УДК 621.313:519.81

В.К. Маригодов, профессор, д-р техн. наук,
Э.Ф. Бабуров, профессор, д-р техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская, 33, Севастополь, Украина, 99053
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ ВОЗМОЖНЫХ КОАЛИЦИЙ

Рассмотрена антагонистическая многошаговая игра трех энергокомпаний, поставляющих электроэнергию для одного региона, при условии образования коалиций. Определены оптимальные стратегии и цена игры с учетом степени отношения ресурсов игроков и количества шагов.

Ключевые слова: *энергокомпания, энергоресурс, коалиция, оптимальная стратегия, функция выигрыша, симплекс.*

Постановка проблемы. Пусть имеются три энергокомпании А, Б и В, обладающие определенными энергоресурсами W_1, W_2, W_3 соответственно. Компании распределяют свои ресурсы между n регионами, направляя в в i-тый регион количества энергоресурсов, равные x_i, y_i, z_i. Если при этом два из трёх игроков (энергокомпаний) создают коалицию против третьего игрока, то игра сводится к классу игр двух игроков против оставшегося вне коалиции. Возможные в этой игре коалиции можно обозначить как 1,2; 1,3; и 2,3, где цифры означают соответствующих игроков. Поскольку задача нахождения оптимальных (минимаксных) стратегий и цены игры останется идентичной для любых коалиций, то можно рассмотреть одну из них.

Анализ последних публикаций и исследований. Аналогичные задачи, связанные с распределением энергоресурсов для игры двух, трех и пяти лиц, рассмотрены в [1–3]. Однако в этих публикациях не были исследованы вопросы определения цены игры в зависимости от относительных ресурсов и ситуации многошаговости выбора функции выигрыша, которые имеют отношение к нерешенным ранее частям проблемы энергораспределения.

Цель статьи — построить зависимость цены игры от количества последовательных действий (шагов), а также от степени относительных ресурсов созданной коалиции и игрока, не вошедшего в коалицию. При этом не ставится задача «разорения» игрока, оставшегося вне коалиции.

Изложение основного материала. Считаем, что энергоресурсы каждой из электрокомпаний одинаковы. Тогда множество n-мерных векторов ресурсов каждого из игроков будут находиться из следующих соотношений:

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_1^{\mathrm{n}} = \{x = (x_1,..., x_n)\ ;\ \ x_i \ge 0,\ \ (i = \overline{1,n})\ ;\ \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \mathrm{W}_1; \\ \mathrm{Q}_2^{\mathrm{n}} = \left\{ y = (y_1,..., y_n)\ ;\ \ y_i \ge 0,\ \ (i - \overline{1,n})\ ;\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \mathrm{W}_2; \right. \\ \mathrm{Q}_3^{\mathrm{n}} = \{z = (z_1,..., z_n)\ ;\ \ z_i \ge 0,\ \ (i = \overline{1,n})\ ;\sum\limits_{i=1}^{n} z_i = \mathrm{W}_3. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим одну из возможных коалиций, например, между электрокомпаниями А и Б против В. Функция выигрыша (цена игры) может быть записана в виде

$$\mathrm{U}(x_{1,2}, z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i (x_{1,2i}, z_i), \tag{2}$$

где $\mathrm{U}_i(x_{1,2}, z_i)$ — выигрыш энергокомпаний А и Б в коалиции в регионе i. Таким образом, имеем стратегическую игру на произведении двух симплексов $\mathrm{S}_{1,2}^{\mathrm{n}}$ и $\mathrm{S}_3^{\mathrm{n}}$, т.е.

$$\Gamma \ = \ \left\langle \mathrm{S}\ _{1,2}^{\mathrm{n}}\ \ \mathrm{S}\ _3^{\mathrm{n}}\ ,\ \mathrm{U}\ \right\rangle . \tag{3}$$

Пусть количества энергоресурсов коалиции А + Б являются параметрами множеств $\mathrm{X}_{1,2}$ и Z, а также могут принимать любые значения от нуля до $\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2$ и Z соответственно.

Если рассматривать игру как многошаговую, то при фиксированном количестве шагов k будем иметь дело с двухпараметрическим семейством игровых задач по распределению ресурсов, которые обозначим как $\Gamma_K(X_{1,2}, Z)$. Число шагов игры $k = \overline{1, n}$.

Исходная задача получается при $k = n$, $X_{1,2} = W_1 + W_2$, $Z = W_3$. Можно ввести следующие обозначения соответственно для верхней и нижней цены игры:

$$\begin{cases} \overline{U_K}(X_{1,2}, Z) = \min\limits_{(z_1,\dots,z_k)\,\in\, S_3^k} \quad \max\limits_{(x_{1,2\;1},\dots,x_{1,2\;n})\,\in\, S_{1,2}^k} \sum\limits_{i=1}^{k} U_i(x_{1,2i}, z_i)\ ; \\ \underline{U_K}(X_{1,2}, Z) = \max\limits_{(x_{1,2\;1},\dots,x_{1,2\;k})\,\in\, S_{1,2}^k} \quad \min\limits_{(z_1,\dots,z_k)\,\in\, S_3^k} \sum\limits_{i=1}^{k} U_i(x_{1,2\;i}, z_i)\ . \end{cases} \tag{4}$$

Результирующая цена игры находится как

$$U_K(X_{1,2}, Z) = \mathrm{Val}\ \Gamma_K(X_{1,2}, Z). \tag{5}$$

Предположим, что в исходной игре Г существует ситуация равновесия в чистых стратегиях энергокомпаний $(x_{1,2\;0}, z_0)$.

Тогда при условиях $X_{1,2} = (W_1 + W_2) - \sum\limits_{i=k+1}^{n} x_{120i}$, $Z = W_3 - \sum\limits_{i=k+1}^{n} z_{0i}$ справедливы следующие рекуррентные соотношения, устанавливающие равенство максимина и минимакса [4]:

$$\begin{aligned} U_K(X_{1,2}, Z) &= \max_{0 \le x_{1,2k} \le X_{1,2}} \quad \min_{0 \le z_k \le Z} \left[U_K(x_{1,2k}, z_k) + U_{K\text{-}1}(X_{1,2} - x_{1,2k}, Z - z_k) \right] = \\ &= \min_{0 \le z_k \le Z} \quad \max_{0 \le x_{1,2k} \le X_{1,2}} \left[U_K(x_{1,2k}, z_k) + U_{K\text{-}1}(X_{1,2} - x_{1,2k}, Z - z_k) \right]\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $k = \overline{2, n}$; $0 \le X_{1,2} \le W_{1,2}$; $0 \le Z \le W_3$; $\underline{U_1}(X_{1,2}, Z) = \overline{U_1}(X_{1,2}, Z)$.

В этом случае справедливы равенства:

$$\underline{U_K}(X_{1,2}, Z) = \overline{U_K}(X_{1,2}, Z) = U_K(X_{1,2}, Z_K);$$

$$\underline{U_K}(X_{1,2}, Z) = \max_{0 \le x_{1,2k} \le X_{1,2}} \quad \min_{0 \le z_k \le Z} \left[U_K(x_{1,2k}, z_k) \pm \underline{U_K}(X_{1,2} - x_{1,2k}, Z - z_k) \right]\ ; \tag{7}$$

$$\overline{U_K}(X_{1,2}, Z) = \min_{0 \le z_k \le Z} \quad \max_{0 \le x_{1,2k} \le X_{1,2}} \left[U_K(x_{1,2k}, z_k) + \overline{U_K}(x_{1,2K}, z_K) + \overline{U}_K(X_{1,2K}, Z - z_K) \right] \tag{8}$$

при $k = \overline{2, n}$; $0 \le X_{1,2} \le W_{1,2}$; $0 \le Z \le W_3$; $\underline{U_1}(X_{1,2}, Z) = \overline{U_1}(X_{1,2}, Z) = U(X_{1,2}, Z)$

Последние равенства определяют цену игры и оптимальные (минимаксные) стратегии энергокомпаний.

Если известно, что в исходной игре Г у коалиции и игрока В существуют внутренние оптимальные чистые стратегии, то для их нахождения следует решить систему уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_i}{\partial x_{1,2i}} + \mu_1 = 0, \\ \dfrac{\partial U_i}{\partial z_i} + \mu_2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1,2i} = W_{1,2}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} z_i = W_3, \end{cases} \tag{9}$$

где $x_{1,2i} \ge 0$; $z_i \ge 0$ $(i = \overline{1, n})$; μ_1, μ_2 — постоянные коэффициенты.

Решение системы уравнений (9) позволяет отыскать точки, которые соответствуют оптимальным внутренним стратегиям игроков.

В качестве примера примем, что функция выигрыша имеет вид

$$\mathrm{U}\left(x_{1,2\mathrm{i}}, z\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{k_i}\left(x_{1,2i} / z_i\right)^{\gamma_i} \quad \left(\mathrm{k} \geq 0,\ \ i = \overline{1, n}\right) , \tag{10}$$

где $0 \leq x_{1,2\mathrm{i}} \leq \mathrm{W}_{1,2}$; $0 \leq z_i \leq Z$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$; $\sum_{i=1}^{n} x_{1,2i} = \mathrm{W}_{1,2}$; $\sum_{i=1}^{n} z_i = \mathrm{Z}$;

При $0 \leq \gamma_i \leq 1$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ функция выигрыша $\mathrm{U}\left(x_{1,2\mathrm{i}}, z\right)$ является вогнутой по совокупности переменных x_i и выпуклой по совокупности переменных z_i. Из этого следует, что существует седловая точка в чистых стратегиях $\left(x_{1,20}, z_0\right)$, где $x_{1,20}$ и z_0 представляют собой внутренние точки симплексов $\mathrm{S}_{1,2}^{\mathrm{n}}$ и $\mathrm{S}_3^{\mathrm{n}}$. В этом случае *оптимальные (минимаксные) стратегии и цена игры* находятся как

$$x_{1,20} = \frac{k_i \gamma_i \left(\dfrac{\mathrm{W}_{1,2}}{\mathrm{W}_3}\right)^{\gamma_i} \mathrm{W}_{1,2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \left(\dfrac{\mathrm{W}_{1,2}}{\mathrm{W}_3}\right)^{\gamma_i}}; \qquad \mathrm{z}_{0i} = \frac{k_i \gamma_i \left(\dfrac{\mathrm{W}_{1,2}}{\mathrm{W}_3}\right)^{\gamma_i} \mathrm{W}_3}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \gamma_i \left(\dfrac{\mathrm{W}_{1,2}}{\mathrm{W}_3}\right)^{\gamma_i}}; \tag{11}$$

$$\mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\frac{\mathrm{W}_{1,2}}{\mathrm{W}_3}\right)^{\gamma_i}, \qquad 0 \leq \gamma_i \leq 1, \qquad k_i = \overline{2, n}\,. \tag{12}$$

Таким образом, выражения (1) – (12) дают возможность решить поставленную задачу распределения энергоресурсов между созданной коалицией игроков 1, 2 и игроком 3, не вошедшим в коалицию. На рисунке 1 построен график зависимости цены игры от значения коэффициента γ_i. При этом число шагов k_i задавалось в пределах $1 \leq k_i \leq 5$, а отношение энергоресурсов игровых сторон $\mathrm{W}_{1,2} / \mathrm{W}_3$ выбиралось равным 2. Для вариантов других отношений требуются отдельные исследования.

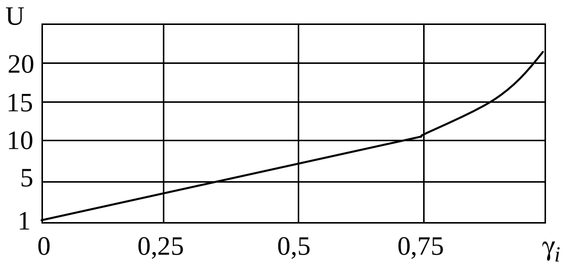

Рисунок 1 – Зависимость цены игры от коэффициента γ_i

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Таким образом, определены цена коалиционной игры и оптимальные стратегии энергокомпаний в борьбе за рациональное энергоснабжение региона. Построена зависимость цены игры от коэффициента, определяющего степень использования относительных ресурсов коалиции и игрока, не вошедшего в неё. При этом показано, что цена игры монотонно возрастает с увеличением количества шагов и упомянутого коэффициента. Аналогичные результаты могут быть получены для любых возможных коалиций из двух игроков.

Задачи дальнейших исследований представляются в следующем: 1) решение задачи оптимального распределения энергоресурсов между коалициями из трех и более энергокомпаний; 2) использование математического аппарата векторной (многокритериальной) оптимизации при различных отношениях энергоресурсов игровых сторон.

Библиографический список использованной литературы

1. Маригодов В.К. Распределение электроэнергии как система массового обслуживания со смешанными приоритетами / В.К. Маригодов // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. — 2009. — Вып. 97. — С. 66–68.

2. Маригодов В.К. Теоретико-игровой подход к распределению энергоресурсов / В.К. Маригодов, Г.А. Тихонов // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. — 2011. — Вып. 119. — С. 95–97.

3. Маригодов В.К. Оценка эффективности системы энергоснабжения с позиций теории игр / В.К. Маригодов, Г.А. Тихонов // Вопросы теории и проектирования электрических машин: сб. науч. трудов Ульяновского гос. университета. — Ульяновск, 2006. — С. 138–143.

4. Фокин И.Н. Некоторые игровые задачи распределения ресурсов / И.Н. Фокин // Теория игр: сб. науч. тр. АН Армянской ССР. — Ереван: Изд-во Ереванского гос. ун-та., 1973. — С. 331–336.

Поступила в редакцию 20.11.2012 г.

Марігодов В.К., Бабуров Е.Ф. Теоретико-ігрова оцінка розподілу енергоресурсів в умовах можливих коаліцій

Розглянута антагоністична багатокрокова гра трьох енергокомпаній, які постачають електроенергію для одного регіону при умові можливості створення коаліцій. Визначені оптимальні стратегії та ціна гри із врахуванням ступеня відношення ресурсів гравців і кількості кроків.

Ключові слова: енергокомпанія, енергоресурс, коаліція, оптимальна стратегія, функція виграшу, симплекс.

Marigodov V.K., Baburov E.F. Theoretical game estimation of distribution power energy resources by the conditions of possibility coalitions

This article concerns the antagonistic multistep game of three power energy company with put on the stage electrical energy for one region by the condition of possibility formation coalitions. Optimal strategies and value of a came a glance of degree attitude to resources of the players and quantity of the steps has been determinate.

Keywords: energy company, energy resource, coalition, optimal strategy, function of winning.