УДК 519.3 : 65.011.56 : 621.865.8

**А.И. Бохонский, Н.И. Варминская**
*Севастопольский национальный технический университет*
*Ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053*
*E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua*

# РЕВЕРСИОННЫЙ ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

*На простом характерном примере показано, что оптимальное управление движением абсолютно твердого тела применимо и для перемещения деформируемого тела. За выбранное приемлемое минимальное время движения достигается абсолютный покой в конечном состоянии.*

***Ключевые слова:*** *переносное и относительное движения, упругий объект, моментные соотношения, реверсионный принцип.*

**Введение**

В [1] с использованием вариационного исчисления решены задачи оптимального переносного движения деформируемых упругих систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Решение полной обратной задачи вариационного исчислении, когда по исходной аналитической функции восстанавливается функционал, названо реверсионным исчислением. Обращено внимание на возможность использования процедуры реверсионного исчисления для обоснования существования широкого класса так называемых кососимметричных оптимальных управлений движением объектов.

Решение актуальных задач управления переносным движением деформируемых объектов приведено в [2].

*Цель исследований* – обоснование (с привлечением реверсионного принципа оптимальности) кососимметричного управления переносным движением деформируемого объекта.

**Пример реверсионного исчисления**

Пусть абсолютное движение материальной точки с массой $m = 1$ кг описывается функцией

$$x(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}. \tag{1}$$

Тогда $v(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ и $a(t) = -\frac{1}{2}$, т.е. справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}, \tag{2}$$

решением которого при $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = \frac{1}{2}$ является исходная функция (1).

Если функцию (1) рассматривать как решение уравнения Эйлера (2), то такому уравнению будут соответствовать функционалы (здесь очевидна не единственность восстановления функционала):

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\dot{x}^2 - x\right) dt, \qquad J_2 = \int_0^T \ddot{x}^2 dt. \tag{3}$$

Функционалу $J_1$, согласно уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$, соответствует (2). Функционалу $J_2$ можно поставить в соответствие уравнение $\frac{d^4x}{dt^4} = 0$, которое с учетом принятых ранее начальных условий и дополнительных ( $\ddot{x}(0) = \frac{1}{2}$, $\dddot{x}(0) = 0$ ) приводит к решению (1).

С учетом достаточных условий экстремума $\delta^2 J \geq 0$ функционалов $J_1$ и $J_2$ (условие Лежандра) соответственно $F_{1\dot{x}\dot{x}} \geq 0$ (т.е. $1 > 0$) и $F_{2\ddot{x}\ddot{x}} \geq 0$ (т.е. $2 > 0$) достигается минимум обоих функционалов.

На различных временных интервалах ($T \geq t \geq 0$) функционалы имеют разные значения. Однако существует такое общее время движения $T$ (верхний предел интегрирования), при котором $J_1 = J_2$, т.е. предел $T$ находится из уравнения

$$J_1 - J_2 = 0. \tag{4}$$

После подстановки в функционалы функции (1) и интегрирования, получаем уравнение $T^2 - 3T - 1{,}5 = 0$, корень которого $T = 3{,}4365$.

*Переносное управляемое движение твердого тела.*

Функционал $J_2$ использовался в [3, 4] как критерий оптимальности при поиске управления движением твердого тела. Например, для уравнения

$$\frac{d v_e}{dt} = u_e(t), \tag{5}$$

при заданном времени движения $T$ и краевых условиях $s_e(0) = 0$, $v_e(0) = 0$; $s_e(T) = L$, $v_e(T) = 0$ функция, доставляющая минимум критерию $J_2$

$$s_e(t) = \frac{L}{T^2}\left(3 - \frac{2t}{T}\right)t^2,$$

а управление (5) принимает вид:

$$u_e(t) = \frac{6L}{T^2}\left(1 - \frac{2t}{T}\right). \tag{6}$$

График переносного движения объекта изображен на рисунке 1.

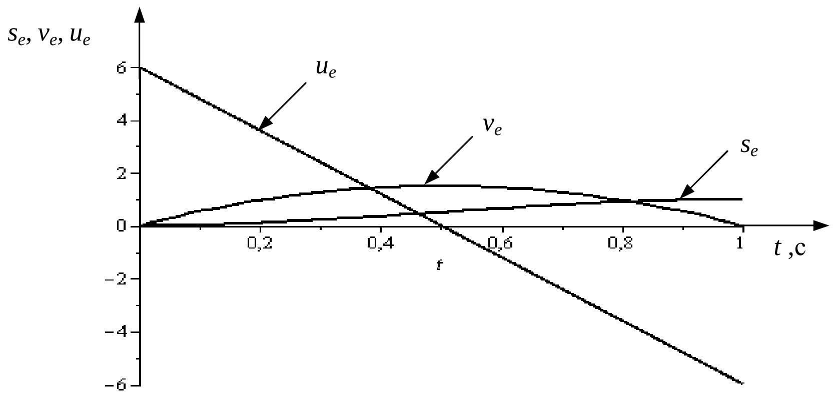


Рисунок 1 – Переносное движение

Управление (6) обеспечивает разгон и торможение объекта при перемещении на величину $s_e(T) = L$. Такое управление названо “кососимметричным”. Критерий $J_2 = \int_0^T u_e(t)^2 dt$ косвенно характеризует затраты энергии на управление, и в этом смысле он энергетический (норма мощности [3]).

*Здесь можно отметить, что для принятого в [2] физически интерпретируемого критерия*

$$J = \int (\dddot{x}\dot{x})^2 dt \tag{7}$$

*(в абсолютном движении) уравнение Эйлера-Пуассона*

$$\dot{x}^2 \frac{d}{dt}(\dddot{x}) + 4\dot{x}\ddot{x}\dddot{x} + \ddot{x}^3 = 0, \tag{8}$$

*и возникли очевидные математические трудности его решения.*

Существует множество кососимметричных функций управления (ускорения), которые оптимальны в смысле существования для них функционала – критерия. Например, кососимметричной функции управления [5] $u_e(t) = a\cos^3 pt$ соответствует функционал – критерий вида $J = \frac{1}{2}\int_0^T \left[9p^4 u_e^2 - 10p^2 \dot{u}_e^2 + \ddot{u}_e^2\right] dt.$

*Относительное движение (колебания деформируемого объекта).*

Если необходимо переместить из исходного в конечное состояние покоя деформируемый объект (с одной степенью свободы – осциллятор), то при быстром перемещении ($T \to \min$) возникают его колебания, и достижение покоя в конечном состоянии требует выполнения моментных соотношений

$$x_r(T) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}_r(T) = 0, \tag{9}$$

т.е. относительные перемещение и скорость должны одновременно быть равны нулю.

Как показано в [2], задача сводится к поиску одинаковых корней системы трансцендентных уравнений (9); корни отражают соотношения между периодом собственных колебаний перемещаемого объекта и общим временем его движения.

Такие управления (ускорения) могут перевести объект, например, из исходного состояния абсолютного покоя в конечное состояние абсолютного покоя за время $T$.

Решение уравнения относительного движения упругого объекта с одной степенью свободы ри управлении (6)

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -\frac{6L}{T^2}\left(1 - \frac{2t}{T}\right),$$

где $L$ – перемещение в переносном движении, $T$ – время движения, $k$ – частота собственных колебаний, и начальных условиях $x_r(0) = 0$, $\dot{x}_r(0) = 0$ имеет вид:

$$x_r(t) = -\frac{12L}{k^3T^3}\sin(kt) + \frac{6L}{k^2T^2}\cos(kt) - \frac{6L}{k^2T^3}(T - 2t).$$

Относительная скорость: $\dot{x}_r(t) = -\frac{12L}{k^2T^3}\cos(kt) - \frac{6L}{kT^2}\sin(kt) + \frac{12L}{k^2T^3}$. Графики изображены на рисунке 2.

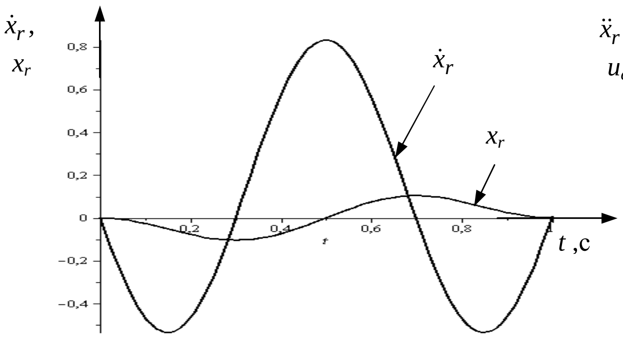


Рисунок 2 – Перемещение и скорость в относительном движении

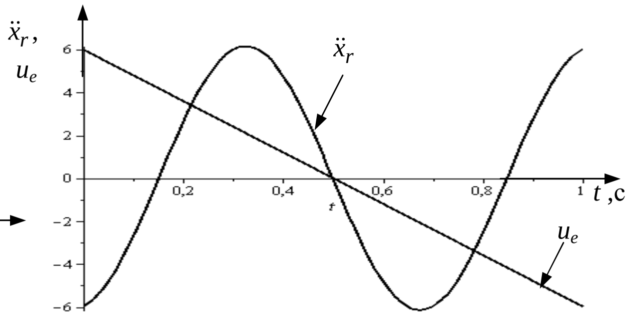


Рисунок 3 – Ускорения относительного и переносного движений

Согласно теории моментов при $t = T$ должны одновременно выполняться условия (9), которые после ряда преобразований сводятся к системе трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\sin s - s \cdot \cos s - s = 0, \\ p_2 &= 2\cos s + s \cdot \sin s - 2 = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $s = kT$.

При выполнении этих моментных соотношений система (10) имеет одинаковые корни, т.е. в данном случае для корней *справедливо уравнение*

$$p = p_1 + p_2 = 0. \tag{11}$$

Для управления (6) корни уравнения (11) представляют собой ряд (график $p(s)$, рисунок 4):

9,0; 9,45; 15,45; 15,7; 21,82; 21,89 и т.д.

Если, например, принять первый корень $s = kT = 9$, то при $k = 9$ с$^{-1}$ время движения $T = 1$ с. Для $L = 1$ м графики переносного и относительного движений изображены на рисунках 2, 3. Из графиков следует, что в конце движения достигается абсолютный покой. Общее время движения выбирается согласованно с корнями уравнения (11).

**Выводы**

1. Кососимметричное оптимальное управление в виде аналитической функции, доставляющее минимум нормы мощности в переносном движении абсолютно твердого тела, за счет выбора времени движения обеспечило достижение абсолютного покоя упругого объекта (в конце движения).

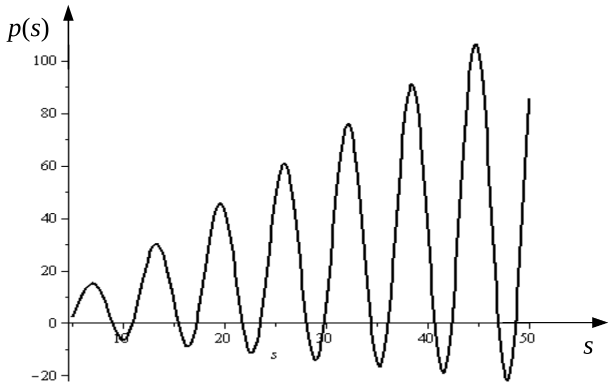


Рисунок 4 – График функции $p = p(s)$

2. Аналитическим кососимметричным функциям управления переносным движением соответствуют (в реверсионном смысле) восстановленные функционалы как критерии оптимальности; существует широкий класс таких оптимальных управлений. Во всех случаях время движения находится аналогично по разработанной здесь процедуре.

3. Реверсионный принцип оптимальности означает, что аналитической функции оптимального управления переносным движением объекта соответствует уравнение Эйлера для функционала – критерия оптимальности, принимающего на временном интервале движения минимальное значение.

Дальнейшие исследования связаны с оценкой влияния высших форм колебаний на переносное и относительное движения упругих систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы.

Актуальны задачи: снижение уровня колебаний упругого объекта непосредственно во время движения – за счет использования регулятора в цепи обратной связи; учет сопротивлений движению – в переносном и относительном движениях; практическая реализация управлений – с использованием двигателей постоянного и переменного тока.

***Библиографический список использованной литературы***

1. Бохонский А.И. Вариационное и реверсионное исчисления в механике / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская; Под общ. ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2012. — 212 с.

2. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский; Под общ. ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 296 с.

3. Бублик Б.Н. Основы теории управления / Б.Н. Бублик, Н.Ф. Кириченко. — К: Вища школа, 1975. — 328 с.

4. Воронов А.А. Теория автоматического управления Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления: учеб. пособ. для вузов / А.А. Воронов. — М.: Наука, 1992. — 288 с.

5. Бохонский А.И. Функционал оптимального перемещения объекта / А.И. Бохонский, А.Н. Круговой // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч.тр. — Севастополь, 2013. — Вып. 137. — С. 37–40.

***Поступила в редакцию 21.03.2014 г.***

**Бохонський О.І., Вармінська Н.І. Реверсійний принцип оптимальності в задачах управління переносним рухом деформівних об’єктів**

На простому характерному прикладі показано, що оптимальне управління рухом абсолютно твердого тіла можливо використовувати для переміщення деформівного твердого тіла. За мінімальний час руху досягається абсолютний спокій деформівного тіла в кінцевому стані.

**Ключові слова:** переносний та відносний рухи, пружний об'єкт, моментні співвідношення, реверсійний принцип.

**Bokhonsky A.I., Varminskaya N.I. The reconditioned functionals as the criteria of optimal control of deformable objects’ portable movement**

On a typical example it is demonstrated that the optimal control of a rigid body moving applies for moving of deformable body. The absolute quiescence of deformable body in the final state is achieved by acceptable minimum time.

**Keywords:** portable and relative movement, deformable object, moment ratios, reverse principle.