

УДК 621.71.027

**Е.В. Хромов, доцент, канд. техн. наук,****В.Г. Хромов, профессор, д-р техн. наук***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua***АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ПОДВИЖНОЙ ФРИКЦИОННОЙ СВЯЗЬЮ И ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТРЕНИЯ**

*Исследована система с одной степенью свободы при наличии подвижной фрикционной связи и постоянной характеристики трения. Выполнен обобщенный численный анализ поведения системы при произвольных начальных условиях.*

**Ключевые слова:** механическая система, подвижная фрикционная связь, автоколебания.

Уравнение движения для системы с подвижной фрикционной связью и постоянным коэффициентом трения при некоторой комбинации начальных условий имеет известное аналитическое решение, согласно которому амплитуда колебаний зависит от начальных условий [1-3]. Однако в общем случае уравнение нелинейное и аналитически не решается. В литературе известны отдельные примеры численного решения [4], однако обобщенный анализ поведения подобной системы при произвольных начальных условиях до настоящего времени не выполнялся и представляет одну из актуальных прикладных задач.

Целью исследований является анализ характера колебаний системы с упругой и подвижной фрикционной связями при произвольных начальных условиях.

Рассматривается система, схема которой изображена на рисунке 1. Тело соединено с неподвижным основанием посредством упругой связи и взаимодействует с подвижной фрикционной связью. Фрикционная связь выполнена в виде замкнутой ленты, установленной на двух роликах. Известно, что при некоторых условиях такая связь способствует увеличению кинетической энергии тела (возмущающее воздействие), при других – выполняет функцию гашения. Возникающие при этом колебания тела имеют ряд особенностей и называются автоколебаниями.

Согласно рисунку 1 на тело действуют силы: сила упругости  $F_y = -cx$  и сила трения скольжения  $F_0$ , направление которой противоположно относительной скорости  $V_r = (\dot{x} - V)$ , т.е.

$$F_T = -f \cdot mg \cdot \text{sign}(\dot{x} - V), \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости;  $\dot{x}$  – абсолютная скорость тела;  $V$  – скорость ленты;  $g$  – ускорение свободного падения;  $f$  – коэффициент трения скольжения.

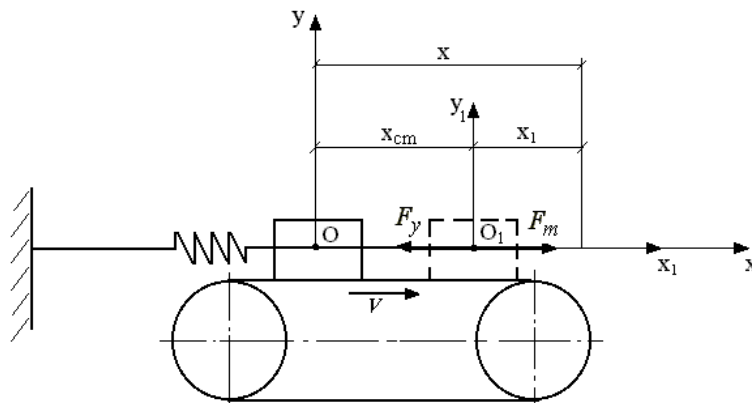


Рисунок 1 – Схема системы с поступательно движущейся фрикционной связью

Далее используется идеализированная модель, в которой отсутствуют силы, связанные с рассеянием энергии, кроме силы трения скольжения.

Если положение тела на схеме задается в системе  $(x, y)$  с началом в точке  $O$ , соответствующей недеформированному состоянию пружины, то движение описывается уравнением

$$m\ddot{x} = -cx - \text{sign}(\dot{x} - V) fmg \quad (2)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x + \text{sign}(\dot{x} - V)fg = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что коэффициент трения скольжения не зависит от скорости  $f = \text{const}$ . Уравнение (3) в общем случае не имеет аналитического решения. Однако при некоторой комбинации начальных условий решение все же существует [1 – 3]. Действительно, если относительная скорость тела удовлетворяет условию

$$V_r = (\dot{x} - V) \leq 0, \quad (4)$$

то тело по отношению к ленте все время движется влево, а сила трения в любой момент времени будет направлена вправо. Тогда уравнение (3) упрощается:

$$\ddot{x} + k^2 x - fg = 0. \quad (5)$$

Выберем дополнительную систему координат, начало которой соответствует положению статического равновесия тела (точка  $O_1$  на рисунке 1). Новая  $x_1$  и старая  $x$  координаты тела связаны соотношением  $x_1 = x - x_{\text{ст}} = x - \frac{fg}{k^2}$ , где  $x_{\text{ст}}$  – координата, соответствующая положению статического равновесия тела. Тогда  $\dot{x} = \dot{x}_1$  и  $\ddot{x} = \ddot{x}_1$ , а уравнение (5) принимает вид, подобный уравнению свободных колебаний груза на пружине:

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 + k^2 x_{\text{ст}} - fg = 0$$

или 
$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0. \quad (6)$$

Таким образом, при выполнении условия (4) тело будет совершать строго гармонические колебания:

$$x_1 = a \sin(kt + \varepsilon), \quad \dot{x}_1 = ak \cos(kt + \varepsilon), \quad (7)$$

где  $a = \sqrt{x_1^2(0) + \left(\frac{\dot{x}_1(0)}{k}\right)^2}$  – амплитуда колебаний;  $\varepsilon = \arctg\left(\frac{x_1(0) \cdot k}{\dot{x}_1(0)}\right)$  – начальная фаза;  $x_1(0), \dot{x}_1(0)$  – начальные условия.

Из (7) следует, что траектория движения системы на фазовых плоскостях  $(x_1, \dot{x}_1)$  и  $(x, \dot{x})$  описывается одним из следующих уравнений эллипса:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_1}{ak}\right)^2 = 1, \quad (8)$$

или 
$$\left(\frac{x - x_{\text{ст}}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{ak}\right)^2 = 1. \quad (9)$$

Представляет интерес, при каких начальных условиях колебания подчиняются гармоническим функциям. Подставим (7) в (4), получим:

$$V_r = ak \cos(kt + \varepsilon) - V \leq 0, \quad \text{или} \quad V / ak \geq \cos(kt + \varepsilon).$$

Последнее неравенство должно выполняться для произвольного момента времени  $t$ , что возможно, если  $V / ak \geq 1$  или  $a \leq \frac{V}{k}$ . Таким образом тело будет совершать строго гармонические колебания при начальных условиях, удовлетворяющих неравенству:

$$a = \sqrt{x_1^2(0) + \left(\frac{\dot{x}_1(0)}{k}\right)^2} \leq \frac{V}{k}. \quad (10)$$

Данное соотношение отражает тот факт, что автоколебания для исследуемой системы хотя и похожи по форме (7) на свободные колебания точки, однако по содержанию они существенно отличаются. Причиной автоколебаний является подвижная фрикционная связь. Действительно, если ленту на рисунке 1 остановить ( $V = 0$ ), то из условия (10) следует, что амплитуда должна быть равна нулю, т.е. колебания отсутствуют [4].

Для анализа движения системы при произвольных начальных условиях необходимо использовать численное решение уравнения (3). Рассмотрены три примера поведения системы со следующими

исходными данными: масса  $m = 5$  кг; коэффициент жесткости  $c = 100$  н/м; коэффициент трения  $f = 0.1$ ; собственная частота  $k = 4,47$  1/с; статическая деформация  $x_{ст} = 0,049$  м.

Результаты численных экспериментов в виде расчетных осциллограмм, фазовых портретов, а также графиков относительной скорости и силы трения скольжения изображены на рисунках 2-7. В приведенных примерах изменялись начальные условия движения либо скорость ленты.

Численные эксперименты подтверждают результаты теоретического анализа: если начальные условия удовлетворяют неравенству (10), то траектория движения системы в фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  описывается уравнением эллипса (9). При этом амплитуда колебаний или радиусы эллипса зависят от начальных условий, а сила трения скольжения все время остается положительной.

Если же условие (10) не выполняется, как в примерах 1-3, то движение имеет два этапа: 1) кратковременный этап неустановившегося движения, в процессе которого сила трения скольжения может изменяться по направлению, а траектория движения имеет незамкнутый характер (рисунки 2-7); 2) этап стационарных гармонических колебаний, когда траектория движения на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$

описывается уравнением эллипса  $\left(\frac{x - x_{ст}}{a_p}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{a_p k}\right)^2 = 1$  (предельный цикл). Здесь предельная амплитуда соответствует формуле  $a_p = \frac{V}{k}$ , т.е. зависит от собственной частоты и скорости подвижной связи, но не зависит от начальных условий.

#### Пример 1.

Начальные условия  $x(0) = 2,5 \cdot x_{ст}$ ;  $\dot{x}(0) = V$ ; скорость ленты  $V = 0,4$  м/с.

Условие  $\sqrt{x_1^2(0) + \left(\frac{\dot{x}_1(0)}{k}\right)^2} \leq \frac{V}{k}$  не выполняется.

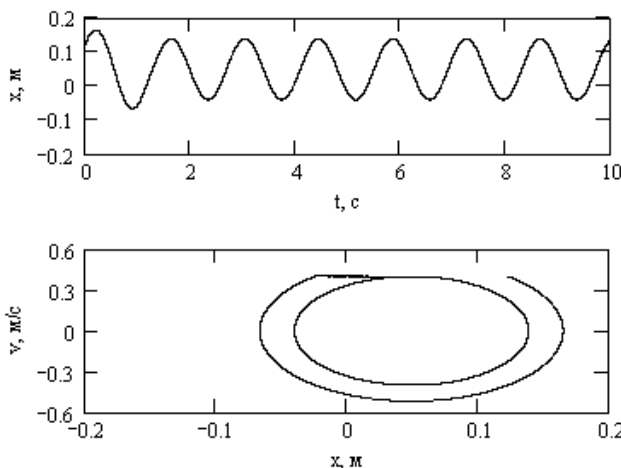


Рисунок 2 – Осциллограмма и фазовый портрет

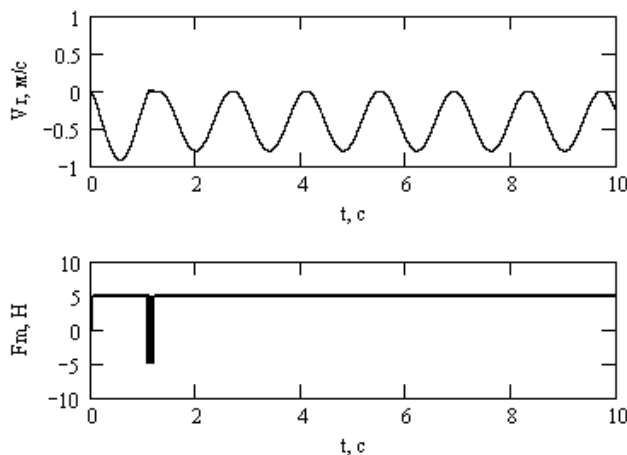


Рисунок 3 – Относительная скорость и сила трения

**Пример 2.**

Начальные условия  $x(0) = -2,5 \cdot x_{ст}$ ;  $\dot{x}(0) = V$ ; скорость ленты  $V = 0,4$  м/с.

Условие  $\sqrt{x_1^2(0) + \left(\frac{\dot{x}_1(0)}{k}\right)^2} \leq \frac{V}{k}$  не выполняется.

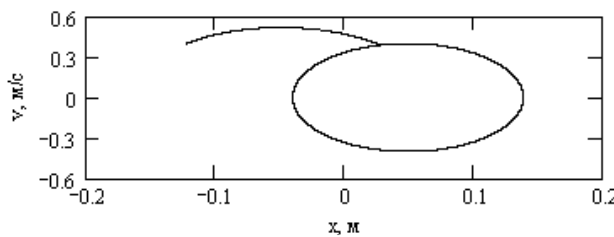
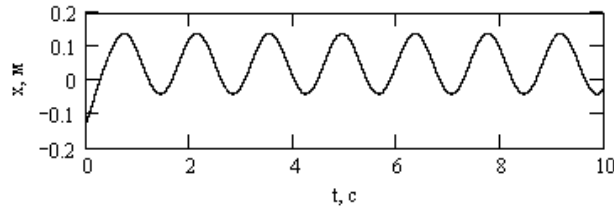


Рисунок 4 – Осциллограмма и фазовый портрет

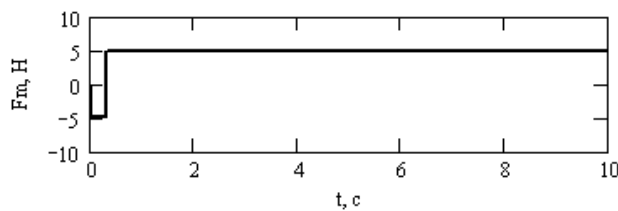
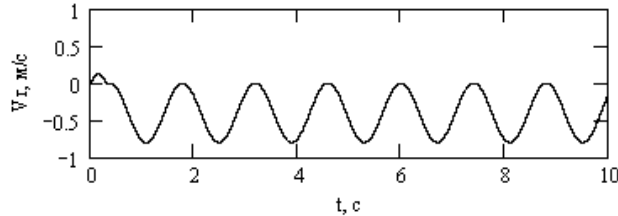


Рисунок 5 – Относительная скорость и сила трения

**Пример 3.**

Начальные условия  $x(0) = -2,5 \cdot x_{ст}$ ;  $\dot{x}(0) = V$ ; скорость ленты  $V = 0,2$  м/с.

Условие  $\sqrt{x_1^2(0) + \left(\frac{\dot{x}_1(0)}{k}\right)^2} \leq \frac{V}{k}$  не выполняется. Скорость ленты уменьшилась в два раза, по сравнению с предыдущими примерами.

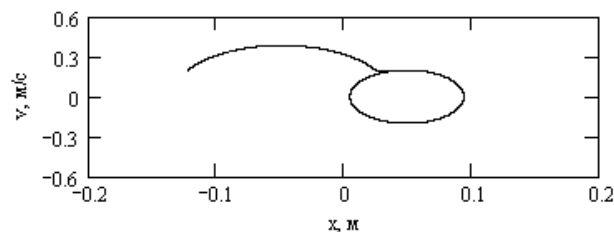
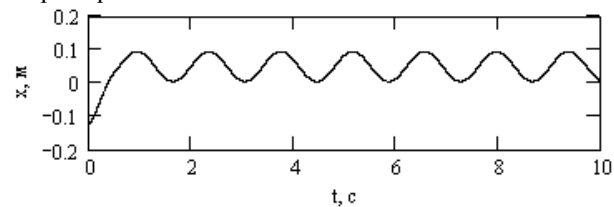


Рисунок 6 – Осциллограмма и фазовый портрет

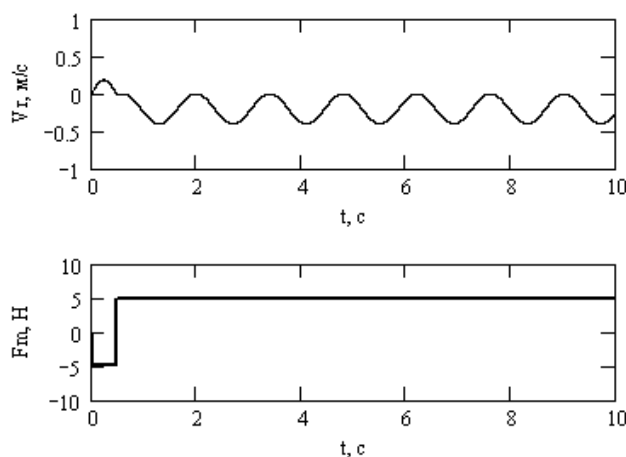


Рисунок 7 – Относительная скорость и сила трения

**Выводы**

Механическая система с подвижной фрикционной связью и постоянным коэффициентом трения на этапе установившегося движения при любых начальных условиях совершает гармонические колебания. Амплитуда установившихся колебаний может зависеть не только от начальных условий, но также от скорости подвижной фрикционной связи и собственной частоты исследуемой системы.

Для практических задач представляет так же интерес анализ движения подобной системы при переменном коэффициенте трения, что и является предметом дальнейших исследований.

**Библиографический список использованной литературы**

1. Магнус К. Колебания / К. Магнус.— М.: Мир, 1982. — 302 с.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. — М.: Физматгиз, 1967. — 193 с.
3. Левитский Н.И. Колебания в механизмах / Н.И. Левитский. — М.: Наука, 1988. — 334 с.
4. Хромов Е.В. Компьютерный анализ колебаний тела при наличии движущейся фрикционной связи // Новые материалы и технологии в металлургии и машиностроении. — Запорожье, 2000. — Вып. 2. — С. 71–74.

*Поступила в редакцию 14.05.2013 г.*

**Хромов Є.В., Хромов В.Г. Аналіз коливань системи з рухливим фрикційним зв'язком і постійним коефіцієнтом тертя**

Досліджена система з одним ступенем свободи з рухливим фрикційним зв'язком і постійній характеристиці тертя. Виконаний чисельний аналіз поведінки системи за довільних початкових умов.

**Ключеві слова:** механічна система, рухливий фрикційний зв'язок, автоколивання.

**Khromov E.V., Khromov V.G. Analysis of system vibrations with mobile friction connection and permanent coefficient of friction**

A system of single degree of freedom has been studied taking into account moving friction constraint and constant characteristics of friction. The generalized numerical analysis of behavior of the system has been carried out under arbitrary initial conditions.

**Keywords:** mechanical system, moving friction constraint, self-oscillation.