

УДК 539.534.1

О.И. Литвинов, доцент, канд. техн. наук**В.И. Васылюк, ст. преподаватель, канд. техн. наук***Нежинский агротехнический институт НУБиПУ,**ул. Шевченко, 10, г. Нежин, Украина, 16600**E-mail: lytvynov-oleg@ukr.net**vasulykv@ukr.net***МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИВОДА СЛОЖНЫХ МАШИН**

Приведен метод построения эквивалентной динамической модели привода сложных машин, составлены и решены дифференциальные уравнения движения с учетом аппроксимированных рядами Фурье моментов на рабочих органах.

Ключевые слова: *машина, привод, система, надежность, угловая скорость, звено, трансмиссия, модель, механизм, комбайн, степень свободы, момент силы, момент инерции.*

Введение

Повышение энергонасыщенности технологических процессов и возрастание удельного веса инерционных нагрузок, пропорциональных квадрату скоростей, а также увеличение амплитуд колебаний сил внешних сопротивлений приводит к возникновению в упругих элементах машин (валы, опоры, рычаги) колебательных процессов, вносящих в нагрузки весьма значительные динамические добавки. В связи с этим существует настоятельная необходимость в учете реальных физических свойств материалов звеньев, образующих механизмы, а также таких факторов, как взаимовлияние процессов в приводных двигателях и технологического процесса в рабочей машине.

Постановка задачи. Обоснование динамической модели

В работе поставлена задача провести динамическое исследование механических систем механизмов привода, силовых линий сложных машин типа прицепных комбайнов, например, кукурузо-, кормоуборочных, привод которых осуществляется от вала отбора мощности энергетического средства через центральный редуктор комбайна, а затем разветвляется до различных рабочих органов.

Трансмиссия таких комбинированных машин является сложной разветвленной изгибно-крутильной динамической системой с большим числом распределенных и сосредоточенных масс, соединенных элементами, обладающими определенными упруго-инерционными характеристиками. Изучение таких систем связано с большими затруднениями математического характера. Однако практические задачи динамического исследования допускают возможности значительного упрощения эквивалентных моделей сложных машин.

Порядок преобразования реальной материальной системы и получение динамических характеристик элементов модели принят следующий. Прежде всего, определяются моменты инерции масс и крутильные податливости всех конструктивных элементов комбайнов, используя расчетно-экспериментальные методы. Податливости определяются в основном расчетным путем. В необходимых случаях учитывалась изгибная податливость валов и опор, которая приводилась к крутильной.

В результате проведенных операций была получена сложная разветвленная схема с большим числом масс различного порядка малости. Пренебрегая массами на порядок меньшими, объединяя те, жесткость связей между которыми на порядок выше других, и приводя систему к главному валу, исходя из условий равенства кинетической и потенциальной энергии, получаем систему с 8-10 степенями свободы, еще достаточно сложную для расчетов.

Дальнейшее уменьшение числа степеней свободы проводилось с учетом сохранения или несущественного отклонения частот низких тонов колебаний, которое, как показывают экспериментальные исследования, являются доминирующими при формировании динамических нагрузок.

При объединении двух соседних масс и понижении числа степеней свободы массы и податливости упрощенной системы определялись из условия:

$$I'_k = I_k + I_{k+1}; \quad e'_{k-1} = \frac{I_{k+1}}{I_k + I_{k+1}} e_k; \quad e'_k = \frac{I_k}{I_k + I_{k+1}} e_k;$$

В результате проведения перечисленных операций сложную материальную систему комбайнов представилось возможным свести к более простой трехмассовой разветвленной крутильно-колебательной системе с сохранением первых двух форм колебаний.

Эквивалентная схема представлена на рисунке 1, на котором имеются следующие обозначения:

I_1, I_2, I_3 – приведенные к валу двигателя моменты инерции двигателя и двух основных масс;

C_1, C_2, C_3 – приведенные к валу двигателя жесткости эквивалентных валов;
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_0$ – углы закрутки масс (обобщенные координаты системы) и центра разветвления;
 M_1, M_2, M_3 – приведенные к валу двигателя моменты внешних сил.

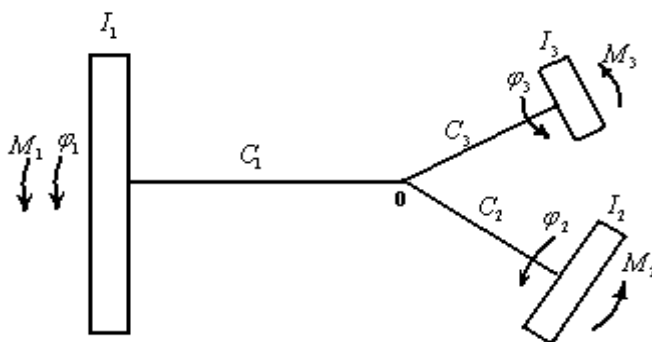


Рисунок 1 – Эквивалентная схема системы

Принято, что моменты двигателя изменяются в функции угловой скорости (моментная характеристика снята экспериментально).

$$M_1 = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n}, \quad (1)$$

где M_n – приведенный номинальный момент; ω_0, ω_n – угловая скорость холостого хода и угловая скорость при номинальном моменте.

Формализация модели. Общее решение дифференциальных уравнений

Исходная система дифференциальных уравнений, составленная методом Лагранжа во второй форме, имеет вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= M_1, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2(\varphi_2 - \varphi_0) &= M_2, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + C_3(\varphi_3 - \varphi_0) &= M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что относительные угловые перемещения масс $\varphi_1 - \varphi_0$, или деформации связей пропорциональны соответствующим силам упругости на эквивалентных валах $(\varphi_1 - \varphi_0)C_1 = M_{10}$, и выражая угловые перемещения φ_2 и φ_3 и их вторые производные через φ_1 , а также принимая во внимание условия сочленения моментов сил упругости в центре разветвления, получаем систему дифференциальных уравнений в новых обобщенных координатах – моментах сил упругости, целесообразность применения которых убедительно обоснована в работах С.Н. Кожевникова [1].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{\Gamma}{I_1} \omega_1 + \frac{M_{10}}{I_1} &= \frac{\Gamma}{I_1} \omega_0, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{20}}{C_2} + \frac{M_{20}}{I_2} &= \frac{M_2}{I_2}, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{30}}{C_3} + \frac{M_{30}}{I_3} &= \frac{M_3}{I_3}, \\ M_{10} + M_{20} + M_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3), устанавливающая зависимость между моментами сил упругости на отдельных участках приведенной системы и их вторыми производными, описывает поведение машинного агрегата при исследовании динамических процессов. Общее решение однородных уравнений будем искать в виде $A_j e^{\lambda t}$, где λ – ряд характеристических чисел, при которых уравнения обращаются в тождество, A_j – постоянные интегрирования, определяемые начальным состоянием системы.

Подставляя принятое решение в систему (3), в которой правые части положены равными нулю, приравнивая нулю и раскрывая детерминант, составленный из коэффициентов при искомым постоянным

A_j , получаем характеристическое уравнение пятого порядка, корни которого определяют собственные частоты системы

$$\left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \right] \left[\left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right] + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) = 0. \quad (4)$$

Проведенный анализ характеристического уравнения для более простых, в том числе и предельных случаев, позволил установить границы устойчивости решений системы, а также численно решить его с дальнейшим уточнением корней по методу итераций И. Ньютона [2], оценить влияние диссипации на величину последних.

Из пяти полученных корней уравнения первое, определяющее разгон системы, является действительным, а остальные четыре – комплексные, взаимно-сопряженные, определяющие формы колебания системы.

Приняв одну из амплитуд A_1 постоянной и выразив остальные через нее, получим передаточные коэффициенты $K_j^{(n)}(\lambda_n)$. Общее решение системы однородных дифференциальных уравнений представим в виде вектора

$$\vec{Y}_0(t) = \{\omega_1(t); M_{10}(t); M_{20}(t); M_{30}(t)\} \quad (5)$$

Частные решения дифференциальных уравнений получены с учетом правой части, представляющей функции внешних моментов. Принимая во внимание экспериментальные диаграммы сил, формирующие внешние моменты в системе, учтя их реальную периодичность, представляли внешнюю нагрузку в виде гармонического ряда Фурье. Используя принцип суперпозиции для линейных систем, находим реакцию системы на каждую гармоническую составляющую, суммируя затем полученные результаты. Частные решения могут быть представлены в виде

$$\vec{Y}_0(t) = \begin{pmatrix} M_{10}(t) \\ M_{20}(t) \\ M_{30}(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = M_2^0 e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_k) \\ K_2(\lambda_k) \\ K_3(\lambda_k) \\ K_\omega(\lambda_k) \end{pmatrix} + M_3^0 e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_3) \\ K_2(\lambda_3) \\ K_3(\lambda_3) \\ K_\omega(\lambda_3) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Анализ характеристического уравнения

Представляет определенный интерес провести анализ характеристического уравнения (4).

1. Из рассмотрения уравнения (4) выясняется, что его можно записать в виде

$$A(a+b) + \sqrt{ab}B\sqrt{ab} = 0.$$

Из обоих слагаемых уравнения можно вынести что-то общее, если $a=b$. Это вытекает из известного неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, в котором знак равенства правомочен только при $a=b$. Таким образом, переходя к принятым в уравнении (4) обозначениям, имеем

$$\left(\frac{\lambda^2}{C^2} + \frac{1}{I_2} \right) = \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0.$$

Это означает, что равенство возможно при $\frac{C_2}{I_2} = \frac{C_3}{I_3}$, т.е. равенстве или пропорциональности масс

и жесткостей, следовательно, и равенстве цикловых частот $\omega_0 = \sqrt{-\frac{C_2}{I_2}} = \sqrt{-\frac{C_3}{I_3}}$, откуда $\lambda = \pm i\omega_0$.

В уравнении (4) a и b можно вынести за скобки, внутри которых останется уравнение третьего порядка

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) \left\{ \left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \right] \left[\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right] \right\} = 0. \quad (7)$$

Часть уравнения (7), что в фигурных скобках, наиболее просто и точно решается при $I_1 = I_2 = I_3 = I$ и при $C_1 = C_2 = C_3 = C$. При этом оно преобразуется таким образом

$$\lambda^3 + \frac{\Gamma}{I}\lambda^2 + \frac{C}{I}\left(\lambda + \frac{\Gamma}{3I}\right) = 0. \quad (8)$$

Можно заметить, что ход решения (8) зависит от величины отношения $\frac{C}{I} \gg 1$. При $\frac{C}{I} \rightarrow 0$ получаем $\lambda = -\frac{\Gamma}{I}$, а при $\frac{C}{I} \rightarrow \infty$ – из последнего слагаемого имеем $\lambda = -\frac{\Gamma}{3I}$, т.е. корни уравнения (8) лежат в пределах $-\frac{\Gamma}{3I} < \lambda < -\frac{\Gamma}{I}$. Для решения уравнения (8) приведем его к безразмерному виду, введя обозначения: $\lambda = \frac{\Gamma}{I}x$ и $\alpha = \frac{CI}{\Gamma^2}$, и тогда

$$x^3 + x^2 + \alpha\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) решается по известной формуле Кардано, положив $y = x + \frac{1}{3}$. Тогда

$$y^3 + \frac{3\alpha-1}{3}y + \frac{2}{27} = 0. \quad (10)$$

Обозначая $\frac{3\alpha-1}{3} = 3p$ и $\frac{2}{27} = 2q$, получим

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Если дискриминант уравнения $D = q^2 + p^3 = 3^{-4}\alpha[3\alpha^2 - 3\alpha + 1] > 0$, больше нуля, как в данном случае, то имеем один действительный и два комплексных корня:

$$y_1 = U + V; \quad y_2 = -\frac{1}{2}(U + V) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V); \quad y_3 = -\frac{1}{2}(U + V) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V);$$

где $U = \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}$; $V = \sqrt[3]{-\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}$. Для проверки положим $\alpha \rightarrow 0$, тогда $V = U = -\frac{1}{3}$; $y_1 = -\frac{2}{3}$; $x_1 = y - \frac{1}{3} = -1$.

При $\alpha \rightarrow \infty$: $U \rightarrow -V$; $U + V \rightarrow 0$; $y_1 = 0$; $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Интересно проследить за ходом суммы $U + V$ в функции α , которая формирует значение корней характеристического уравнения. При увеличении α значение $U \rightarrow \sqrt{\alpha}$, но всегда остается ниже \sqrt{D} , а значение $U \rightarrow -\sqrt{\alpha}$, оставаясь ниже $-\sqrt{D}$. Сумма $U + V$ всегда будет отрицательной, чем определяется устойчивость решения системы.

Предположим, что жесткости системы велики $C_j \rightarrow \infty$. Пренебрегая в уравнении (4) величинами $\frac{\lambda^2}{C_j}$, получим

$$\frac{\lambda}{I_1}\left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}\right) + \frac{1}{I_2 I_3}\left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1}\right) = 0. \quad (11)$$

Откуда следует $\lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}$.

Допустим далее, что только $C_{2,3} \rightarrow \infty$, тогда $I_2 + I_3 = I$, и полученное уравнение третьего порядка будет иметь вид, соответствующий двухмассовой модели нашей системы

$$\left[\frac{\lambda^3}{C_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \cdot \frac{\Gamma}{I_1}\right] + \left[\lambda\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I}\right) + \frac{\Gamma}{I_1 I}\right] = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (12) также вытекает, что при $C_1 \rightarrow \infty$: $\lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}$.

При малых $C_1 \rightarrow \infty$ в уравнении (12) будут велики два первых слагаемых, в связи с чем имеем:

$$\frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \approx 0; \quad \lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1}.$$

Таким образом, при слабой связи C_1 скорость нарастания угловой частоты двигателя определяется только его характеристикой Γ и динамическим параметром I_1 . Из последнего можно заключить, что первый малый корень λ_1 определяет скорость разгона системы, он всегда должен быть действительным и больше нуля.

Допустим далее, что надо найти корни $|\lambda| \gg \frac{\Gamma}{I_1}$. Тогда заменим $\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \rightarrow \lambda$ и частотное уравнение (4) сведется к выражению

$$\left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (13) является биквадратным и легко решается в числах. Проведенный анализ характеристического или частотного уравнения (4) дал возможность разработать схему решения уравнения пятого порядка. При значительном различии частоты разгона двигателя $|\lambda_1| = \frac{\Gamma}{I_1} \approx 10 \div 15 c^{-1}$ и парциальных частот $\sqrt{\frac{C_j}{I_j}} \approx 50 \div 70 c^{-1}$ принимаем такую схему решения, при которой сначала определяем приближенно значения корня λ_1 из уравнения (11), корней λ_{2-5} из биквадратного уравнения (13), а затем уточняем их значения по методу итераций Ньютона [2].

Дальнейшая проверка уточненных корней показала достаточную точность произведенных вычислений

$$(-1)^5 \prod_1^5 \lambda_j = \frac{a_6}{a_1}.$$

В нашей работе подтверждается отмеченный в литературе факт, что при наличии в системе k масс характеристическое уравнение с моментом двигателя в функции угловой частоты будет иметь порядок $2k - 1$ (для нашего случая он равен пяти: нечетный порядок). Подтверждается и то, что один из корней является действительным числом и меньшим нуля, а остальные – комплексные с отрицательной вещественной частью.

На первый взгляд противоречивым представляется то обстоятельство, что корни λ_{2-5} в системе без учета демпфирования являются не чисто мнимыми, а комплексными с малою действительной частью, которая появилась лишь в результате уточнения корней методом итераций. Поясним это на примере.

Представим, что имеем агрегат с двигателем, момент инерции которого I , движущий момент – M в функции угловой скорости, как в нашем случае, и вал с жесткостью C , который резко застопорили. Дифференциальное уравнение вращения будет иметь вид:

$$I\ddot{\varphi} = M - C\varphi. \quad (а)$$

Введя функцию момента двигателя $M = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n} = \Gamma(\omega_0 - \omega_1) = \Gamma(\omega_0 - \dot{\varphi})$, получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Gamma}{I} \dot{\varphi} + \frac{C}{I} \varphi = \frac{\Gamma}{I} \omega_0. \quad (б)$$

Решение характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \frac{\Gamma}{I} \lambda + \frac{C}{I} = 0 \quad (в)$$

получим в форме

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\Gamma}{2I} \pm i \sqrt{\frac{C}{I} - \left(\frac{\Gamma}{2I} \right)^2}. \quad (г)$$

Обозначая $\frac{\Gamma}{2I}$ через δ , $\frac{C}{I}$ через ω_0 , получаем $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_1$, где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (б), будет таковым:

$$\varphi = A_{1,2} e^{(-\delta \pm i\omega_1)t}. \quad (д)$$

Вид решений (д) свидетельствует о том, что в системах, описываемых уравнением (б), имеют место затухающие колебания, декремент которых зависит от величины действительной части каждого из корней. Как уже отмечалось выше, для получения частных решений линейной динамической системы необходимо найти ее отклик на внешний момент, то есть получить амплитуды и фазы наведенных моментов.

Используя принцип суперпозиции, искали сначала реакцию системы на один внешний момент M_2 , положив $M_3 = 0$, потом, аналогично, – на M_3 , сложив оба результата. Весьма существенным при этом представляется правильное аналитическое выражение моментов внешних сил.

Например, анализ осциллограммы момента сил упругости на третьем валу показал, что его можно с достаточной для практики точностью представить в виде

$$M_3 = M_{cp} + M_3^0 \sin \omega t,$$

где $\omega = 100$ рад/с – реальная частота процесса; $M_{cp} = 150$ Нм – среднее значение постоянной составляющей; $M_3^0 = 100$ Нм – максимальная амплитуда синусоиды.

Для обеспечения возможности аналитического представления внешнего момента M_2 , что работает на измельчающем аппарате кукурузоуборочного комбайна, был проделан специальный эксперимент.

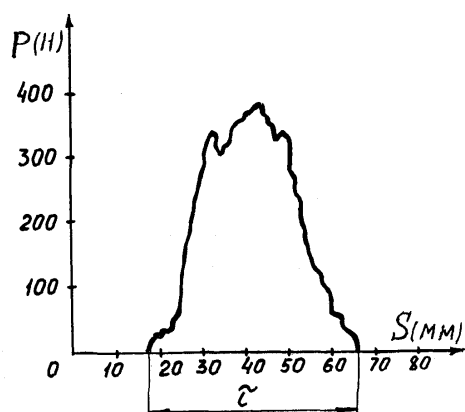


Рисунок 2 – Диаграмма сил резания стеблей кукурузы

На испытательной машине с помощью специального приспособления на регистрирующем устройстве были получены диаграммы сил резания стеблей кукурузы (рисунок 2), которые позволили установить, что их кривые могут быть с достаточным приближением аппроксимированы синусоидальной полуволной.

Принимая во внимание реальную конструкцию ротора измельчителя и учитывая технологическую схему работы аппарата, нетрудно было убедиться, что внешняя нагрузка при измельчении носит импульсный характер. Продолжительность синусоидального импульса τ в 5-6 раз (в зависимости от толщины перерабатываемого материала) меньше периода его повторения T .

В целях использования принципа суперпозиции для линейных систем разложим синусоидальный импульс в гармонический ряд Фурье на длине всего периода T . Для этого представим функцию момента на измельчителе комбайна выражением

$$f(t) = A \sin \frac{\pi}{\tau} t, \quad \text{при } 0 < t < \tau;$$

$$f(t) = 0, \quad \text{при } \tau < t < T,$$

где A – амплитудное значение момента.

Гармонический ряд в общем виде может быть представлен так

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_k \cos K \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin K \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (14)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos K \frac{2\pi}{T} t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin K \frac{2\pi}{T} t dt, \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t dt.$$

Определим неизвестные коэффициенты Фурье a_k, b_k и постоянный член a_0 . Для этой цели интегрируем выражение

$$a_k = \frac{2A}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \cos K \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (15)$$

которое при использовании табличного интеграла после ряда преобразований будет иметь вид

$$a_k = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \left(1 + \cos K \frac{2\pi}{T} \tau\right), \quad (16)$$

$$b_k = \frac{2}{T} A \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \sin K \frac{2\pi}{T} t dt = 2 \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \sin K \frac{2\pi}{T} \tau. \quad (17)$$

Свободный член имеет вид

$$a_0 = \frac{2}{T} A \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t dt = \frac{2}{T} A \frac{\tau}{\pi} (1 - \cos \pi) = 4 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T}. \quad (18)$$

В окончательной форме ряд представляется выражением

$$S(t) = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} + 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \left[\left(1 + \cos K \frac{2\pi}{T} \tau\right) \cos K \frac{2\pi}{T} t + \sin K \frac{2\pi}{T} \tau \sin K \frac{2\pi}{T} t \right]. \quad (19)$$

Для суждения о сходимости ряда проведем оценку убывания его членов. Рассмотрим выражения, формирующие убывание:

$$b_k^1 = \frac{\sin k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}, \quad a_k^1 = \frac{1 + \cos k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}. \quad (20)$$

Их можно представить как функции аргумента $\alpha = k \frac{2\tau}{T}$ $a_k^1 = \frac{1 + \cos \pi \alpha}{1 - \alpha^2}$; $b_k^1 = \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2}$.

Определим, где эти коэффициенты станут малыми: $\alpha = \left\{ \frac{2\tau}{T} \rightarrow \infty \right\}$.

При $\alpha = 0 \Rightarrow a_k^1 = 2$; $b_k^1 = 0$. При $\alpha = 1 \Rightarrow a_k^1 = \frac{0}{0}$; $b_k^1 = \frac{0}{0}$.

Раскроем неопределенности типа $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталья, взяв производные:

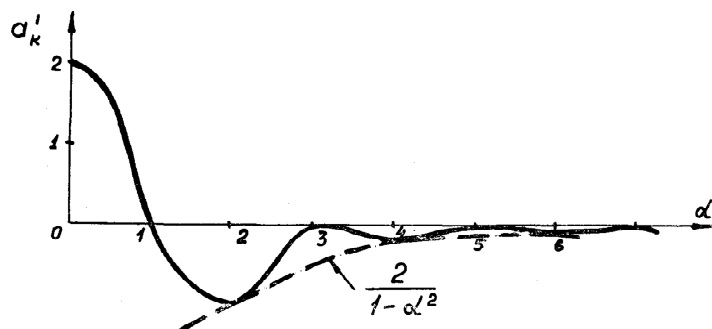
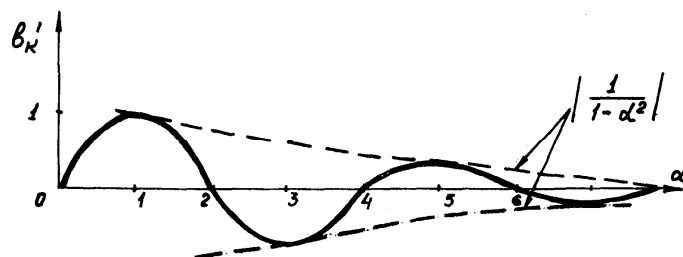
$$a_k^1(1) = \frac{-\pi \sin \pi \alpha}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} = 0, \quad b_k^1(1) = \frac{\pi \cos \pi \alpha}{-2\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Как можно видеть (рисунки 3 и 4), убывание величин амплитуд членов a_k^1 пропорционально выражению $\frac{2}{1 - \alpha^2}$, а для b_k^1 – выражению $\left(\frac{1}{1 - \alpha^2} \right)$.

Если принять точность до 10%, то $\frac{1}{1 - \alpha^2} \cong \frac{1}{\alpha^2} = 0,1$. Тогда $\alpha = 3,16$. Отсюда $k = \frac{\alpha T}{2\tau} \approx 8$, где $\frac{T}{\tau} = 5$.

Таким образом, число кратных гармоник, которые надо взять при заданной точности, должно быть не менее восьми.

Проведя расчет реакции системы на момент M_3 и на каждую из гармонических составляющих ряда Фурье для внешнего момента сопротивления M_2 , получаем частные решения дифференциальных уравнений для искомых величин $\omega_1, M_{10}, M_{02}, M_{03}$. Складывая частные решения с общим решением однородных уравнений, получаем общее решение неоднородных дифференциальных уравнений.

Рисунок 3 – Характер убывания коэффициента a_k Рисунок 4 – Характер убывания коэффициента b_k

Заключение

В работе подтверждается известный факт, что при наличии в системе k масс характеристическое уравнение с моментом двигателя в функции угловой частоты будет иметь порядок $2k-1$ (для данного случая он равен пяти – нечетный порядок). Подтверждается и то, что один из корней является действительным числом и меньшим нуля, а остальные – комплексные с отрицательной вещественной частью.

Появление в уравнениях (3) члена, пропорционального угловой скорости $\dot{\phi}$, является формальным признаком демпфирования системы. В исследуемой системе таким признаком служит инерционно-силовая характеристика двигателя Γ/I_1 . Относительная малость этой величины влечет за собой и малость действительной части при комплексных корнях, которая появилась лишь в результате уточнения по методу итераций.

Таким образом, в описываемой системе имеют место затухающие колебания, декремент которых зависит от величины действительной части каждого из комплексных корней.

Библиографический список использованной литературы

1. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах / С.Н. Кожевников. — К.: Техника, 1986. — 362 с.
2. Бронштейн И.Н. Справочник по высшей математике. / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. — М.: Физматгиз, 1987. — 458 с.

Поступила в редакцию 29.03.2013 г.

Литвинов О.І., Василюк В.І. Моделювання пружних коливань приводу складних машин

Розглядається метод побудови еквівалентної динамічної моделі приводу складних машин, складені і розв'язані диференціальні рівняння руху з урахуванням апроксимованих рядами Фур'є моментів на робочих органах.

Ключові слова: машина, привід, система, надійність, кутова швидкість, ланка, трансмісія, модель, механізм, комбайн, степінь вільності, момент сили, момент інерції.

Lytvynov O.I., Vasulyk V.I. Modeling of elastic vibration of drive complex machines

A method for constructing the equivalent dynamic drive model of complex machines was derived and the differential equation of motion taking into account of moments approximated by Fourier on working bodies were composed and solved.

Keywords: machine, a drive, system, reliability, angular speed, a part, transmission, model, the mechanism, a combine, a degree of freedom, the moment of force, the moment of inertia.