



УДК 330.46:338.57

*Порохня В. М.,  
Андрейшина Н. Б.<sup>1</sup>*

## **МОДЕЛЮВАННЯ РИНКОВОЇ РІВНОВАГИ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ**

*Побудована математична модель, в якій попит і пропозиція розглядаються як функції, залежні від ціни та її зміни. Досліджений вплив зовнішніх факторів на рівноважну ціну, який кількісно виражається коефіцієнтом диференціального рівняння. Показано, що при розглянутих функціях попиту та пропозиції система для знаходження рівноважної ціни характеризується єдиним стійким станом рівноваги.*

***Ключові слова:** попит, пропозиція, рівноважна ціна, стійкість, фазовий портрет, особлива точка.*

### **ВСТУП**

Ми живемо у суспільстві, в якому розподіл праці досяг великого ступеня, продавець є одночасно споживачем, а споживач – покупцем, тому питання рівноваги ринку має виключно важливе значення. Попит і пропозиція – це економічні важелі, здатні дати глибоке уявлення не лише про окремі економічні проблеми, але також і про функціонування всієї економічної системи в цілому.

Порушення балансу на ринку призводить до негативних наслідків як на окремих підприємствах, так і в економіці в цілому. За своєю суттю рівноважна ціна несе в собі всю інформацію, яка необхідна як виробникам (яку кількість товару виготовити та поставити на ринок), так і споживачам (який обсяг товару представлений на ринку). Зміна ціни рівноваги служить сигналом для продавців для збільшення або зменшення обсягів виробництва, а для покупців – збільшення або зменшення споживання товарів.

Таким чином, дослідження та моделювання поведінки рівноважної ціни, яка виконує функцію організації економіки, є актуальним завданням.

Питанням ціноутворення і рівноваги попиту та пропозиції на ринку присвячені праці багатьох представників світової економічної думки. Теорія попиту та пропозиції отримала розвиток у працях Р. Дж. Аллена, Л. Вальраса, Ж. Дебре, К. Ерроу, Д. Кларка, А. Курно, А. Маршалла, К. Менгера, Д. Патінкіна, В. М. Полтеровича,

---

<sup>1</sup> Рецензент – Ядранський Д. М., д. е. н., доцент



.П. Самуельсона, Дж. Р. Хікса та ін., якими була створена система, що описує поведінку споживача, розвиток та співвідношення попиту і пропозиції, ринкову рівновагу та інші економічні процеси. В Україні проблемам моделювання рівноваги попиту та пропозиції присвячені доробки українських науковців В. Ф. Беседіна, В. В. Вітлінського, В. М. Геєця, С. В. Дідура, Б. Є. Кваснюка, Б. Я. Панасюка.

Якщо макроекономічна рівновага вивчається науковим суспільством протягом кількох десятиріч, то на рівні підприємств – відносно недавно, менш за все досліджена рівновага підприємства по відношенню до зовнішнього середовища. Відношення попиту та пропозиції постійно змінюється під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх факторів, відповідно змінюється і рівноважна ціна. До внутрішніх факторів впливу можна віднести рівень витрат виробництва, особливості виробничого процесу, специфіку виробленої продукції, організаційний рівень, ступінь використання прогресивних методів виробництва, ринкову стратегію і тактику виробника, споживчі переваги щодо даного товару, рівень доходів покупців, споживчі очікування щодо майбутньої зміни цін, ціни на взаємозамінні, взаємодоповнюючі товари та ін. До зовнішніх факторів відносяться політична стабільність, рівень регулювання економіки державою, рівень інфляції, наявність та рівень конкуренції [1]. Фактори зовнішнього порядку практично не підвладні контролю з боку товаровиробників і споживачів, але можуть впливати на ціни товарів та обсяги попиту і пропозиції.

#### **ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ**

Виходячи із вищенаведеного, метою дослідження є моделювання ринкової рівноваги та дослідження стійкості рівноважної ціни з урахуванням впливу зовнішніх факторів.

#### **РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

В умовах ринкової економіки конкурентоздатним буде лише те підприємство, яке зможе визначити вимоги ринку і виробляти продукцію, яка буде користуватися попитом. Здатність підприємства швидко реагувати на зміну попиту стає першочерговим завданням, вирішення якого визначає виживання й успішне функціонування підприємства. Рівноважна ціна показує еквівалентне співвідношення обсягу продукції, що запитується, та обсягу продукції, що пропонується. Вона постійна в тому розумінні, що відхилення від рівноважної ціни створює дефіцит або надлишок, після чого ціновий механізм автоматично вертає ринок до рівноваги. Ціна при цьому завжди змінюється.

Під рівноважною ціною будемо розуміти ціну, за якої величина попиту одночасно дорівнює величині пропозиції; під рівноважним обсягом – ту кількість товару, яку покупці хочуть і можуть купити, що



одночасно відповідає кількості товару, яку продавці хочуть і можуть продати на ринку. Попит  $D$  і пропозиція  $S$  залежать від низки факторів, наприклад, від ціни товару та її зміни [2]. Для побудови математичної моделі оберемо ціну товару  $p$ , зміну ціни  $\frac{dp}{dt}$  та

тенденцію зміни ціни  $\frac{d^2 p}{dt^2}$ . Стан рівноваги характеризується рівністю попиту та пропозиції:

$$D(p, q, r) = S(p, q, r), \quad (1),$$

$$\text{де } q = \frac{dp}{dt}; \quad r = \frac{d^2 p}{dt^2}.$$

Нехай попит та пропозиція задані як деякі масиви  $D = D(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $S = S(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , де  $d_i$  й  $s_i$  – значення попиту та пропозиції в заданому проміжку часу [3]. Будемо апроксимувати ці масиви лінійними формами:

$$\begin{aligned} D &= a_1' p + b_1' q + c_1' r + d_1', \\ S &= a_2' p + b_2' q + c_2' r + d_2', \end{aligned} \quad (2),$$

де  $a_1', b_1', c_1', d_1', a_2', b_2', c_2', d_2'$  – числові коефіцієнти.

Підставляючи (2) в (1), будемо отримувати диференціальне рівняння, розв'язання якого будемо досліджувати на стійкість. Але питання про стійкість розв'язку має бути зведено до питання про стійкість тривіального розв'язку. Для цього потрібно позбавитися коефіцієнтів  $d_1', d_2'$  в (2). Розглянемо вирази

$$p(t) = p^*(t) + p_0, \quad q(t) = q^*(t) + q_0, \quad r(t) = r^*(t) + r_0.$$

Виходячи з того, що в точці рівноваги попит дорівнює пропозиції, отримаємо:

$$D(p^*, q^*, r^*) + D(p_0, q_0, r_0) = S(p^*, q^*, r^*) + S(p_0, q_0, r_0),$$

тобто

$$D(p_0, q_0, r_0) = S(p_0, q_0, r_0).$$

Якщо  $(p_0, q_0, r_0)$  задовольняє

$$a_1' p + b_1' q + c_1' r + d_1' = a_2' p + b_2' q + c_2' r + d_2',$$

то питання стійкості зводиться до дослідження лінійних форм

$$D = a_1 p + b_1 q + c_1 r, \quad S = a_2 p + b_2 q + c_2 r. \quad (3)$$

Для знаходження коефіцієнтів скористаємося методом найменших квадратів:



$$\sum_{i=1}^n (a_1 p_i + b_1 q_i + c_1 r_i - d_i)^2 \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^n (a_2 p_i + b_1 q_2 + c_2 r_i - s_i)^2 \rightarrow \min,$$

де  $p_i$  – ціна товару в  $i$ -й період часу;  $q_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$  – зміна ціни

в  $i$ -й період часу;  $r_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$  – тенденція зміни формування ціни в  $i$ -

й період часу.

Для знаходження рівноважної ціни одержуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dp}{d\tau} + p = 0 \quad (4),$$

$$\text{де } \tau = \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{c_1 - c_2}} \cdot t, \quad 2\delta = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)}}.$$

Якщо проводити аналогії з механікою, то (4) – це рівняння лінійного дисипативного осцилятора, в якому  $\delta$  виступає в якості коефіцієнта тертя, тобто коефіцієнту впливу зовнішнього середовища [4]. З економічної точки зору коефіцієнт  $\delta$  можна розглядати як коефіцієнт впливу зовнішніх факторів на ціну рівноваги  $p$ .

Якщо перейти до фазових координат в рівнянні (4), покладаючи

$$x_1 = p, \quad x_2 = \frac{dp}{d\tau},$$

одержимо динамічну систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - 2\delta \cdot x_2, \end{cases} \quad (5).$$

При нульовому коефіцієнті  $\delta$ , тобто без зовнішнього впливу на рівноважну ціну, отримаємо особливу точку типу центр, фазовий портрет являє собою сімейство концентричних кіл із центром на початку координат.

Проведемо аналіз динаміки рівноважної ціни при ненульовому коефіцієнті  $\delta$ . Для  $0 < \delta < 1$  розв'язанням рівняння (4) є

$$p(\tau) = A e^{-\delta\tau} \cos(\omega\tau + \psi), \quad \omega = (1 - \delta^2)^{1/2},$$



де  $A$  та  $\psi$  – довільні константи, які визначаються початковими умовами.

На фазовій площині нуль координат є особливою точкою системи, що у випадку  $\delta < 1$  є стійким фокусом (рис. 1а).

Якщо коефіцієнт  $\delta > 1$ , отримаємо такий розв'язок рівняння (4):

$$p(\tau) = C_1 e^{\lambda_1 \tau} + C_2 e^{\lambda_2 \tau}, \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1},$$

де  $C_1, C_2$  – константи.

Особлива точка в зазначених умовах є стійким вузлом (рис. 1б).

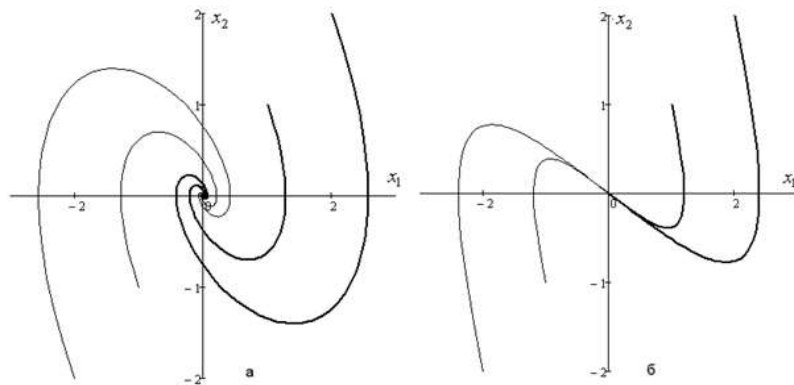


Рис. 1. Фазовий портрет рівняння (4)  
з параметром  $\delta = 0,5$  (а), і  $\delta = 1,2$  (б)

Джерело: власна розробка

При  $\delta > 0$  дисипативна система (4) характеризується єдиним глобально стійким станом рівноваги в нулі фазових координат. При  $\tau \rightarrow \infty$  будь-яка фазова точка прагне до початку координат у стійкий фокус або вузол, тобто через якийсь проміжок часу ціна наблизиться до рівноважної ціни.

Запропоновану модель використаємо для знаходження рівноважної ціни для даних, представлених в табл. 1.

Таблиця 1

Вихідна інформація (статистика зібрана по товару «Гіпс ваговий» в магазині «Будкомплект» за 2012 р., м. Жовті Води)

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ціна товару, $(p)$ , грн	1,14	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,09	1,11	1,15	1,16	1,14	1,15
К-ть проданого товару, $(d)$ , кг	112	89	102,5	98	85,5	120	111,5	102	108	97	105,5	98,5
Залишок на кінець місяця, кг	205	156	234	127	146	118	104	116	104	117	108	110



Пропозиція  $s_i$  формується як сума проданого товару і товару, що залишився.

Коефіцієнти лінійних форм (2), знайдені за допомогою МНК, будуть дорівнювати:

$$a'_1=25577.35, b'_1=-26263.3, c'_1=14686.91, d'_1=-27975.76, \\ a'_2=84.58, b'_2=-1023.94, c'_2=859.85, d'_2=146.93.$$

Підставляючи значення коефіцієнтів в лінійні форми та прирівнюючи їх, отримуємо диференціальне рівняння

$$p''-1.83p'+1.84p=2.03.$$

Додавши початкові умови  $p(0)=1.14$ ,  $p'(0)=0$ , отримаємо часткове розв'язання рівняння:

$$p(t)=e^{-0.91t}(0.04\cos t+0.04\sin t)+1.1.$$

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $p(t) \rightarrow 1.1$ , тобто для рівноваги попиту та пропозиції, ціну потрібно знизити до 1,1 грн, що має призвести до збільшення попиту.

Для перевірки стійкості тривіального розв'язку знайдемо значення  $p_0$ , вважаючи  $q_0$  і  $r_0$  нульовими, тобто припустимо, що більший вплив на формування рівноважної ціни чинить існуюча ціна.

$$p_0 = \left| \frac{d_1 - d_2}{a_2 - a_1} \right| = 1.1.$$

За допомогою МНК визначимо коефіцієнти  $a_i, b_i, c_i$  лінійних форм (3):

$$a_1 = 93.243, b_1 = 30.33, c_1 = 60.775,$$

$$a_2 = 218.417, b_2 = -1162.033, c_2 = 936.67$$

Прирівнюючи рівняння попиту і пропозиції, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + 3.602 \frac{dp}{d\tau} + p = 0,$$

де  $\tau = 0.378t$ .

Переходячи до системи (5), отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - 3.602x_2, \end{cases}$$

Початкові умови:

$$x_1(0) = 1.14, x_2(0) = 0.$$

Оскільки  $\delta = 1.801$ , то особлива точка – стійкий вузол (рис. 2).

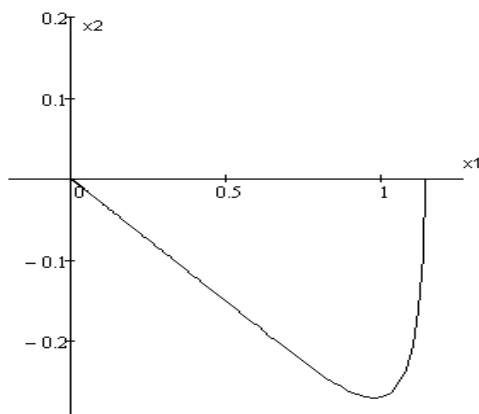


Рис. 2. Фазовий портрет системи (6)

Джерело: власна розробка

### ВИСНОВКИ

Аналіз взаємодії попиту, пропозиції та ціни засвідчує, що в результаті такої взаємодії на ринку встановлюється рівновага. Саме під впливом цієї взаємодії ринок здатний встановлювати порушену рівновагу, зумовлену зовнішніми факторами. Побудована в роботі математична модель, в якій попит і пропозиція розглядаються як функції ціни та її зміни, дає змогу знаходити рівноважну ціну і в залежності від її значення коригувати ціни на товари.

Сукупний вплив зовнішніх факторів, таких як політична стабільність, регулювання економіки державою, рівень інфляції, наявність та рівень конкуренції кількісно виражаються коефіцієнтом динамічної системи. В роботі показано, що система для знаходження рівноважної ціни характеризується єдиним стійким станом рівноваги. При цьому незалежно від вибору початкових умов ціна буде наближатися до рівноважної.

Подальші дослідження полягають у включенні в функції попиту та пропозиції, крім ціни та її зміни, нецінових факторів, які на них впливають.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іваниенко В. В. Ценообразование / В. В. Іваниенко, М. В. Чечетов. – Харьков : Издательский дом «ИНЖЕК», 2004. – 221 с.
2. Аллен Р. Математическая экономия / Р. Аллен. – М. : Издательство иностранной литературы, 1963. – 668 с.
3. Андрейшина Н. Б. Априорні оцінки границь рівноважної ціни на підставі законів попиту та пропозиції / Н. Б. Андрейшина // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – 2010. – № 61. – С. 85–87.
4. Ловецкий К. П. Математическое моделирование. Часть 1: Осциллятор / К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов. – М. : РУДН, 2007. – 64 с.

Дата надходження до редакції – 27.04.2013 р.