

УДК 624

А.И. Бохонский, профессор, д-р техн. наук,**А.И. Рыжков, аспирант**

Севастопольский национальный технический университет,

ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: bohon.alex@mail.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСНЫМ ДВИЖЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Исследовано сложное движение (переносное и относительное) систем с нелинейной характеристикой восстанавливающей либо нелинейным сопротивлением движению. Линеаризация позволила найти оптимальное управление, при котором достигается абсолютный покой системы в конце движения.

Ключевые слова: нелинейная система, линеаризация, оптимальное управление, переносное и относительное движения.

Введение. Задачам синтеза оптимальных управлений перемещением упруго деформируемых систем посвящены работы [1–3], в которых на основании реверсионного принципа обоснованы критерии оптимальности управления. Время переносного движения находилось с использованием теории моментов [4].

Задачам оптимального управления переносным движением физически нелинейных систем и до настоящего времени должного внимания не уделялось.

Цель исследований – анализ поведения физически нелинейных систем с одной степенью свободы при их оптимальном переносном движении. Управление движением физически нелинейных объектов иллюстрируется на примерах систем с одной степенью свободы.

1. Пример нелинейно упругой системы

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания нелинейной системы (в относительном движении):

$$m\ddot{x} + \alpha x^3 = -mU_e(t) \quad (1)$$

или

$$\ddot{x} + nx^3 = -U_e(t),$$

где $n = \alpha/m$. В случае нелинейности в виде аналитической функции $f(x) = \alpha x^3$ восстанавливающей силы (рисунок 1) для приближенного определения частоты собственных колебаний использован метод, который заключается в линеаризации "взвешенного" квадратичного уклонения [5]

$$I = \int_{-a}^{+a} \{ [nx^3 - k^2 x] x \}^2 dx = \min, \quad (2)$$

где k^2 – квадрат частоты линейной системы, который найден из условия

$$\frac{\partial J}{\partial (k^2)} = 0.$$

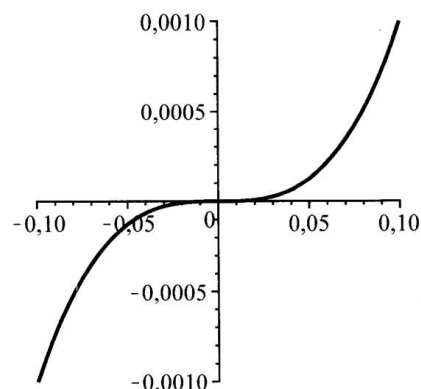


Рисунок 1 – График нелинейной аналитической функции восстанавливающей силы

В процедуре линеаризации частота эквивалентной системы вычислялась при $x_{\max} = a$ и $v_{\max} = 0$.

Получено: $k^2 = \frac{5}{7}na^2$ или $k = 0,847a\sqrt{n}$; период собственных колебаний $T_1 = \frac{2\pi}{k}$.

Численный пример. Исходные данные: $a = 1,09$; $\alpha = 1000$; $k = 28,78 \text{ с}^{-1}$; $T_1 = 0,22 \text{ с}$. Общее время движения $T = 0,88 \text{ с}$.

При численном анализе движения системы принято $p = \frac{k}{4}$ и тогда, согласно [1], время движения $T = \frac{2\pi}{p}$. Относительный покой в начальный момент времени: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Скорость $V_e(t)$ и перемещение $S_e(t)$ переносного движения найдена в результате интегрирования уравнения

$$\frac{d^2 S_e}{dt^2} = A \cdot \sin(pt) \quad (3)$$

при краевых условиях

$$S_e(0) = 0, V_e(0) = 0, V_e(T) = 0, S_e(T) = L, \quad (4)$$

где L – общее переносное перемещение системы. С учетом (4) ускорение, скорость и перемещение принимают вид:

$$U_e(t) = \frac{Lp^2}{2\pi} \cdot \sin(pt), \quad V_e(t) = \frac{Lp}{2\pi} \cdot [1 - \cos(pt)], \quad S_e(t) = \frac{L}{2\pi} \cdot [pt - \sin(pt)]. \quad (5)$$

Численное интегрирование исходного нелинейного уравнения выполнено в MathCAD. Графики $x(t)$ и $V(t)$ изображены на рисунке 2.

$$\begin{aligned} x &:= \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0. \end{pmatrix} & n &:= 1000 & a &:= 1.09 & k &:= 0.83472 \cdot a \cdot \sqrt{n} & k &= 28.772 \\ & & & & & & & & & T_1 &:= 2 \cdot \frac{\pi}{k} \\ A &:= 1 & D(t, x) &:= \begin{bmatrix} x_1 \\ -[n \cdot (x_0)]^3 - A \cdot \sin(p \cdot t) \end{bmatrix} & p &:= \frac{k}{4} \\ & & & & & & & & & T_1 &= 0.218 \\ & & & & & & & & & T &:= 2 \cdot \frac{\pi}{p} & T &= 0.874 \end{aligned}$$

$z := \text{rkfixed}(x, 0, T, 900, D)$

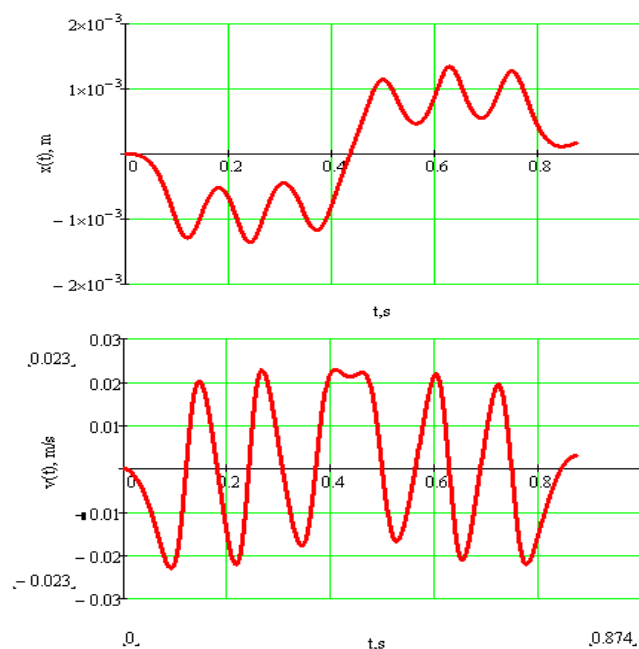


Рисунок 2 – Графики $x(t)$ и $v(t)$ относительного движения нелинейной системы

Несмотря на приближенность решения, удается практически достичь относительного покоя нелинейной упругой системы в момент времени T .

На рисунке 3 изображены графики переносного движения, которые подтверждают наступление переносного покоя в момент T . Таким образом, в итоге достигается абсолютный покой к концу движения.

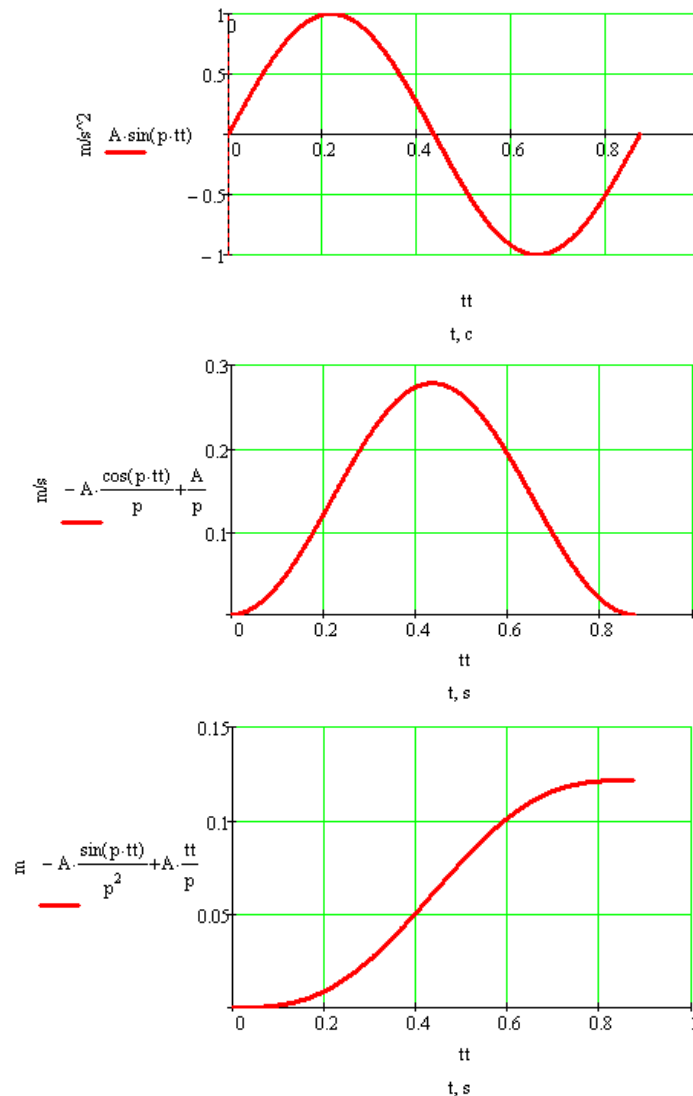


Рисунок 3 – Графики переносного переменного ускорения $U_e(t)$, скорости $V_e(t)$ и перемещения $S_e(t)$

Погрешности, связанные с достижением абсолютного покоя, обусловлены приближенным вычислением периода собственных колебаний нелинейной системы и соответствующего ему общего времени движения, а также в связи с численным интегрированием.

2. Пример движения системы с нелинейным сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости

Исследовано относительное движение системы в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости. Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 \dot{x} \cdot |\dot{x}| + k_2 x = -U_e(t), \quad (6)$$

где второй член может быть также записан эквивалентным образом $k_1 \dot{x}^2 \cdot \text{sign}(\dot{x})$. Линеаризация уравнения (6) заключается в замене сопротивления, пропорционального квадрату скорости, на линейно-вязкое сопротивление (по гипотезе Кельвина-Фойгта). При заданном коэффициенте k_1 эквивалентный коэффициент линейно-вязкого сопротивления k_2 найден из уравнения:

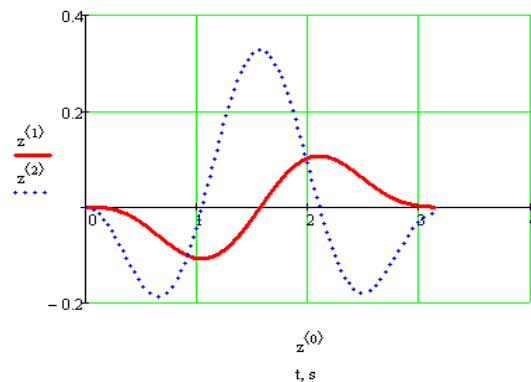
$$S = \int_0^{\frac{\pi}{k}} [k_1 \cdot \sin(kt)]^2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{k}} k_2 \cdot \sin(kt) dt = 0. \quad (7)$$

Получено: $k_2 \cong 0,785k_1^2$. При $k_1 = 0,8$ следует $k_2 = 0,032$. На рисунке 4 изображены графики перемещения и скорости для линеаризованной системы и исходной нелинейной. Эквивалентная замена одного типа сопротивления другим позволяет наблюдать тождественные колебательные процессы.

$$k1 := 0.2$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -k1 \cdot ((x_1)) \cdot |x_1| - 16 \cdot x_0 - (1 \cdot \sin(2 \cdot t)) \end{pmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 3.1416, 900, D)$$



$$k1 = 0.2$$

$$x := \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k2 := 0.8 \cdot k1^2 \quad k2 = 0.032 \quad p := 2$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -k2 \cdot x_1 - 16 \cdot x_0 - 1 \cdot \sin(p \cdot t) \end{pmatrix}$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, 3.1416, 900, D)$$

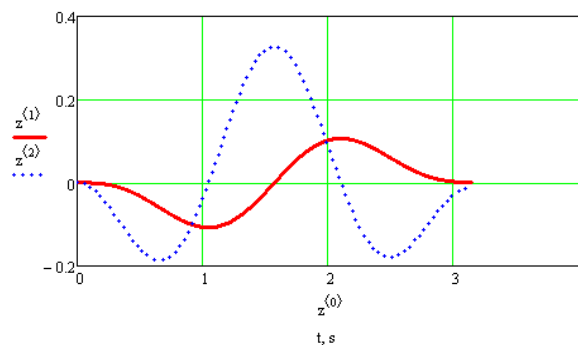


Рисунок 4 – Графики относительного перемещения $x(t)$ и скорости $v(t)$ системы с нелинейным демпфированием и эквивалентной линейно-вязкой системы

Выводы

1. Для формирования управлений переносным движением нелинейных систем использована процедура линеаризации, которая позволила приближенно найти период собственных колебаний и соответственно требуемое общее время движения системы до достижения состояния абсолютного покоя (в конечном положении).

2. Предложенный методологический подход может быть распространен на нелинейные системы с конечным числом степеней свободы.

Задачей дальнейших исследований является разработка алгоритма управления нелинейными нестационарными системами, у которых в процессе функционирования изменяются частоты собственных колебаний.

Библиографический список использованной литературы

1. Бохо́нский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохо́нский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский. — Севастополь, 2007. — 246 с.
2. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.Y. Zolkiewski. — Gliwice: Wydawnictwo Politechniki, 2011. — 171 p.
3. Бохо́нский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике: монография / А.И. Бохо́нский, Н.И. Варминская. — Севастополь, 2012. — 212 с.
4. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.И. Почтман. — К.: Высш. шк., 1982. — 176 с.
5. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.

Поступила в редакцию 13.01.2014 г.

Бохо́нский О.І., Рижков О.І. Оптимальне керування переносним рухом нелінійних систем

Досліджено складний рух (переносний і відносний) систем з нелінійною характеристикою відновлювальної сили або нелінійним опором руху. Лінеаризація дозволила знайти оптимальне керування, при якому досягається абсолютний спокій системи наприкінці руху.

Ключові слова: нелінійна система, лінеаризація, оптимальне керування, переносний і відносний рух.

Bokhonsky O.I., Ryzhkov O.I. Optimal control of the nonlinear system's portable movement

Complex movement (portable and relative) of the systems with nonlinear characteristic of restoring force or with nonlinear movement resistance was investigated. Linearization allowed to find optimal control whereby absolute rest was achieved in the end of movement.

Keywords: nonlinear system, linearization, optimal control, portable and relative movement.