УДК 621.3

В.В. Костюков, канд. техн. наук, доцент
Севастопольский национальный технический университет
Ул. Университетская, 33, г. Севастополь, 99053, Украина
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

МЕТОД ВИЗУАЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Предложен метод, основанный на взаимной связи между корнями алгебраического полинома и его коэффициентами, которые с помощью частичных схем позволяют визуально определить коэффициенты характеристических уравнений переходных процессов в линейных электрических цепях.

Ключевые слова: *переходные процессы, характеристические уравнения, постоянные времени цепи.*

Введение. В современных условиях возрастает значение надежности, точности, эффективности электротехнических систем в связи с повышением их мощности, степени автоматизации управления. Поэтому вопросам исследования сложных нестационарных режимов таких систем уделяется все большее внимание. Интенсификация производственных процессов предъявляет повышенные требования к точности анализа переходных режимов и оправдывает необходимость разработки и совершенствования их расчетов.

Аналитическое исследование нестационарных режимов возможно лишь при определенной идеализации моделей электротехнических систем: линеаризация, устранение периодических коэффициентов. Поэтому анализ переходных процессов удается свести к задаче составления и решения совокупности линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для решения этой задачи применяются: классический и операторный методы, метод переменных состояния и др. [1, 2].

Физически наиболее наглядным является классический метод, главное содержание которого составляет формирование и решение линейного дифференциального уравнения относительно исследуемой переменной. В последнее время классический метод получил дальнейшее развитие в направлении численно-аналитического получения постоянных интегрирования [3], что еще более расширило возможность его применения для исследования переходных процессов в электротехнических системах.

Вместе с тем, одной из трудоемких особенностей классического метода является необходимость составления дифференциального, а, следовательно, и характеристического уравнения системы. Непосредственное применение законов Кирхгофа и дифференциальных соотношений между напряжениями и токами реактивных элементов для практически значимых схем достаточно громоздко. Чаще применяется метод формальной алгебраизации с заменой реактивных элементов их формальными сопротивлениями PL и $1/PC$.

Известно [1, 2], что корни характеристического уравнения совпадают с корнями определителя матрицы контурных сопротивлений или узловых проводимостей формальной схемы замещения. Однако и этот прием в случае разветвленных цепей для получения характеристического полинома требует громоздких алгебраических преобразований.

В связи с этим в последнее время проводятся исследования по совершенствованию методики составления дифференциальных уравнений электрических цепей. В работах Курганова С.А. [4] предлагается метод схемных определителей, направленный на автоматизацию составления уравнений в стационарных режимах постоянного и синусоидального тока. В работах Шакирова М.А. [5] предложены формулы прямого решения цепей второго порядка. Однако эти разработки не доведены до практических алгоритмов, пригодных для решения практических задач.

Целью статьи является дальнейшее развитие метода составления характеристических уравнений переходных процессов непосредственно по виду исследуемой линейной электрической цепи в направлении исключения громоздких алгебраических преобразований.

Методика и материалы исследования

Как известно [1], характеристическое уравнение линейной электрической цепи, соответствующее дифференциальному уравнению переходного процесса, имеет вид алгебраического полинома степени n

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

с корнями $x_1, x_2, ..., x_n$. Математические основы предлагаемого метода заключаются в связи между корнями и коэффициентами $a_1, a_2, ..., a_n$ уравнения (1) [6]. Эта связь выражается формулами

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} x_i\ ; \quad a_2 = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j\ ; \quad a_3 = -\sum_{i,j,k=1}^{n} x_i x_j x_k\ ; \ \ldots\ ; \quad a_n(-1)^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_4\ ; \quad i < j < k.$$

Для целей исследования нормируем уравнение (1), разделив все его слагаемые на a_n , что соответствует появлению в дифференциальном уравнении переходного процесса слагаемого, представляющего искомую переменную с коэффициентом, равным единице. После нормирования уравнение (1) приобретет вид

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + 1 = 0\ . \tag{2}$$

В предлагаемом методе определяющим понятием является частичная схема исходной электрической цепи. Эта схема содержит только один реактивный элемент (индуктивность или емкость). Остальные индуктивности закорачиваются, а емкости разрываются; резисторы остаются неизменными, а независимые источники заменяются их внутренними сопротивлениями. Количество частичных схем равно количеству реактивных элементов в исходной схеме.

В каждой частичной схеме относительно выводов реактивного элемента определяется эквивалентное сопротивление резистивных сопротивлений $r_Э$. В результате каждая частичная схема приобретает вид элементарного контура, состоящего из активного сопротивления $r_Э$ и индуктивности L или емкости C с постоянной времени $\tau = r_Э C$ или $\tau = \dfrac{L}{r_Э}$.

Для иллюстрации рассмотрим схему, изображенную на рисунке 1.

Заменяя идеальный источник ЭДС коротким замыканием, получаем частичную схему (рисунок 1, б), а после определения эквивалентного сопротивления частичная схема приводится к виду на рисунке 1, в с постоянной времени

$$\tau = r_Э C_4 = \left(\frac{r_2 r_5}{r_2 + r_5} + \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} \right) C_4\ .$$

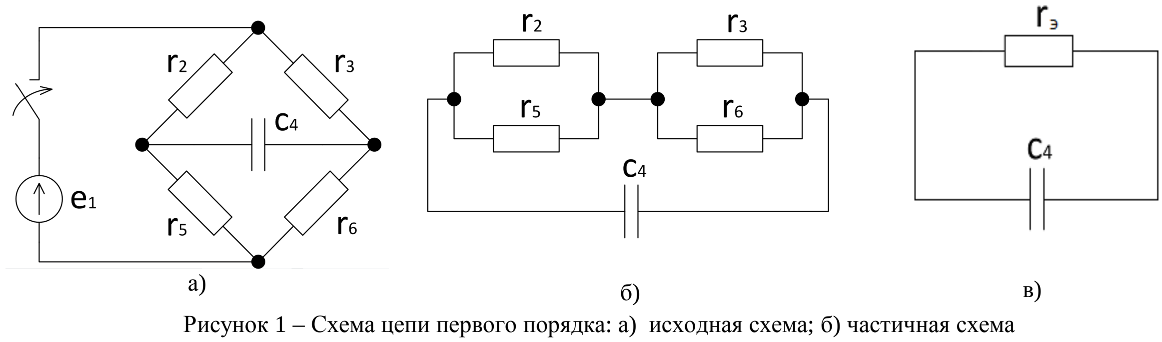


Рисунок 1 – Схема цепи первого порядка: а) исходная схема; б) частичная схема с закороченной ЭДС; в) частичная схема с эквивалентным сопротивлением

Основной результат метода состоит в том, что сумма постоянных времени всех частичных схем оказывается равна коэффициенту при первой производной нормированного дифференциального уравнения (2)

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = b_1\ . \tag{3}$$

Обоснование этого метода может быть выполнено с использованием упомянутой связи между корнями и коэффициентами алгебраического полинома степени n.

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примерах линейных электрических цепей второго и третьего порядка.Рассмотрим емкостную цепь второго порядка (рисунок 2, а). Для составления дифференциального уравнения традиционным методом составим формальную схему замещения, заменив емкость формальными сопротивлениями $\dfrac{1}{pC_1}$ и $\dfrac{1}{pC_3}$.

Тогда матрица узловых проводимостей будет состоять всего из одного элемента, и искомое характеристическое уравнение получим, приравнивая этот элемент к нулю.

$$pC_1 + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{\dfrac{1}{pC_3} + r_3} = 0$$

или

$$p^2 C_1 C_3 r_2 r_3 + p(C_1 r_2 + r_2 C_3 + r_3 C_3) + 1 = 0\,. \qquad (4)$$

Частичные схемы, соответствующие емкостям C_1 и C_3, изображены на рисунках 2, б и 2, в и имеют эквивалентные сопротивления относительно C_3: $r_{экв\,3} = r_2 + r_3$; относительно C_1: $r_{экв\,1} = r_2$. Соответствующие постоянные времени имеют вид: $\tau_3 = C_3(r_2 + r_3)$; $\tau_1 = C_1 r_2$.

Сумма (3) этих постоянных времени дает коэффициент характеристического уравнения (4) при первой производной.

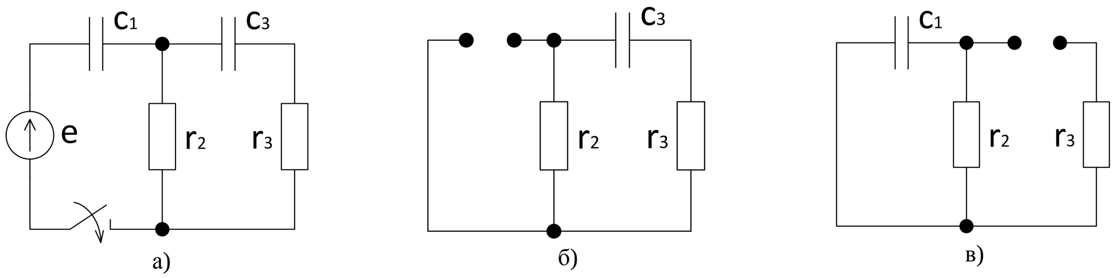


Рисунок 2 – Схема цепи второго порядка: а) исходная схема; б) частичная схема с емкостью C_3; в) частичная схема с емкостью C_1

Предлагаемый метод дает правильный результат и в, кажется, безнадежных случаях, например, для схемы, изображенной на рисунке 3, а.

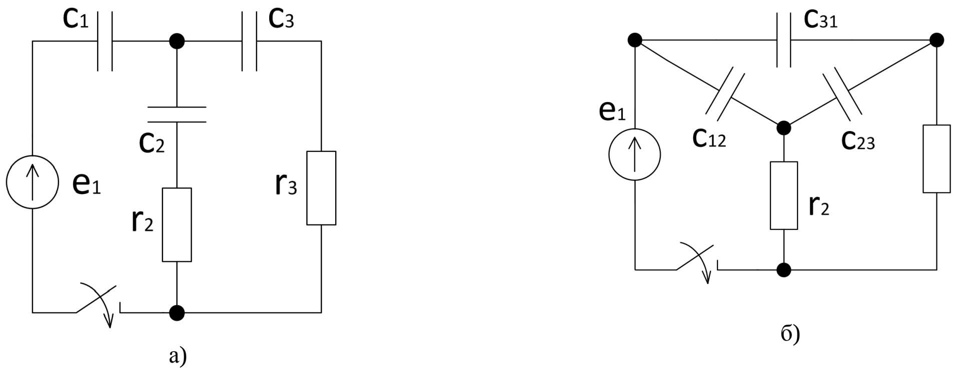


Рисунок 3 – Схема цепи второго порядка: а) – схема с емкостной звездой; б) – схема с емкостным треугольником

Для этой схемы после громоздких преобразований получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{C_2 C_3 C_1 r_3 r_2}{C_3 + C_2 + C_1} \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \left(\frac{C_2 C_3 r_2}{C_3 + C_2 + C_1} + \frac{C_2 C_1 r_2}{C_3 + C_2 + C_1} + \frac{C_2 C_3 r_3}{C_3 + C_2 + C_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1 C_3 r_3}{C_3 + C_2 + C_1} \right) \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 = \frac{C_2 C_3}{C_3 + C_2 + C_1} \left(\frac{de_1}{dt} + \frac{C_1}{C_3} \frac{de_1}{dt} + r_3 C_1 \frac{d^2 e_1}{dt^2} \right).$$

В частичных схемах из емкостной звезды для каждой из них постоянные времени окажутся равными бесконечности. Но, преобразовав емкостную звезду в емкостной треугольник (рисунок 3, б), определив величины емкостей

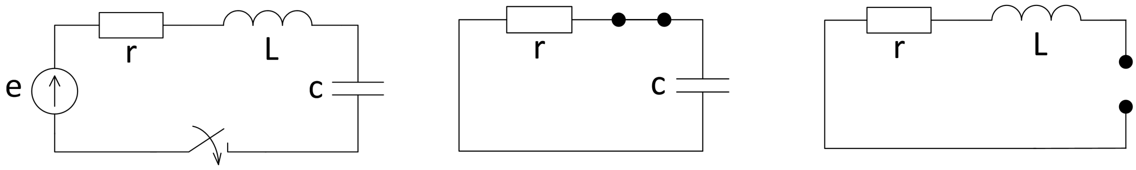
$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_3 + C_2 + C_1}; \qquad C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_3 + C_2 + C_1}; \qquad C_{31} = \frac{C_1 C_3}{C_3 + C_2 + C_1};$$

и найдя для новых емкостей постоянные времени

$$\tau_{12} = C_{12} r_2; \qquad \tau_{23} = (r_2 + r_3) C_{23}; \qquad \tau_{31} = C_{31} r_3,$$

получим, что сумма постоянных времени дает коэффициент, стоящий при первой производной в дифференциальном уравнении.

Такой подход может быть применен и к схемам с разнородными реактивными элементами (рисунок 4, а).



а) б) в)

Рисунок 4 – Схема цепи второго порядка: а) исходная схема; б) частичная схема с емкостью; в) частичная схема с индуктивностью

Из частичных схем (рисунок 4, б, в) получаются постоянные времени

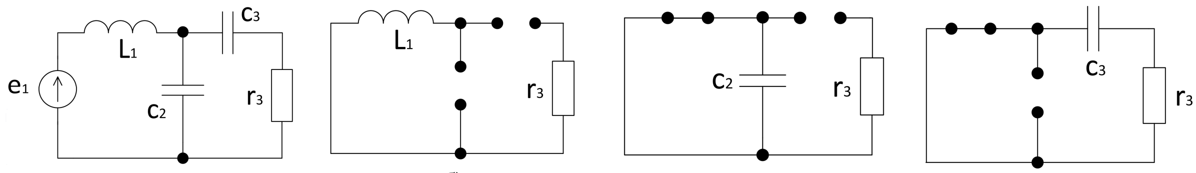
$$\tau_C = r\,C\,; \quad \tau_L = \frac{L}{\infty} = 0\,.$$

Постоянная времени для частичной схемы с индуктивностью равна нулю. Но сумма постоянных времени дает коэффициент, стоящий при первой производной нормированного относительно искомой величины дифференциального уравнения

$$LC\frac{d^2 i}{dt^2} + rC\frac{di}{dt} + i = C\frac{de}{dt}\,.$$

Цепь третьего порядка (рисунок 5, а) описывается дифференциальным уравнением

$$L_1 C_2 C_3 r_3 \frac{d^3 i_3}{dt^3} + \left(L_1 C_2 + L_1 C_3\right)\frac{d^2 i_3}{dt^2} + C_3 r_3 \frac{di_3}{dt} + i_3 = C_3\frac{de}{dt}\,.$$



а) б) в) г)

Рисунок 5– Схема цепи третьего порядка: а) исходная схема; б) частичная схема с индуктивностью L_1; в) частичная схема с емкостью C_3; г) частичная схема с емкостью C_1

Для частичных схем (рисунок 5 б, в, г) определяются постоянные времени

$$\tau_1 = \frac{L_1}{\infty} = 0\,; \quad \tau_2 = C_2 \cdot 0 = 0\,; \quad \tau_3 = C_3 r_3\,.$$

Сумма этих постоянных времени также дает коэффициент, стоящий при первой производной дифференциального уравнения, из которого получается характеристическое уравнение.

Направлением дальнейших исследований может быть получение с помощью частичных схем коэффициентов при старших производных в дифференциальных уравнениях.

Вывод

Предложенный метод, основанный на взаимной связи между корнями алгебраического полинома и его коэффициентами, с помощью частичных схем позволяет визуально с минимальными затратами определить некоторые коэффициенты характеристических уравнений переходных процессов линейных электрических цепей.

Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка методики определения всех коэффициентов характеристических уравнений на основе частичных схем.

Библиографический список использованной литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи / Л.А. Бессонов. — М.: Изд-во «Юрайт», 2012. — 701 с.

2. Демирчян К.С. Моделирование и машинный расчет электрических цепей / К.С. Демирчян, П.А. Бутырин. — М.: Высш. шк., 1988. — 335 с.

3. Костюков В.В. Численно-аналитическое моделирование переходных процессов в электротехнических системах / В.В. Костюков, Л.Н. Канов // Електротехніка та електроенергетика. — 2007. — № 1. — С. 52–56.

4. Курганов С.А. Неявный принцип наложения в линейных электрических цепях / С.А. Курганов, В.В. Филатов // Электричество. — 2005. — № 1. — С. 32–43.

5. Практикум по ТОЭ. Часть 2 / М.А. Шакиров, Р.П. Киятин, В.С. Лопатин, В.Н. Воронин и др. — С-Пб.: Изд-во С-ПбГТУ, 2000. — 152 с.

6. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1968. — 720 с.

Поступила в редакцию 08.05.2013 г.

Костюков В.В. Метод візуальної побудови характеристичних рівнянь лінійних електричних кіл

Отримання коефіцієнтів при першій похідній характеристичного рівняння за допомогою частинних схем.

Ключові слова: перехідні процеси, характеристичні рівняння, постійні часу.

Kostjukov V.V. The method of the visual construction of characterizing equations of the line electrical circuits

Acquisition of coefficients at the first derivative of characteristic equation by means of partial diagrams.

Keywords: transitory processes, characteristic equation, time constants.