view of its structural features**

The dynamic characteristics of the centrifuge with design features that consist in fact that it is multi-mass system fixed on elastic support is determined. Contrast to the previous well-known approaches in which the centrifuge is seen as a single-mass construction and do not take into account the design features fixing is shown. In order to study its motion used Lagrange equations of the second kind. Differential equations of motion and the specific features the centrifuge motion defined.

**Keywords:** lab centrifuge, rotor, equation of motion.