УДК 539.382

О.М. Пономаренко, доцент, канд. фіз.-мат. наук
Львівський національний аграрний університет,
вул. В. Великого, 1, м. Дубляни, Україна, 80381
E-mail: lday @ mail. lviv. ua

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У БЕЗМЕЖНІЙ ПЛАСТИНІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ, З'ЄДНАНИМИ ТРІЩИНОЮ, ПРИ РОЗТЯГУ ПІД КУТОМ ДО ЛІНІЇ ЦЕНТРІВ ОТВОРІВ

Подано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності з визначення концентрації напружень для нескінченної пластини, що містить два кругових отвори, з'єднаних тріщиною, при розтягу під кутом до лінії центрів отворів . Застосовано біполярні координати та функцію напружень Ері для загального плоского напруженого стану.

Ключові слова: *біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень.*

Постановка задачі. Дослідження з поширення тріщин тісно пов'язані з їх застосуванням на практиці в задачах забезпечення працездатності об'єктів, що містять тріщини. Задачі цього класу набувають особливо важливе значення для конструкцій, руйнування яких пов'язано з нанесенням великих матеріальних збитків, а також із загрозою для життя людей. Такими конструкціями є, зокрема, ферми мостів і великих перекриттів, котли, башти і колони хімічних та інших галузей виробництва, магістральні трубопроводи, корпуси суден і літальних апаратів, корпуси і елементи турбін, деталі відповідальних приладів тощо. При цьому застосовувані як основні методи ліквідації тріщин їх заварка або заміна пошкодженої ділянки нерідко пов'язані з великим об'ємом супутніх робіт, а іноді й зовсім неможливі без повного виводу об'єкта з експлуатації.

Одним із шляхів запобігання руйнуванню є застосування ефективних методів гальмування тріщин, що розвиваються. При цьому місцем зародження тріщин є, як правило, технологічні або конструктивні концентратори напружень.

Найбільш поширеними конструктивними концентраторами є найрізноманітніші отвори в металоконструкціях. Вони можуть служити чинниками, що прискорюють чи гальмують розвиток тріщин. В зв'язку з тим, що локалізовувані тріщини переважно беруть свій початок з наявних в конструкції отворів, важливим є питання взаємодії кругового отвору ініціатора тріщини та розвантажуючого отвору в кінці тріщини. Отримання розв'язку задачі по розподілу напружень у безмежній пластині з двома круговими отворами, з'єднаними тріщиною, при розтягу під кутом до лінії центрів отворів дає можливість оцінити вплив тріщини, що з'єднує отвори, на значення максимального коефіцієнта концентрації напружень у порівнянні з випадком її відсутності, а також вказати, наскільки може бути знижена висока концентрація напружень утворенням отворів на кінцях тріщини.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Дослідження з поширення тріщин закладено в працях A.A. Griffith, G.R. Irvin, E.O. Orowan та продовжено визначними вченими А.А. Камінським, Б.В. Костровим, М.Я. Леоновим, Е.М. Морозовим, Г.М. Савиним, В.В. Панасюком, В.З. Партоном, Г.П. Черепановим, М.П. Савруком та ін. Праці цих вчених присвячено дослідженню взаємодії тріщин одна з одною, взаємодії тріщин та отворів різних форм.

Вивчення розподілу напружень у безмежній пластині з двома круговими отворами, з'єднаними тріщиною, при розтягу в напрямі. перпендикулярному до лінії центрів отворів, методом внутрішніх сил проведено в праці [1], методом пружного потенціалу – в праці [2], методом сингулярних інтегральних рівнянь – в працях [3, 4].

Постановка завдання. Метою даної роботи є дослідження концентрації напружень в безмежній пластині з двома круговими отворами, з'єднаними тріщиною, при розтягу під кутом до лінії центрів отворів із застосуванням біполярних координат α, β [5] та функцій напружень Ері.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо ізотропну тонку пластину з двома круговими вирізами рівних радіусів, з'єднаними прямолінійною тріщиною по лінії центрів отворів. Пластина перебуває в умовах розтягу зусиллями p за напрямом, що складає довільний кут φ з лінією центрів отворів. Визначимо напружений стан в пластині за умови, що по контурах отворів і до країв тріщини не прикладено ніяких зовнішніх зусиль.

Результати, отримані при розв'язуванні даної задачі дадуть нам можливість оцінити вплив тріщини, що з'єднує отвори, на значення максимального коефіцієнта концентрації напружень в порівнянні з випадком її відсутності [6].

Основна функція напружень має вигляд:

$$U_0(x, y) = \frac{P}{2}(x \sin\varphi - y \cos\varphi)^2 . \quad (1)$$

Повну функцію напружень подамо у вигляді:

$$U(x,y)=\sum_{i=1}^{3}[U_{0,i}(x,y)+\kappa_i U_{1,i}(x,y)], \tag{2}$$

де $\kappa_1=\frac{1}{2}\sin^2\varphi$, $\kappa_2=\frac{1}{2}\cos^2\varphi$, $\kappa_3=-\frac{1}{2}\sin 2\varphi$.

В біполярних координатах [5] отримаємо:

$$gU(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{3}[gU_{0,i}(\alpha,\beta)+k_i gU_{1,i}(\alpha,\beta)]=\sum_{i=1}^{3}gU_i(\alpha,\beta). \tag{3}$$

Використовуючи розв'язок, отриманий нами для чистого зсуву [7], маємо:

$$\frac{gU_1}{k_1}=gx^2+D_1\alpha d\alpha+\tilde{K}(ch\alpha-\cos\beta)\ln(ch\alpha-\cos\beta)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(1)}ch(n+1)\alpha+B_n^{(1)}ch(n-1)\alpha]\cos n\beta, \tag{4}$$

$$\frac{gU_2}{k_2}=gy^2+D_2\alpha sh\alpha+\tilde{\tilde{K}}(ch\alpha-\cos\beta)\ln(ch\alpha-\cos\beta)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(2)}ch(n+1)\alpha+B_n^{(2)}ch(n-1)\alpha]\cos n\beta,$$

$$\frac{gU_3}{k_3}=gxy+D_3\alpha\sin\beta+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(3)}ch(n+1)\alpha+B_n^{(3)}ch(n-1)\alpha]\sin n\beta.$$

Граничні умови на контурі кругових отворів мають вигляд:

$$\sigma_\alpha|_{\alpha=\pm c}=\tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=\pm c}=0. \tag{5}$$

Береги прямолінійної тріщини являють собою вільні межі, на які не діють поверхневі сили. Покладаючи результуючу нормальну компоненту поверхневих сил від функції gU на поверхні тріщини рівною нулю, отримаємо:

$$\left(\int_0^c \sigma_\beta dy\right)|_{\beta=\pi}=0. \tag{6}$$

З граничних умов отримаємо коефіцієнти функцій напружень. Для коефіцієнтів функції напружень gU_1 маємо:

$$A_1^{(1)}=\frac{1}{sh2c}(e^{-2c}+\tilde{K}e^{-c}shc),$$

$$B_1^{(1)}=\frac{1}{sh2c}(-1-sh2c+Kch2csh^2c)+D_1sh^2c,$$

$$A_n^{(1)}=\frac{2e^{-nc}}{nsh2c+sh2nc}\{-ne^{(n-1)c}shc+chnc+K\frac{ne^{(n-1)c}shc+shnc}{n(n+1)}\},\ n\geq 2$$

$$B_n^{(1)}=\frac{-2e^{-nc}}{nsh2c+sh2nc}\{-ne^{(n+1)c}shc+chnc+K\frac{ne^{(n+1)c}shc+shnc}{n(n-1)}\},\ n\geq 2$$

$$\tilde{K}\{\frac{e^{-c}+ch2cshc}{2chc}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2sh^2c+nsh2c+1-e^{-2nc}}{n(n^2-1)(nsh2c+sh2nc)}-$$

$$-\frac{sh^4c}{shcchc+c}\}=2-thc-4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nsh^2c}{nsh2c+sh2nc}-\frac{sh^2c}{shcchc+c},$$

$$D_1=\frac{1-\tilde{K}sh^2c}{shcchc+c} \tag{7}$$

Для невідомих коефіцієнтів функції напружень gU_2 отримаємо:

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{sh2c}(-e^{-2c} + \tilde{\tilde{K}}\, e^{-c} shc),$$

$$B_1^{(2)} = \frac{1}{sh2c}(1 - sh2c + \tilde{\tilde{K}}\, ch2csh^2 c) + D_2 sh^2 c,$$

$$A_n^{(2)} = \frac{2e^{-nc}}{nsh2c + sh2nc}\{ne^{(n-1)c}shc - chnc + \tilde{\tilde{K}}\frac{e^{(n-1)c}shc}{n+1} + \tilde{\tilde{K}}\frac{shnc}{n(n+1)}\}, n \ge 2$$

$$B_n^{(2)} = \frac{-2e^{-nc}}{nsh2c + sh2nc}\{ne^{(n+1)c}shc - chnc + \tilde{\tilde{K}}\frac{ne^{(n+1)c}shc + shnc}{n(n-1)}\}, n \ge 2$$

$$\tilde{\tilde{K}}\{\frac{e^{-c} + ch2cshc}{2chc} - \frac{sh^4 c}{shcchc + c} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^2 sh^2 c + nsh2c + 1 - e^{-2nc}}{n(n^2-1)(nsh2c + sh2nc)}\} =$$

$$= thc + 4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nsh^2 c}{nsh2c + sh2nc} + \frac{sh^2 c}{shcchc + c},$$

$$D_2 = -\frac{\tilde{\tilde{K}}\, sh^2 c + 1}{shcchc + c}. \tag{8}$$

Використовуючи розв'язок, отриманий в [7], для коефіцієнтів функції gU_3 маємо:

$$A_1^{(3)} = \frac{2e^{-2c} - D}{2ch2c},$$

$$B_1^{(3)} = 0,$$

$$A_n^{(3)} = \frac{n(e^{-2c} - 1) - e^{-2nc} + 1}{sh2nc - nsh2c}, n \ge 2$$

$$B_n^{(3)} = \frac{n(e^{-2c} - 1) + e^{-2nc} - 1}{sh2nc - nsh2c}, n \ge 2$$

$$D_3 = \frac{(1 - e^{-2c})^2}{sh2c - 2cch2c}. \tag{9}$$

Для напружень по контуру кругового отвору отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_\beta}{p}\Big|_{\alpha=c} = {} & \frac{1}{2}\sin^2\varphi[1 + D_1(1 - chc\cos\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}\{(n+1)chnc\cos n\beta - nch(n+1)c\cos(n+1)\beta\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)}\{nch(n-1)c\cos(n-1)\beta - (n-1)chnc\cos n\beta\}] + \frac{1}{2}\cos^2\varphi[1 + D_2(1 - chc\cos\beta) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)}\{(n+1)chnc\cos n\beta - nch(n+1)c\cos(n+1)\beta\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)}\{nch(n-1)c\cos(n-1)\beta - (n-1)chnc\cos n\beta\}] - \\
& - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi[\frac{4shc\sin\beta(1 - chc\cos\beta)}{(chc - \cos\beta)^2} + 4A_1^{(3)}(chc - \cos\beta)sh2c\sin\beta + \\
& + (chc - \cos\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\{A_n 2n(n+1)sh(n+1)c + B_n 2n(n-1)sh(n-1)c\}\sin n\beta].
\end{aligned} \tag{10}$$

В таблиці 1 наведено значення напружень по контуру отвору при $\varphi = 10^\circ$ для деяких значень $\lambda = d / r$, де d – віддаль між центрами отворів, r – радіус отвору, θ – змінний кут по контуру отвору.

Максимальне значення напруження на поверхні тріщини має місце на її кінцях і у випадку параметрів $\lambda = 1{,}01$, $\lambda = 1{,}5$, $\lambda = 4$ відповідно рівне $0{,}03p$; $0{,}10p$; $-0{,}40p$.

Таблиця 1 – Значення напружень σ_β / p в залежності від λ та кута θ

θ^o	$\lambda = 1{,}01$	$\lambda = 1{,}5$	$\lambda = 10$
	σ_β / p	σ_β / p	σ_β / p
0°	-0,96	-0,92	-0,96
30°	-0,48	-0,50	-0,85
60°	2,15	2,95	5,24
90°	3,05	4,00	7,36
120°	3,87	4,26	8,46
150°	2,03	3,86	7,52
180°	-0,46	-0,82	-0,96
210°	-0,98	-0,70	-0,60
240°	2,38	3,25	7,94
270°	3,96	3,98	6,05
300°	2,45	2,60	4,02
330°	-0,50	-0,96	3,03
360°	-0,90	-1,02	-2,01

Висновки. Оцінюючи вплив тріщини, що з'єднує отвори, на значення максимального коефіцієнта концентрації напружень в порівнянні із випадком її відсутності [6], робимо висновок, що тріщина вносить збільшення коефіцієнта концентрації напружень. При віддаленні отворів, тобто із збільшенням довжини тріщини, напруження на контурі зростають і максимальне значення напруження має місце на контурі отвору в точці, що відповідає куту $\theta = 90^o + \varphi$.

Зміст наступних досліджень полягатиме у вивченні концентрації напружень за різних видів навантаження.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Nisitani H. Interference effect between a crack and a notch or crack in a semi-infinite plate / H. Nisitani, Y. Oda // Trans. JSME. — 1980. — A 46, № 407. — P. 745–754.
2. Карпов Г.Н. Математические методы в задачах торможения трещин / Г.Н. Карпов, Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон // Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов: тез. докл. науч.-техн. конф. — Калининград, 1981. — С. 180–181.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. — К.: Наук. думка, 1981. — 324 с.
4. Панасюк И.В. Концентрация напряжений около двух круговых отверстий, соединенных узкой щелью / И.В. Панасюк // Проблемы прочности. — 1983. — № 9. — С. 17–20.
5. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С. Уфлянд. — М., Л.: Гостехиздат, 1950. — 232 с.
6. Русинко К.Н. Концентрация напряжений в пластине с двумя равными круговыми отверстиями при растяжении под углом к ее оси симметрии / К.Н. Русинко, А.Н. Пономаренко // Рукопись представлена Львов. политехн. ин–том. Деп. в ВИНИТИ 1 февраля 1983 г. — № 570. — 8 с.
7. Пономаренко О.М. Вплив двох кругових отворів, з'єднаних тріщиною, на напружений стан при зсуві безмежної пластини / О.М. Пономаренко // Вісник СевНТУ. — 2011. — № 120. — С. 222–223.

Надійшла до редакції 22.04.2013 р.

Пономаренко А.Н. Концентрация напряжений в бесконечной пластине с двумя круговыми отверстиями, соединенными трещиной, при растяжении под углом к линии центров отверстий

Представлено аналитическое решение задачи теории упругости по определению концентрации напряжений для бесконечной пластины, с двумя круговыми отверстиями, соединенными трещиной, при растяжении под углом к линии центров отверстий. Применяются биполярные координаты и функция напряжений Эри для плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: биполярные координаты, напряженное состояние, концентрация напряжений.

Ponomarenko O. The concentration of stresses in an infinite plate with two circular holes connected by a crack under the tension

The problem of stress concentration in an infinite thin plate with two circular holes connected by a crack under the tension is considered. The analysis is developed on the basis of the Airy's stresses function in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

Keywords: bipolar coordinates, strain state, concentration of stresses.