

УДК 519.3:65.011. 56:621. 865.8

А.И. Бохонский, Н.И. Варминская

Севастопольский национальный технический университет

Студгородок, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ВОССТАНОВЛЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ КАК КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

На основе реверсионного принципа оптимальности исследован класс управлений (ускорений в виде непрерывных дифференцируемых функций) переносным движением упругодеформируемых объектов.

Ключевые слова: *переносное и относительное движения, оптимальное управление, упругодеформируемый объект.*

Введение

В [1] исследованы колебания деформируемых систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы в процессе оптимального переносного движения из начального в конечное состояния абсолютного покоя. Показано, что применение кососимметричных управлений позволяет проектировать манипуляторы минимальной массы (конечной малой жесткости) для транспортирования объектов без потери точности позиционирования и производительности рабочих операций на технологических ячейках сборки.

В [2] обращено внимание на процедуру полного восстановления функционалов (от функции до функционала – реверсионное исчисление) как критериев оптимальности переносного движения объектов и оптимального деформирования упругих систем.

В [3] исследовано оптимальное перемещение нежестких объектов не только в приложении к сборочным операциям с участием манипуляторов, но и в случае монтажа крупногабаритных нежестких конструкций в состоянии невесомости. Выполненный объем работ не исключает дальнейших обобщений результатов.

Цель исследований – использование реверсионного принципа оптимальности при обосновании управлений переносным движением упругодеформируемых объектов.

Кососимметричным оптимальным управлением на временном интервале $T \geq t \geq 0$, где T – общее время движения объекта, называется функция $U_e(t)$ ускорения переносного движения, которая подчинена условиям:

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt = - \int_{T/2}^T U_e(t) dt, \quad |U_e(0)| = |U_e(T)|. \quad (1)$$

Реверсионный принцип оптимальности означает, что *аналитической кососимметричной функции ускорения объекта $U_e(t)$ при оптимальном переносном движении соответствует уравнение Эйлера*

$$f(U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e, \ddot{\ddot{U}}_e, \dots) = 0 \quad (2)$$

характерного функционала-критерия

$$\int_0^T F(U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e, \dots) dt, \quad (3)$$

принимаящего стационарное значение.

Два класса управлений переносным движением деформируемых объектов.

Непрерывная *непериодическая* функция ускорения $U_e(t)$ на временном интервале $T \geq t \geq 0$ обеспечивает стационарное значение функционалу

$$I = \int_0^T [U_e^{(n)}]^2 dt, \quad (4)$$

где $\langle n \rangle$ – порядок производной ($n = 1, 2, 3, \dots$) и для этого функционала является решением уравнения Эйлера вида:

$$\frac{d^{(2n)} U_e}{dt^{(2n)}} = 0. \quad (5)$$

Периодическая функция ускорения $U_e(t)$ на временном интервале $T \geq t \geq 0$ обеспечивает стационарное значение функционалу (3), являясь решением уравнения Эйлера (2).

Примеры оптимального управления (ускорения) в виде непрерывной непериодической функции

Решением дифференциального уравнения Эйлера (5) является полином степени $2n - 1$, который, после определения коэффициентов, факторизуется.

Пример 1. Наиболее простой пример, известный по многим литературным источникам [4]: задан критерий оптимальности

$$I_1 = \int_0^T U_e^2 dt, \quad (6)$$

уравнение движения

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e. \quad (7)$$

Для функционала (6) с учетом (7) уравнение Эйлера:

$$\frac{d^4 S_e}{dt^4} = 0. \quad (8)$$

Для краевых условий

$$\text{при } t=0, \quad S_e(0) = 0, \quad \dot{S}_e(0) = 0; \quad \text{при } t=T, \quad S_e(T) = L, \quad \dot{S}_e(T) = 0, \quad (9)$$

где L – максимальное перемещение, после определения констант управление принимает вид:

$$U_e(t) = \frac{6L}{T^3}(T - 2t). \quad (10)$$

Пример 2. В случае функционала как критерия оптимальности

$$I_2 = \int_0^T [\ddot{U}_e(t)]^2 dt \quad (11)$$

уравнение Эйлера

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12)

$$U_e(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 находятся при использовании краевых условий и условий косо́й симметрии (1):

$$\text{при } t=0, \quad U_e(0) = a; \quad \text{при } t=T/2, \quad \left. \frac{dU_e}{dt} \right|_{t=T/2} = 0; \quad \text{при } t=T, \quad U_e(T) = -a;$$

$$\int_0^{T/2} U_e(t) dt + \int_{T/2}^T U_e(t) dt = 0; \quad (13)$$

дополнительное условие $S_e(T) = L$, где S_e – перемещение объекта.

После факторизации полинома получено выражение для управления:

$$U_e(t) = \frac{10L}{T^5}(T - 2t)^3. \quad (14)$$

Пример 3. Если принять следующий критерий оптимальности

$$I_3 = \int_0^T [\ddot{\ddot{U}}_e(t)]^2 dt, \quad (15)$$

то для него уравнение Эйлера

$$\frac{d^6 U_e}{dt^6} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (16), как и ранее, ищется в виде полинома

$$U_e(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 t^4 + C_6 t^5. \quad (17)$$

Помимо предыдущих краевых условий (13) для определения производных постоянных в (17) использовались новые условия, которые не нарушали косо́й симметрии управления, т.е.

$$\left. \frac{dU_e}{dt} \right|_{t=T/2} = 0, \quad \left. \frac{d^3 U_e}{dt^3} \right|_{t=T/2} = 0. \quad (18)$$

После преобразований получено управление

$$U_e(t) = \frac{14L}{T^7} (T - 2t)^5. \quad (19)$$

Примеры оптимального управления (ускорения) в виде непрерывной периодической функции

Пример 4. Для критерия оптимальности

$$I_1 = \int_0^T F[U_e, \dot{U}_e] dt = \int_0^T \left[\frac{\dot{U}_e^2}{2} - \frac{p^2 U_e^2}{2} \right] dt = \min, \quad (20)$$

где $p = \text{const}$, уравнение Эйлера $\frac{\partial F}{\partial U_e} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{U}_e} = 0$.

Функционалу (20) соответствует уравнение

$$\frac{d^2 U_e}{dt^2} + p^2 U_e = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21):

$$U_e(t) = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt. \quad (22)$$

С учетом краевых условий

при $t=0$, $U_e(0)=a$; $\dot{U}_e(0)=0$, $S_e(T)=L$ получено:

$$U_e(t) = a \cos pt, \quad (23)$$

где $a = -\frac{Lp^2}{\cos pT - 1}$; L – максимальное перемещение. С целью устранения деления на нуль в выражении для амплитудного значения управления принято $T = \pi/p$. При $p = 2\pi$ следует

$$U_e(t) = \frac{Lp^2}{2} \cos 2\pi t. \quad (24)$$

Перемещение и скорость после интегрирования выражения для ускорения с учетом $S_e(0)=0$ и $V_e(0)=0$ записываются так:

$$S_e(t) = \frac{a}{p^2} (\cos pT - \cos pt) + L; \quad V_e(t) = \frac{a}{p} \sin pt. \quad (25)$$

Пример 5. Функционалу

$$I_2 = \int_0^T \left[9p^4 \frac{U_e^2}{2} - 10p^2 \frac{\dot{U}_e^2}{2} + \frac{\ddot{U}_e^2}{2} \right] dt \quad (26)$$

следует уравнение Эйлера

$$\frac{d^4 U_e}{dt^4} + 10p^2 \frac{d^2 U_e}{dt^2} + 9p^4 U_e = 0. \quad (27)$$

Одним из решений уравнения (4) является

$$U_e(t) = a \cos^3 pt, \quad (28)$$

где $a = \text{const}$, $p = \text{const}$. после двукратного интегрирования управления (28) с учетом краевых условий (при $t=0$, $S_e(0)=0$, $V_e(0)=0$; при $t=T$, $S_e(T)-L=0$) получены значения произвольных постоянных и параметра a :

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 7L/d; \quad a = -9Lp^2/d,$$

где $d = \cos^3 pT + 6 \cos pT - 7$. Деление на нуль устраняется в случае $p = \pi/T$ и тогда $a = 9Lp^2/14$.

Выражения для ускорения, скорости и перемещения объекта записываются так:

$$U_e(t) = \frac{9L\pi^2}{14T^2} \cos^3\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad V_e(t) = \frac{3L\pi}{14T} \left[\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right],$$

$$S_e(t) = -\frac{3L}{14} \left[\frac{1}{3} \cos^3\left(\frac{\pi t}{T}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right]. \quad (29)$$

В момент времени $t=T$, $S_e(T)=L$, $V_e(T)=0$. С отключением управления в этот момент ($t \geq T$) наступает переносный покой объекта.

Пример 6. Функционалу

$$I = \int_0^T F[U_e, \dot{U}_e, \ddot{U}_e, \ddot{\ddot{U}}_e] dt \quad (30)$$

соответствует уравнение Эйлера

$$F_{U_e} - \frac{d}{dt} F_{\dot{U}_e} + \frac{d^2}{dt^2} F_{\ddot{U}_e} - \frac{d^3}{dt^3} F_{\ddot{\ddot{U}}_e} = 0. \quad (31)$$

В случае заданного критерия

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^T [225p^6 U_e^2 - 259p^4 \dot{U}_e^2 + 35p^2 \ddot{U}_e^2 - \ddot{\ddot{U}}_e^2] dt \quad (32)$$

однородное уравнение Эйлера функционал (32)

$$\frac{d^6 U_e}{dt^6} + 35p^2 \frac{d^4 U_e}{dt^4} + 259p^4 \frac{d^2 U_e}{dt^2} + 225p^6 U_e = 0. \quad (33)$$

Решение уравнения (33), которое является управлением

$$U_e(t) = a \cos^5 pt + b \sin^5 pt,$$

где $a, b, p = \text{const}$. При известных краевых условиях

$$t=0, \quad S_e(0)=0, \quad V_e(0)=V_0; \quad t=T, \quad S_e(T)=L, \quad V_e(T)=0, \quad (34)$$

где V_0 – начальная скорость, условия исключения деления на нуль $p = \pi/2T$, решению в виде $U_e(t) = a \cos^5 pt$ соответствуют перемещение и скорость:

$$S_e(t) = \frac{15}{8} V_0 \left[\frac{2T}{25\pi} \cos^5\left(\frac{\pi t}{2T}\right) + \frac{8T}{45\pi} \cos^3\left(\frac{\pi t}{2T}\right) + \frac{16T}{15\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \right] + V_0 t - \frac{149TV_0}{60\pi},$$

$$V_e(t) = -\frac{15V_0}{8} \left[\frac{1}{5} \cos^4\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) + \frac{4}{16} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \right],$$

$$U_e(t) = -\frac{15\pi V_0}{16T} \cos^5\left(\frac{\pi t}{2T}\right). \quad (35)$$

За время $t=T$ скорость движущегося объекта уменьшается от $V_e(0)=V_0$ до $V_e(T)=0$, т.е. наступает покой в переносном движении.

Таким образом, среди непрерывных *периодических* функций (ускорений) наиболее характерными управлениями являются $U_e(t) = a \sin^{2n-1} pt$ либо $U_e(t) = a \cos^{2n-1} pt$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, а среди непрерывных *непериодических* функций

$$U_e(t) = a \frac{(T-2t)^{2n-1}}{T^{2n-1}}, \text{ где } n = 1, 2, 3.$$

Рассмотренные управления (либо их модификации) могут использоваться для перемещения объекта из исходного в конечное состояние покоя, оптимального разгона либо торможения.

Поведение упругой системы при ее оптимальном движении

В относительном движении (колебания) упругой системы с одной степенью свободы характер колебаний оценивался по решению дифференциального уравнения (без учета сопротивления):

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -U_e(t), \quad (36)$$

где $k^2 = c/m$; k – частота собственных колебаний; c – коэффициент жесткости; m – сосредоточенная перемещаемая масса. В момент $t=T$ относительный покой наступает, если выполняются моментные соотношения [5]

$$x_r(T) = 0, \quad \dot{x}_r(T) = 0, \quad (37)$$

представляющие собой существенно нелинейные уравнения, из которых находились общее время оптимального переносного движения. Трудоемкость поиска времени движения объекта зависит от вида управления $U_e(t)$.

С целью оценки влияния относительного движения на переносное объект рассматривается как система с двумя степенями свободы (в качестве обобщенных координат приняты S_e и x_r).

С использованием уравнений Лагранжа после преобразований получены уравнения:

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} + \frac{m}{m+m_1} x_r = U_1, \quad \frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -\frac{d^2 S_e}{dt^2}, \quad (38)$$

где $\frac{d^2 S_e}{dt^2} = U_e(t)$, m_1 – масса в основании перемещаемого осциллятора; U_1 – управление, которое необходимо приложить к массе m_1 , чтобы обеспечить ускорение $U_e(t)$ в переносном движении массы m . Если заданы эталонные оптимальные движения $U_e(t)$ и $x_r(t)$, то подставляя их в первое уравнение системы (38), находим реализуемое с помощью привода ускорение U_1 .

Численный пример. Исходные данные для **примера 6**: $T=4$ с; $V_0=5$ м/с; $k=2$ с⁻¹; $p=\pi/2T$. Аналитические выражения для $x_r(t)$ и $v_r(t)$, ввиду их чрезвычайной громоздкости, здесь не приводятся. Графики переносного движения изображены на рисунке 1, а относительного – на рисунке 2.

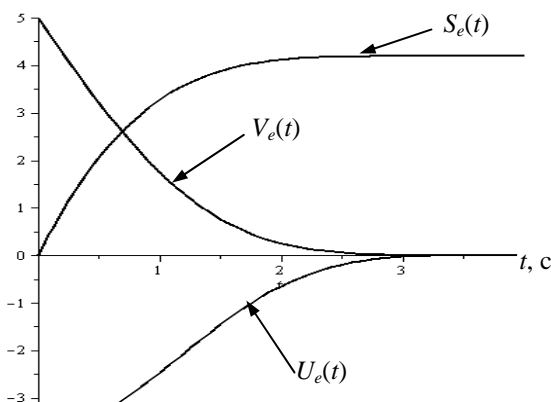


Рисунок 1 – Графики $S_e(t)$, $V_e(t)$, $U_e(t)$

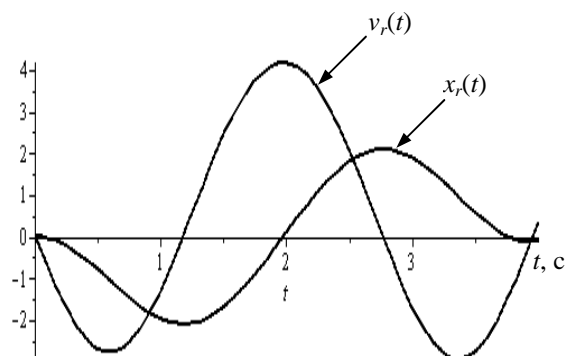


Рисунок 2 – Графики $x_r(t)$, $v_r(t)$

Как следует из графиков переносного и относительного движений, в момент времени $t=T$ фактически наступает абсолютный покой, т.е. управление $U_e(t)$ обеспечивает остановку упругого объекта без колебаний.

Выводы

1. Выявлен и исследован широкий класс оптимальных управлений в виде непрерывных периодических и неперiodических функций для переносного движения упругих объектов с достижением состояния абсолютного покоя в конце движения.

2. Показано, что критериями оптимальности являются функционалы, зависящие от управлений и их производных.

Дальнейшие исследования предполагают учет уравнений приводов (двигателей переменного либо постоянного тока) при практической реализации управлений движением упругих объектов на оборудовании лаборатории «Фесто» СевНТУ.

Библиографический список использованной литературы

1. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский; под общ. ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 296 с.

2. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская; под общ. ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2012. — 212 с.

3. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.J. Zobkiewski. — Gliwice: Wydawnictwo Poitechniki, 2011. — 171 p.

4. Воронов А.А. Теория автоматического управления. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления: учеб. пособие для вузов / А.А. Воронов. — М.: Наука, 1992. — 288 с.

5. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.: Вища шк., 1982. — 116 с.

Поступила в редакцию 21.05.2013 г.

Бохонський О.І., Вармінська Н.І. Відновлені функціонали як критерії оптимальності управління переносним рухом деформівних об'єктів

На основі реверсивного принципу оптимальності досліджено клас кососиметричних управлінь (прискорень в виді безперервних диференційованих функцій) переносним рухом деформівних об'єктів.

Ключові слова: переносний та відносний рухи, оптимальне управління, упругодеформівний об'єкт.

Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. The reconditioned functionals as the criteria of optimal control of deformable objects' portable movement

On the basis of the optimality principle a class of skew controls of deformable objects' portable movement (acceleration in the form of continuous differentiable functions) is studied.

Keywords: portable and relative movement, optimal control, resiliently deformable object.