

УДК 539.37+539.214

В.В. Чигиринский, профессор, д-р техн. наук,**С.П. Шейко, доцент, канд. техн. наук,****В.В. Плахотник, доцент, канд. техн. наук***Запорожский национальный технический университет**ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, Украина, 69000**E-mail: gunner09@bk.ru***НОВЫЕ ПОДХОДЫ В РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ**

При обработке металлов давлением возникают динамические задачи теории упругости и пластичности. Показано решение волнового уравнения теории упругости и его последовательное усложнение в аналитическом виде. Между аргументами тригонометрических функций существует дифференциальное соответствие, что определяет условие существования решения.

Ключевые слова: ОМД, динамика, волновое уравнение, соотношение между аргументами тригонометрических функций, аналитическое решение.

Введение

В процессах обработки металлов давлением довольно часто приходится сталкиваться с динамическими задачами, которые влияют на параметры процесса, качество готовой продукции. К ним можно отнести высадку болтов на горизонтально-ковочных машинах, когда пластическая деформация распространяется вдоль стержня не мгновенно, образуя утолщения в удаленной его части. Также штамповку сложных тонкостенных изделий на оборудовании с увеличенной скоростью перемещения верхнего пуансона, Hasenclever (ФРГ).

По данным работы [1] снижается упругая деформация механической системы, и на 1.25 мм удается получить толщину тонкостенной части меньше. Объясняется это тем, что упругая деформация системы происходит во времени. Если пластическое формоизменение в очаге деформации реализуется быстрее, чем упругая деформация системы, то следует ожидать, уменьшения зазора между бойками, следовательно, уменьшения толщины изделия. Используя такой процесс практически, можно добиться увеличения точности штамповки, сужения поля допусков. Доказать это интересное явление теоретически можно тогда, когда будет отработана математическая модель предложенной динамической задачи, когда можно сопоставить процессы во времени для пластического и упругого деформирования.

Цель исследований – анализ решения динамических задач обработки металлов давлением.

Решение задачи

Известен широкий круг задач механики, который сводится к решению волнового уравнения [2 – 5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

В частности, уравнения такого вида описывают упругие продольные, крутильные, поперечные колебания стержней и т.д. Уравнение (1) относится к уравнениям гиперболического типа. Решения такого типа уравнений неоднородных, более сложных, в аналитическом виде представлены в работах [6 – 8]. Воспользуемся подходами, сформулированными в этих работах, и запишем достаточно простую зависимость

$$u = C \cdot \sin\theta \cdot \sin A\Phi, \quad (2)$$

где C и A – постоянные, характеризующие процесс; θ, Φ – неизвестные функции времени и координаты. Функции θ, Φ – непрерывные, имеют вторые производные по времени и соответствующей координате. Подставим выражение (2) в уравнение (1), после соответствующих преобразований получим уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} \right) \cdot \cos\theta \cdot \sin A\Phi - \left[\left(\theta_t + a \cdot A\Phi_x \right) \cdot \left(\theta_t - a \cdot A\Phi_x \right) + \left(A\Phi_t + a\theta_x \right) \left(A\Phi_t - a\theta_x \right) \right] \cdot \sin\theta \cdot \sin A\Phi + \\ & + 2 \left(\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x \right) \cos\theta \cdot \cos A\Phi + \left(A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} \right) \cdot \sin\theta \cdot \cos A\Phi = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\theta_t = \frac{\partial \theta}{\partial t}$, $A\Phi_x = \frac{\partial A\Phi}{\partial x}$ и т.д.

Рассмотрим упрощающие варианты решения уравнения (3). Их несколько

1-ый вариант $\theta_t = -aA\Phi_x$, $A\Phi_t = -a\theta_x$;

2-ой вариант $\theta_t = aA\Phi_x$, $A\Phi_t = a\theta_x$;

3-ий вариант $\theta_t = -aA\Phi_x, A\Phi_t = a\theta_x;$

4-ый вариант $\theta_t = aA\Phi_x, A\Phi_t = -a\theta_x.$

Подставляя первые два варианта в уравнение (3), получим

$$(\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx}) \cdot \cos\theta \cdot \sin A\Phi + 2(\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x) \cos\theta \cdot \cos A\Phi + (A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}) \cdot \sin\theta \cdot \cos A\Phi = 0.$$

Уравнение (3) превратится в тождество, если операторы, стоящие в скобках перед тригонометрическими функциями превратятся в нули. Согласно вариантам 1 и 2 появились упрощения в (3) с первыми производными. Рассмотрим вторые производные, используя записи вариантов 1 и 2

1-ый вариант $\theta_{tt} = -aA\Phi_{xt}, A\Phi_{tt} = -a\theta_{xt},$

$\theta_{tx} = -aA\Phi_{xx}, A\Phi_{tx} = -a\theta_{xx},$

2-ой вариант $\theta_{tt} = aA\Phi_{xt}, A\Phi_{tt} = a\theta_{xt},$

$\theta_{tx} = aA\Phi_{xx}, A\Phi_{tx} = a\theta_{xx}.$

После преобразований следует

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x = 0; A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0. \quad (4)$$

В справедливости выражений (4) можно убедиться, подставляя вторые производные. В разных сочетаниях скобки, стоящие перед тригонометрическими функциями в уравнении (3) превращаются в нули. Действительно,

$$((\mp aA\Phi_{xt}) - (\mp aA\Phi_{tx})) \cdot \cos\theta \cdot \sin A\Phi + 2((\mp aA\Phi_x A\Phi_t) - a(\mp A\Phi_t) A\Phi_x) \cos\theta \cdot \cos A\Phi + ((\mp a\theta_{xt}) - (\mp a\theta_{tx})) \cdot \sin\theta \cdot \cos A\Phi \equiv 0.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид

$$u = C \cdot \sin\theta \cdot \sin A\Phi,$$

при

$$\theta_t = \mp aA\Phi_x, A\Phi_t = \mp a\theta_x. \quad (5)$$

Следует подчеркнуть, что условие (5) определяет не сам вид функции удовлетворяющий, уравнению (1), а ограничения, которые накладываются на функции.

Варианты 3 и 4 не обеспечиваются необходимыми упрощениями при подстановке зависимости (5) в (1), из чего следует, что (5) при следующих упрощениях $\theta_t = -aA\Phi_x, A\Phi_t = a\theta_x$ и $\theta_t = aA\Phi_x, A\Phi_t = -a\theta_x$ не являются решениями уравнения (1). Следует подчеркнуть, что функции θ и $A\Phi$ одновременно каждая могут зависеть и от времени и от координаты очага деформации.

На базе полученного результата решение можно представить в более сложном виде

$$u = C_0 \cdot (C_1 \sin\theta + C_2 \cos\theta) \cdot (C_3 \sin A\Phi + C_4 \cos A\Phi). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1) и группируя, появляются операторы, которые были получены ранее, (4)

$$\begin{aligned} & \{C_1 C_3 (\theta_{tt} - a^2 \theta_{xx}) - C_2 C_4 (A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}) - 2C_1 C_4 (\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x) - \\ & - C_2 C_3 [(\theta_t + a \cdot A\Phi_x) \cdot (\theta_t - a \cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)]\} \cos\theta \cdot \sin A\Phi + \\ & + \{C_1 C_3 [(\theta_t + a \cdot A\Phi_x) \cdot (\theta_t - a \cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] - \\ & - 2C_2 C_4 (\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x) + C_1 C_4 (A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx}) + \\ & + C_2 C_3 (\theta_{tt} - a^2 \theta_{xx})\} \sin\theta \cdot \sin A\Phi + \{2C_1 C_3 (\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x) - \\ & - C_2 C_4 [(\theta_t + a \cdot A\Phi_x) \cdot (\theta_t - a \cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] + \\ & + C_1 C_4 (\theta_{tt} - a^2 \theta_{xx}) + C_2 C_3 (A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx})\} \cos\theta \cdot \cos A\Phi + \\ & + \{C_1 C_3 (\theta_{tt} - a^2 \theta_{xx}) - C_2 C_4 (\theta_{tt} - a^2 \theta_{xx}) - \\ & - C_1 C_4 [(\theta_t + a \cdot A\Phi_x) \cdot (\theta_t - a \cdot A\Phi_x) + (A\Phi_t + a\theta_x)(A\Phi_t - a\theta_x)] - \\ & - 2C_2 C_3 (\theta_t A\Phi_t - a^2 \theta_x A\Phi_x)\} \sin\theta \cdot \cos A\Phi = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В процессе преобразований в уравнении (7) появляются те же соотношения (4), что и в уравнении (3). Это, несмотря на различные сочетания, вновь введенных коэффициентов, и тригонометрических функций. Таким образом, решение (6) будет удовлетворять уравнению (1) при условии, когда имеют место отношения между функциями вида

$$\theta_t = \mp a A \Phi_x, \quad A \Phi_t = \mp a \theta_x.$$

Из соотношений (4) имеем дифференциальные уравнения в частных производных, где разрешающими функциями будут вводимые в рассмотрение функции θ и $A\Phi$. Эти уравнения по конструкции и типу соответствуют уравнению (1). С учетом последних замечаний для (1) имеем

$$u = C_0 \cdot (C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta) \cdot (C_3 \sin A\Phi + C_4 \cos A\Phi),$$

$$\theta_t = \mp a A \Phi_x, \quad A \Phi_t = \mp a \theta_x, \quad \theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \quad A \Phi_{tt} - a^2 A \Phi_{xx} = 0. \quad (8)$$

С учетом (8) неопределенность для функций θ и $A\Phi$ ликвидирована, так как существуют дифференциальные уравнения, позволяющие эти функции найти. Один из вариантов может быть получен в случае простейшего решения гиперболического уравнения для $A\Phi$, $A \Phi_{tt} - a^2 A \Phi_{xx} = 0$, т.е. $A\Phi = A \cdot x \cdot t$.

При этом

$$\theta_t = a \cdot A \cdot t, \quad a \cdot \theta_x = A \cdot x.$$

Интегрируя, получим
$$\theta = A \frac{a \cdot t^2}{2} + f(x), \quad \theta = A \frac{x^2}{2a} + f(t),$$

или
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot A \left(a \cdot t^2 + \frac{x^2}{a} \right).$$

Следует убедиться, удовлетворяет функция θ гиперболическому уравнению $\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0$.

После подстановки имеет место тождество $Aa - a^2 A \cdot \frac{1}{a} \equiv 0$. При этом не исключается, что приведенным

выше соотношениям удовлетворяются решения полученные методом разделения переменных. Из представленного частного решения видно, что аргументы тригонометрических функций не являются функцией только одного переменного. Каждая зависит одновременно от времени и координаты, но эти функции разные и определяются соотношениями (5) или (8) и не являются линейными.

Учитывая, что волновое уравнение линейное, окончательный результат можно представить в виде суперпозиции решений

$$u = \sum_{i=1}^{i=n} C_{i,0} \cdot (C_{i,1} \sin \theta_i + C_{i,2} \cos \theta_i) \cdot (C_{i,3} \sin A_i \Phi_i + C_{i,4} \cos A_i \Phi_i),$$

$$\theta_{i,t} = \mp a A_i \Phi_{i,x}, \quad A_i \Phi_{i,t} = \mp a \theta_{i,x}, \quad \theta_{i,tt} - a^2 \cdot \theta_{i,xx} = 0; \quad A \Phi_{i,tt} - a^2 A \Phi_{i,xx} = 0. \quad (9)$$

Анализ полученных результатов

Решения (8), (9) можно привести к уже известным решениям, которые изложены в [3]. Используя метод разделения переменных, получено выражение u_n

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at + B_n \sin \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at \right) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x. \quad (10)$$

Установим соответствие коэффициентов в решениях (8) и (10) и определим соотношения между функциями. Очевидно

$$C_2 = B_n, \quad C_1 = A_n, \quad \theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at, \quad A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x, \quad C_0 = 1, \quad C_4 = 0.$$

Тогда с учетом упрощений имеем

$$u_n = (A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \cdot \sin A\Phi.$$

Покажем, что между функциями, приведенными в [3], существуют соотношения вида (5), (6) и (8). Действительно

$$\theta_t = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a, \quad A\Phi_x = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad A\Phi_t = 0, \quad \theta_x = 0.$$

Подставляя в соотношения $\theta_t = \mp a A \Phi_x$, $A \Phi_t = \mp a \theta_x$, убеждаемся, что они удовлетворены, имеют вид

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot a = a \cdot \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad 0 = a \cdot 0.$$

Функції $\theta = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot at$ і $A\Phi = \frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x$ задовольняють гармонічним диференціальним рівнянням (8)

$$\theta_{tt} - a^2 \cdot \theta_{xx} = 0; \quad A\Phi_{tt} - a^2 A\Phi_{xx} = 0.$$

Таким образом, функции в выражении (10) удовлетворяют указанным соотношениям функций представленных в решениях (8) и являются частным решением.

Следует подчеркнуть, что в решениях (8), (9) определяется не вид самих функций, которые удовлетворяют волновое уравнение, а условия существования этих функций, что формулирует общие подходы получения искомого решения. При предлагаемой постановке и решении появляется возможность расширения круга решаемых задач за счет большего разнообразия граничных и начальных условий.

Выводы

1. В обработке металлов давлением имеют место разнообразные динамические задачи, требующие своего решения.

2. Получено аналитическое частное решение волнового уравнения и определены условия существования функций, входящих в решение задачи.

3. Зависимости аргументов тригонометрических функций разные и определяются одновременно двумя переменными, временем и координатой, удовлетворяя при этом приведенным условиям существования рассматриваемых функций. Условия существования функций входящих в предложенное решение задачи, удовлетворены уже известными выражениями, полученных методом разделения переменных.

Предметом дальнейших исследований является численный анализ решения прикладных задач.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Норицин И.А. Проектирование кузнечных и холодноштамповочных цехов и заводов / И.А. Норицин. — М.: Высшая школа, 1977. — 422 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара / Я.Г. Пановко. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
4. Бабанов И.М. Теория колебаний / И.М. Бабанов. — М.: Наука, 1968. — 560 с.
5. Бронштейн И.М. Справочник по математике / И.М. Бронштейн, К.Л. Семендяев. — М.: Наука, 1964. — 608 с.
6. Чигиринский В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / В.В. Чигиринский // Изв вузов. Черная металлургия. — 2009. — № 5. — С. 11–16.
7. Чигиринский В.В. Новый метод решения задач теории пластичности / В.В. Чигиринский // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. — Запорожье, 2008. — № 1. — С. 57–62.
8. The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the Plastic Medium / V.V. Chygyryns'kyu, I. Mamuzic, F. Vodopivec, I.V. Gordienko // Metalurgija. — Zagreb, 2006. — Vol. 45, br. 2. — P. 115–118.

Поступила в редакцию 21.02.2013 г.

Чигіринський В.В., Шейко С.П., Плахотнік В.В. Нові підходи рішення динамічних задач в обробці металів тиском

В обробці металів тиском мають місце динамічні задачі теорії пружності та пластичності. Показане рішення хвильового рівняння теорії пружності і його послідовне ускладнення в аналітичному вигляді. Поміж аргументами тригонометричних функцій є співвідношення в диференціальній формі, які визначають умови знаходження цих рішень. Обмеження, що накладаються на аргументи тригонометричних функцій вказують на їх відсутність при визначенні порядку залежностей аргументів функцій.

Ключові слова: ОМТ, динаміка, хвильове рівняння, відношення між аргументами тригонометричних функцій, аналітичне рішення.

Chigirinskyi V.V., Sheyko S.P., Plahotnik V.V. New approaches for solving dynamic problems in metal forming

Dynamic problems of elasticity and plasticity theories are presented in metal working processes. The solution of the wave equation of elasticity theory and its successive complication has been presented. There is differential agreement among arguments of trigonometrical functions that determines the conditions for availability of solution.

Keywords: mechanical working, dynamic wave equation, agreement among trigonometrical functions, analytical solution.