

УДК 539.3

Е.Н. Михайлуца, канд. техн. наук*Запорожская государственная инженерная академия**Пр. Ленина 226, г. Запорожье, Украина, 69006**E-mail: Helena_miha@mail.ru***АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УПРУГОЙ ПРОСЛОЙКИ
НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ***Анализируется стационарное поведение составной конструкции под действием подвижной нагрузки с учетом диссипативных свойств прослойки.****Ключевые слова:** упругая связь, коэффициент демпфирования, диссипация, инерциальность прослойки, преобразование Фурье.*

Задачи исследования динамических характеристик слоистых конструкций возникают при проектировании автодорожных и аэродромных покрытий, подземных и подводных емкостей и трубопроводов.

Большинство работ, посвященных данной проблеме, анализируют два предельных случая контакта между элементами конструкции: жесткий, при котором выполняются условия равенства перемещений и напряжений, и скользящий, который предполагает отсутствие касательных напряжений. Вызывает практический интерес случай, когда условия контакта являются промежуточными, то есть между слоями присутствует склейка, обладающая заметной податливостью. Конструкции подобного вида рассмотрены в работах зарубежных ученых [1, 2] для случая склеенного составного стержня либо склеенных полупространств, при этом основное внимание уделялось напряжению на склейке.

Цель исследований – анализ напряженного состояния упругой прослойки.

Для исследования влияния упругой прослойки рассмотрены пластина и оболочка неограниченных в плане размеров, составленные из двух неодинаковых по механическим характеристикам слоев с тонким упругим соединением. Слои конструкции принимаются однородными, изотропными и линейно-упругими. Нижний слой жестко сцеплен (полное склеивание без податливости) с абсолютно жестким полупространством. К верхней границе конструкции приложена нормальная нагрузка. Считая, что с момента приложения нагрузки прошло достаточно много времени, процесс можно считать установившимся и в подвижной системе координат перемещения и напряжения не зависят от времени, скорость движения нагрузки входит в решение как параметр.

Рассматривается плоское деформированное состояние для пластины и пространственный случай неосеимметричного нагружения оболочки, при этом движение каждого из слоев описывается динамическими уравнениями теории упругости в перемещениях [3].

Стыковка слоев, с учетом малой толщины прослойки и ее инерциальности, для случая пластины моделируется зависимостями [4]:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)},$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \left[k_N + \eta_N \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_z^{(1)} - U_z^{(2)}), \quad \sigma_{xz}^{(1)} = \left[k_S + \eta_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_x^{(1)} - U_x^{(2)}), \quad (1)$$

где k_N, k_S, η_N, η_S – коэффициенты жесткости и демпфирования прослойки в нормальном и касательном направлениях. Для оболочки условия связи получены заменой индекса z на r и добавлением условия по угловой координате:

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \left[\frac{G}{h} + \eta_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_\theta^{(1)} - U_\theta^{(2)}).$$

Построение модели динамического поведения конструкции сводится к интегрированию уравнения движения слоев при выполнении следующих граничных условий на поверхностях:

а) для пластины:

$$\text{при } z = h_1: \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = -F, \quad (2)$$

$$\text{при } z = -h_2: \quad U_x^{(2)} = U_z^{(2)} = 0,$$

б) для оболочки:

$$\text{при } r = a: \quad \sigma_{rx}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = F, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\text{при } r = d: \quad \sigma_{rx}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = -F, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0.$$

Приведем алгоритм исследования влияния диссипативных свойств прослойки на динамическое поведение двухслойной конструкции. Так как существенного различия в структуре алгоритма не наблюдается, будем указывать формулы в пунктах а) и б) для пластины и оболочки соответственно.

Для интегрирования уравнений движения слоев вводятся потенциальные функции по формулам:

$$а) \quad U_x^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k}{\partial z}, \quad U_z^{(k)} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} + \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad (3)$$

$$б) \quad U_r^{(k)} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial \theta}, \quad U_\theta^{(k)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial r},$$

$$U_x^{(k)} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \theta^2}.$$

При этом необходимые нам компоненты напряжений выражаются через φ_k, ψ_k следующим образом:

$$а) \quad \sigma_{zz}^{(k)} = \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial z} \right) + \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial z} \right),$$

$$\sigma_{xz}^{(k)} = G_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right), \quad (4)$$

$$б) \quad \frac{\sigma_{rr}^{(k)}}{G_k} = \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial r^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial x \partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial \theta} \right),$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}^{(k)}}{G_k} = -\frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial x \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial r^2},$$

$$\frac{\sigma_{rx}^{(k)}}{G_k} = 2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial x \partial \theta}.$$

Осуществляем переход к подвижной системе координат, используя преобразование Галилея (в силу установившегося процесса) $\eta = \frac{x-ct}{h_1}$, и к безразмерным переменным, отнеся все линейные величины к толщине верхнего слоя для случая пластины и к наружному радиусу для случая составной оболочки.

Для решения уравнений движения слоев конструкции применяется комплексное преобразование Фурье по переменной η , а для цилиндрической оболочки дополнительно используется разложение потенциальных функций в ряды Фурье по формулам:

$$\{\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_n^{(k)}, \psi_n^{(k)}\} \cos(n\theta), \quad \chi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^{(k)} \sin(n\theta). \quad (5)$$

После этого поиск решения сводится к анализу краевой задачи в пространстве изображений. Видоизмененные волновые уравнения примут вид:

$$а) \quad \frac{d^2 \varphi_k}{dz^{*2}} - m_k^2 \xi^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{d^2 \psi_k}{dz^{*2}} - m_{sk}^2 \xi^2 \psi_k = 0, \quad (6)$$

где $m_k = \sqrt{1 - M_{pk}^2}$, $m_{sk} = \sqrt{1 - M_{sk}^2}$, $M_{pk} = \frac{c}{c_{pk}}$, $M_{sk} = \frac{c}{c_{sk}}$.

$$б) \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m_k^2 \xi^2}{d^2} \right) \right) \varphi_n^{(k)} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{m_{sk}^2 \xi^2}{d^2} \right) \right) \left(\psi_n^{(k)}, \chi_n^{(k)} \right) = 0,$$

в которых

$$m_1 = \sqrt{1 - \theta_1 c^{*2}}, \quad m_2 = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\gamma} \theta_2 c^{*2}}, \quad m_{s1} = \sqrt{1 - c^{*2}}, \quad m_{s2} = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\gamma} c^{*2}}, \quad \theta_k = \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)}.$$

Общие решения уравнений для малых скоростей движения нагрузки представляют собой для случая двухслойной пластины линейные комбинации вида:

$$\begin{aligned}\varphi_k(z, \xi) &= C_1^{(k)} \cdot \exp(m_k z \xi) + C_2^{(k)} \cdot \exp(-m_k z \xi), \\ \psi_k(z, \xi) &= D_1^{(k)} \cdot \exp(m_{sk} z \xi) + D_2^{(k)} \cdot \exp(-m_{sk} z \xi),\end{aligned}$$

а для случая двухслойной цилиндрической оболочки являются линейной комбинацией функций Бесселя от мнимого аргумента первого и второго рода n -го порядка:

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(k)}(r, \xi) &= A_n^{(k)}(\xi) K_n(m_k \xi r) + B_n^{(k)}(\xi) I_n(m_k \xi r), \\ \Psi_n^{(k)}(r, \xi) &= C_n^{(k)}(\xi) K_n(m_{sk} \xi r) + D_n^{(k)}(\xi) I_n(m_{sk} \xi r), \\ \chi_n^{(k)}(r, \xi) &= E_n^{(k)}(\xi) K_n(m_{sk} \xi r) + S_n^{(k)}(\xi) I_n(m_{sk} \xi r).\end{aligned}$$

Тогда для каждого слоя в пространстве изображений перемещения и контактные напряжения в произвольной точке двухслойной конструкции могут быть вычислены по формулам:

$$\text{а) } U_z^{(k)} = m_k \xi \left(C_1^{(k)} \exp(m_k \xi z^*) - C_2^{(k)} \exp(-m_k \xi z^*) \right) + i \xi \left(D_1^{(k)} \exp(m_{sk} \xi z^*) + D_2^{(k)} \exp(-m_{sk} \xi z^*) \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(k)} &= \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left[m_k^2 \xi^2 \left(C_1^{(k)} \exp(m_k \xi z^*) + C_2^{(k)} \exp(-m_k \xi z^*) \right) + \right. \\ &+ i \xi^2 m_{sk} \left(D_1^{(k)} \exp(m_{sk} \xi z^*) - D_2^{(k)} \exp(-m_{sk} \xi z^*) \right) \left. \right] - \\ &- \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \left[\xi^2 \left(C_1^{(k)} \exp(m_k \xi z^*) + C_2^{(k)} \exp(-m_k \xi z^*) \right) + \right. \\ &+ i \xi^2 m_{sk} \left(D_1^{(k)} \exp(m_{sk} \xi z^*) - D_2^{(k)} \exp(-m_{sk} \xi z^*) \right) \left. \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{б) } U_{r,n}^{(k)} &= \left[\frac{n}{r^*} K_n(m_k \eta r^*) - m_k \eta K_{n+1}(m_k \eta r^*) \right] A_n^{(k)} + \left[\frac{n}{r^*} I_n(m_k \eta r^*) + m_k \eta I_{n+1}(m_k \eta r^*) \right] B_n^{(k)} - \\ &- i \eta \left[\frac{n}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] C_n^{(k)} - i \eta \left[\frac{n}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] D_n^{(k)} + \\ &+ \frac{n}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) E_n^{(k)} + \frac{n}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) S_n^{(k)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr,n}^{(k)}}{G_k} &= \left[\left(\left(1 + m_{sk}^2 \right) \eta^2 + \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) K_n(m_k \eta r^*) + \frac{2m_k \eta}{r} K_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right] A_n^{(k)} + \\ &+ \left[\left(\left(1 + m_{sk}^2 \right) \eta^2 + \frac{2n(n-1)}{r^2} \right) I_n(m_k \eta r^*) - \frac{2m_k \eta}{r} I_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right] B_n^{(k)} - \\ &- 2i \eta \cdot \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + m_{sk}^2 \eta^2 \right) K_n(m_{sk} \eta r^*) + \frac{m_{sk} \eta}{r} K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] C_n^{(k)} - \\ &- 2i \eta \cdot \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^2} + m_{sk}^2 \eta^2 \right) I_n(m_{sk} \eta r^*) - \frac{m_{sk} \eta}{r} I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] D_n^{(k)} + \\ &+ 2 \frac{n}{r} \cdot \left[\frac{n-1}{r} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] E_n^{(k)} + \\ &+ 2 \frac{n}{r} \cdot \left[\frac{n-1}{r} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] S_n^{(k)}.\end{aligned}$$

Удовлетворяя затем условиям стыковки (1) и граничным условиям (2) с использованием зависимостей (7), получаем систему линейных комплексных уравнений для определения коэффициентов, решение которой проводится методом Гаусса путем замены каждого комплексного уравнения парой действительных. Выражения для нахождения перемещения и напряжения в любой точке конструкции являются линейной комбинацией найденных коэффициентов, зависящих от вида внешней нагрузки.

В качестве примера для случая пластины выбиралась нагрузка, равномерно распределенная по полосе шириной $2a$ и движущаяся с постоянной скоростью, а для случая цилиндрической оболочки рассматривалась нагрузка, приложенная к внутренней стороне оболочки симметрично относительно центра. Аналитически каждая нагрузка при переходе к подвижной системе координат и безразмерным переменным имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad F &= F_0 \cdot h(\eta), & h(\eta) &= \begin{cases} 1, & |\eta| \leq a^* \\ 0, & |\eta| > a^* \end{cases}, & a^* &= \frac{a}{h_1}. \\
 \text{б)} \quad F &= F_0 \cdot h(\eta) \delta(\theta - \theta_k) & & & & \\
 h(\eta) &= \begin{cases} 1, & |\eta| \leq a^* \\ 0, & |\eta| > a^* \end{cases}, & a^* &= \frac{a}{d}, & \delta(\theta - \theta_k) &= \text{дельта-функція Дірака}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Применим к нагрузке преобразование Фурье по пространственной координате и дополнительно разложение в ряд Фурье по угловой координате для случая цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad F^{\hat{O}}(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot F_0 \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi}, \\
 \text{б)} \quad F^{\hat{O}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{G_1} \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta),
 \end{aligned}$$

где
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot (1 + (-1)^n).$$

Выражения для нормальных компонент напряжения и перемещения в верхнем слое преобразуются следующим образом:

$$\text{а)} \quad U_z^{(1)} = \frac{1}{G_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot F_0 \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot (T_{1\text{Re}}(\xi, z^*) + i \cdot T_{1\text{Im}}(\xi, z^*)), \tag{9}$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot F_0 \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot (T_{2\text{Re}}(\xi, z^*) + i \cdot T_{2\text{Im}}(\xi, z^*)),$$

$$\begin{aligned}
 T_{2\text{Re}}(\xi, z^*) &= \frac{2G_1}{1-2\nu_1} \left[(m_1^2(1-\nu_1) - \nu_1) \xi^2 \text{Re}(C_1^{(1)}) \cdot \exp(m_1 \xi z^*) + \right. \\
 &+ (m_1^2(1-\nu_1) - \nu_1) \xi^2 \text{Re}(C_2^{(1)}) \cdot \exp(-m_1 \xi z^*) + m_{s1}(2\nu_1 - 1) \xi^2 \text{Im}(D_1^{(1)}) \cdot \exp(m_{s1} \xi z^*) + \\
 &\left. + m_{s1}(1-2\nu_1) \xi^2 \text{Im}(D_2^{(1)}) \cdot \exp(-m_{s1} \xi z^*) \right],
 \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad U_r^{(1)} = \frac{1}{G_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{G_1} \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta) \cdot (T_{1\text{Re}}(\xi, r^*) + i T_{1\text{Im}}(\xi, r^*)),$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{G_1} \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta) \cdot (T_{2\text{Re}}(\xi, r^*) + i T_{2\text{Im}}(\xi, r^*)),$$

$$\begin{aligned}
 T_{2\text{Re}}(\xi, r^*) &= \left[\left((1 + m_{s1}^2) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right) S_{29} + \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{30} \right] \text{Re}(A_n^{(1)}) + \\
 &+ \left[\left((1 + m_{s1}^2) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right) S_{31} - \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{32} \right] \text{Re}(B_n^{(1)}) - \\
 &- 2\xi \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{33} + \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{34} \right] \text{Im}(C_n^{(1)}) - 2\xi \left[\left(\frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{35} - \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{36} \right] \text{Im}(D_n^{(1)}) + \\
 &+ 2 \frac{n}{r^*} \left[\frac{n-1}{r^*} S_{33} - m_{s1} \xi S_{34} \right] \text{Re}(E_n^{(1)}) + 2 \frac{n}{r^*} \left[\frac{n-1}{r^*} S_{35} + m_{s1} \xi S_{36} \right] \text{Re}(S_n^{(1)}).
 \end{aligned}$$

Для возвращения в пространство оригиналов применяем обратное преобразование Фурье, причем для случая цилиндрической оболочки предварительно суммируем ряды Фурье по угловой координате.

В результате получаем несобственные интегралы вида:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(1)} &= \frac{F_0}{\pi} \int_0^\infty (T_{2re}(\xi, z^*) + iT_{2im}(\xi, z^*)) \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} (\cos(\xi\eta) - i \sin(\xi\eta)) d\xi + \\
 &+ \frac{F_0}{\pi} \int_0^\infty (T_{2re}(\xi, z^*) + iT_{2im}(\xi, z^*)) \frac{\sin(\xi^* a^*)}{\xi^*} (\cos(\xi^* \eta) - i \sin(\xi^* \eta)) d\xi^*, \quad \xi^* = -\xi.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(1)} &= \frac{F_0}{\pi} \left[\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty b_n (T_{2re}(\xi, r^*) + iT_{2im}(\xi, r^*) \cos(n\theta)) \cdot \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} (\cos(\xi\eta) - i \sin(\xi\eta)) d\xi + \right. \\
 &\left. + \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty b_n (T_{2re}(\xi, r^*) + iT_{2im}(\xi, r^*) \cos(n\theta)) \cdot \frac{\sin(\xi^* a^*)}{\xi^*} (\cos(\xi^* \eta) - i \sin(\xi^* \eta)) d\xi^* \right], \quad \xi^* = -\xi.
 \end{aligned}$$

Полученные интегралы вычислялись численно на основе алгоритма с применением метода Файлона [5]. Верхний предел и шаг интегрирования по пространственной переменной, а также число членов ряда при суммировании рядов Фурье определялись путем численных экспериментов с целью обеспечения по всем искомым величинам заданной относительной точности.

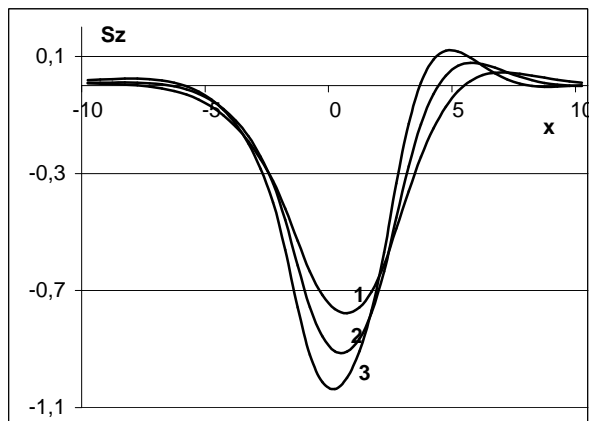


Рисунок 1

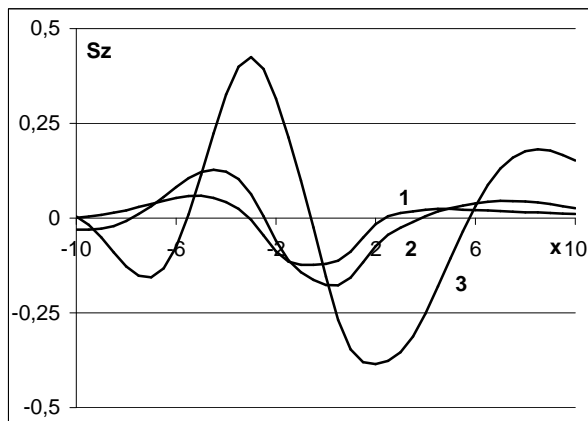


Рисунок 2

Приведенные графики иллюстрируют картину установившегося процесса в точке под серединой нагрузки на примере нормальной составляющей тензора напряжений. Полученные результаты наглядно демонстрируют нарушение симметричности графиков в связи с наличием диссипации. На рисунке 1 показано распределение напряжения для различных значений безразмерного коэффициента демпфирования, на рисунке 2 показано влияние скорости движения нагрузки на картину деформации. При увеличении скорости движения нагрузки и стремлению ее к критическому значению наблюдаются характерные изменения графиков.

На рисунках 3-6 приведены кривые зависимостей распределения радиального перемещения и напряжения по осевой координате для составной оболочки в зависимости от механических и физических характеристик конструкции.

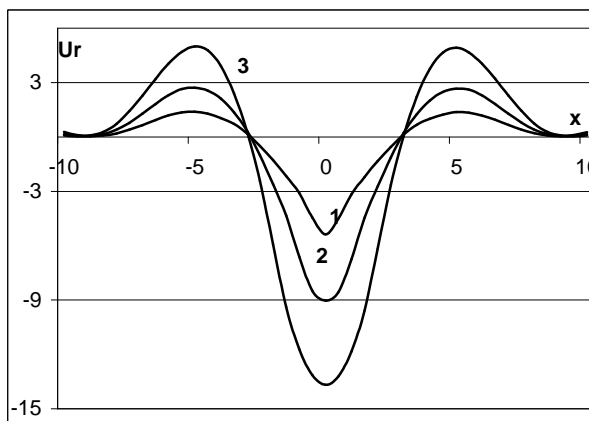


Рисунок 3

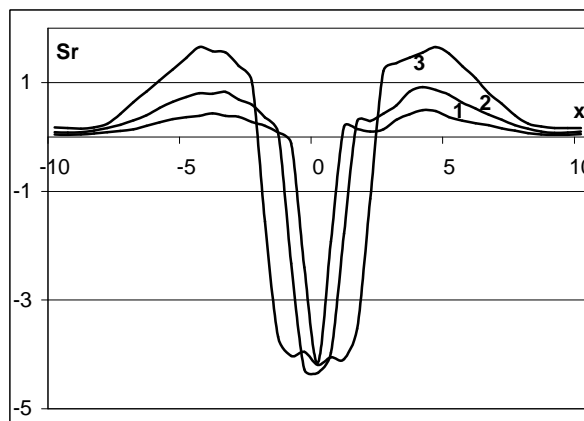


Рисунок 4

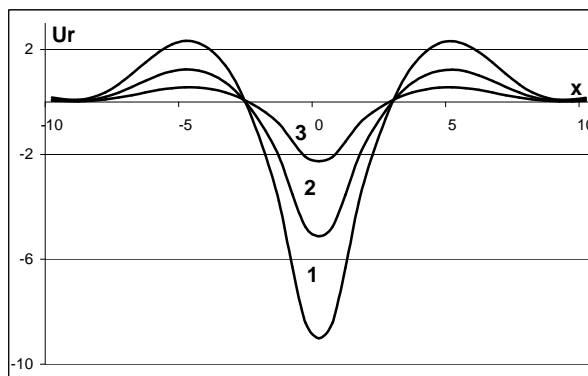


Рисунок 5

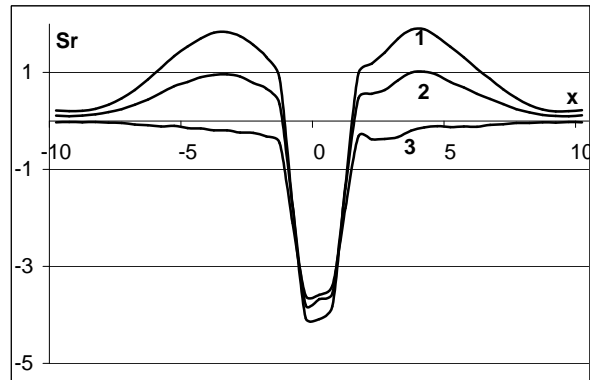


Рисунок 6

Библиографический список использованной литературы

1. Jones J.P. Wave at a flexibly bonded interface / J.P. Jones, J.S. Whittier // J. Appl. Mech. — 1967. — Vol. 34, Issue 4. — P. 178–183.
2. Pajton R.G. Dynamik bond stress in a composite structure subjected to a sudden pressure rise / R.G. Pajton // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1965. — Vol. 32, № 3. — P. 190–198.
3. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян. — Л.: Судостроение, 1972. — 374 с.
4. Chonan S. Moving load on a two-layered plate with imperfect bonding, resting on a fluid half-space / S. Chonan // Archive J. Appl. Mech. — November 2. — Vol. 49. — P. 97–106.
5. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. — М.: Наука, 1974. — 223 с.

Поступила в редакцию 2.04.2013 г.

Міхайлуца О.М. Аналіз впливу пружного прошарку на динамічну поведінку складової конструкції

Стаття присвячена побудові математичних моделей динамічної поведінки двошарових пластин і циліндричних оболонок з пружними зв'язками між шарами. При цьому для кожного шару конструкції використовуються динамічні рівняння теорії пружності при точному урахуванні механізму контакту між шарами. Для реалізації побудованих моделей запропоновано спеціальні чисельно-аналітичні алгоритми, що базуються на методі інтегрального перетворення Фур'є, а також квадратурних формулах обернення. Досліджено напружено-деформований стан елементів конструкції подібного виду, оцінено вплив параметрів прошарку на динамічний процес в складових конструкціях.

Ключові слова: пружний зв'язок, коефіцієнт демпфування, дисипація, інерціальність прошарку, перетворення Фур'є.

Mikhailutsa O.M. Analysis of influence of elastic layer on the dynamic behavior of composite construction

The article is devoted to the mathematical models formation of dynamic behavior of two-layered plates and cylindrical shells with elastic connection between layers. Thus, the dynamic equations for theory of elasticity with the precisely record of the mechanism contact between layers are used for each layer of the construction. Special numerical analytical algorithms based on Fourier method of integral transformation as well as square formulae and conversion have been offered for realization of the formed models. The mode of deformation of construction elements of similar kind have been investigated, influence of parameters of the connecting layer on dynamic process in component parts have been estimated.

Keywords: elastic connection, coefficient of damping, dissipation, inertial layer, Fourier transforms.