ПРОГРАМИ ТА ПРОЕКТИ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ В СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519 **JEL C 00: C 25:C 61**

Коваль В. В., Могілей С. О.
Східноєвропейський університет економіки і менеджменту

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

У статті розглядаються основні методи та моделі розв'язання як одно-, так і багатокритеріальних задач оптимізації. Надається постановка задачі пошуку оптимального плану транспортних перевезень за наявності кількох видів транспорту.

Ключові слова*: математичне програмування, оптимізаційні задачі, симплекс-метод, критерії оптимізації, чисельні методи, транспортна задача.*

Koval V., Mohilei S.
East European University of Economics and Management

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF SOLVING OF MULTI-CRITERIAN OPTIMIZATION TASKS

The article deals with the basic methods and models of solving both single- and multi-criteria optimization problems. The task of finding an optimal plan for transportation having several types of transport is given.

Keywords: *mathematical programming, optimization problems, simplex method, optimization criteria, numerical methods, transport task.*

ВСТУП

На якому рівні не знаходилося б суспільне виробництво, якими великими не були б трудові, матеріальні й фінансові ресурси, перед господарськими керівниками завжди стоїть завдання найкращого використання виробничих ресурсів і потужностей.

Окремим галузям народного господарства, виробничим об'єднанням, підприємствам і їхнім структурним підрозділам надана можливість самостійно вирішувати питання раціонального використання виділених ресурсів для досягнення своїх виробничих цілей. У межах установлених нормативів, лімітів і прав виробничі об'єднання і підприємства можуть маневрувати наявними ресурсами, приймати важливі економічні й виробничі рішення, від яких залежить використання устаткування, продуктивність праці, собівартість і якість продукції, а також всі інші показники виробничо-господарської діяльності [5].

З математичної точки зору в залежності від того, як змінюються вхідні параметри будь-якої математичної задачі, може змінюватися і її кінцевий розв'язок. Тобто множина значень вхідних параметрів (множина обмежень) породжує деяку множину розв'язків. На практиці досить часто виникає потреба у відшуканні деякого оптимального розв'язку з множини можливих. Критерієм оптимальності тут виступає певне екстремальне значення, що належить до загальної множини розв'язків задачі. В свою чергу сам клас таких задач має назву задач оптимізації.

Вчені цікавилися задачами оптимізації ще з часів Стародавньої Греції та Риму. Проте в цьому дослідженні особливу увагу варто приділити так званій задачі Штейнера.

Умова задачі Штейнера: у площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника є мінімальною.

Вперше задача була сформульована італійським математиком Вінченцо Вівіані у праці «Про максимальні і мінімальні значення» (1659), що вважається першою книгою, спеціально присвяченою проблемам оптимізації. Описана в ній задача отримала ім'я німецького геометра Якоба Штейнера, який у XIX столітті багато працював як над цією, так і над іншими подібними задачами.

Розв'язком задачі є точка Торрічеллі, тобто точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120 градусів. Якщо трикутник має кут не менший за 120 градусів, то точка Торрічеллі – вершина цього кута [2].

З розвитком науки і техніки оптимізаційні задачі почали набувати більш практичного змісту. Так, зокрема, вперше задача у вигляді пропозиції щодо укладання національного плану перевезень, яка дозволяє мінімізувати сумарний кілометраж, подана в роботі радянського економіста Л. М. Толстого (1930). Екстремальна задача з мінімізації транспортних витрат була сформульована ним 1939 р.

Один із різновидів транспортної задачі 1941 р. поставив американець Хічкок (проблема Хічкока). Але закінченого методу розв'язання цієї задачі він не розробив.

У загальному вигляді задача математичного програмування сформульована 1939 р. Л. В. Канторовичем. Саме він запропонував метод множників, що дозволяє її розв'язувати. Разом із М. К. Гавуриним 1949 р. Л. В. Канторович розробив метод потенціалів, який і дотепер є найбільш поширеним методом розв'язання транспортних задач [5].

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Метою дослідження є постановка цілком нової задачі багатокритеріальної оптимізації, яка полягає у визначенні оптимального плану транспортних перевезень за наявності кількох видів транспорту.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В найпростішому вигляді задачу оптимізації можна подати таким чином:

$$f(x) \to extr, x \in D,$$

де $f(x)$ – цільова функція, D – множина обмежень.

Як відомо з теорії вищої математики, екстремальним значенням функції може бути її максимальне (*max*) або мінімальне (*min*) значення. Що стосується множини обмежень, то нею може бути, в загальному вигляді, система рівнянь та нерівностей довільного порядку.

Саме вид цільової функції та математична формалізація множини обмежень (тобто модель задачі оптимізації) визначають методи розв'язання такої екстремальної задачі.

Зокрема, якщо цільова функція та система обмежень є лінійними, то оптимізаційна задача називається задачею лінійного програмування. Основним методом її розв'язання є симплекс-метод.

Варто зазначити, що, хоча симплексний метод і є універсальним способом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами, проте окремі типи задач лінійного програмування мають таку структуру, яка дає змогу побудувати значно простіші за симплексний методи розв'язування. Найважливішим типом таких задач є транспортна задача [1].

Взагалі транспортна задача є поодиноким випадком канонічної задачі лінійного програмування, але з огляду на певні особливості для її розв'язання застосовуються специфічні методи, які, зокрема, дозволяють зробити важливі теоретичні узагальнення [3].

Проте якщо цільова функція та система обмежень задачі оптимізації мають нелінійний характер, то для реалізації таких моделей зазвичай застосовуються чисельні методи оптимізації.

Так, узагальненням вже згаданої вище проблеми Штейнера є така задача: для n точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, заданих на площині, знайти точку A таку, щоб величина $|A_1A| + |A_2A| + \ldots + |A_nA|$ була мінімальною. Ця задача має велике практичне значення для побудови найкоротшої мережі ліній (електропередач, телекомунікацій). Для випадку, коли дані точки є вершинами опуклого чотирикутника, розв'язок цієї задачі елементарний: шуканою точкою буде точка перетину діагоналей, але при $n=5$ розв'язок задачі вже не можна одержати явно. Для відшукання наближеного розв'язку узагальненої проблеми Штейнера можна скористатися різними чисельними методами, перелік яких наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Чисельні методи оптимізації

№	Назва методу	Коротка характеристика (ідея) методу
1	2	3
1	Наближені методи одновимірної мінімізації (пошук відрізка локалізації точки мінімуму, метод дихотомії, метод золотого перерізу, метод Фібоначчі, метод парабол)	Використовуються за умови унімодальності досліджуваних функцій. Саму функцію досліджують лише у скінченній кількості точок, тобто в межах певного відрізку локалізації. Відбувається покроковий аналіз точок даного відрізку, зокрема за допомогою різних способів поділу відрізка та відшукання екстремального значення функції з певною заданою точністю.
2	Методи пошуку глобального мінімуму функції однієї змінної (методи рівномірного та послідовного перебору, метод ламаних)	Використовуються для класу ліпшицевих функцій, тобто відрізком локалізації функції фактично є деякий відрізок *[a;b]* з умови Ліпшиця. Більш економні порівняно з методами п. 1.
3	Методи спуску першого і нульового порядків	В загальному належать до методів покоординатного спуску. В цих методах напрям руху на кожному кроці ітераційного процесу вибирається з числа напрямів спадання функції, що мінімізується.
4	Метод Ньютона та його модифікації	Доцільно використовувати, якщо цільова функція *f(x)* в задачі безумовної мінімізації двічі неперервно диференційована і частинні похідні першого та другого порядків обчислюються досить просто. Враховується квадратична частина розкладу функції *f(x)* в ряд Тейлора.
5	Методи спряжених напрямів	Швидкість збіжності аналогічна швидкості збіжності квазіньютонівських методів, проте дані методи мають відносно невелику трудомісткість завдяки властивості спряженості напрямів спуску.
6	Субградієнтний метод та його модифікації	Використовується для мінімізації опуклих кусково-лінійних функцій і передбачає рух у напрямі, який дає зменшення відстані до точки мінімуму, якщо кроковий множник досить малий.
7	Монотонні *E*-субградієнтні методи	Монотонний метод для розв’язування задачі негладкої опуклої мінімізації. Нагадує градієнтний метод найшвидшого спуску. В результаті застосування одержується *E*-стаціонарна точка.
8	Методи з усередненням *E*-субградієнтів	Поєднують переваги немонотонних субградієнтних методів та монотонних *E*-субградієнтних методів.
9	Метод проекції градієнта	Використовується в задачах умовної оптимізації. З урахуванням умови опуклості допустимої множини можливі напрями знаходяться за допомогою операції проектування антиградієнта на допустиму множину.

Продовження табл. 1

1	2	3
10	Метод умовного градієнта	Метод умовної оптимізації. Належить до методів спуску. Друга назва – метод лінійної апроксимації (лінеаризації) цільової функції.
11	Метод можливих напрямів	Напрям спуску обирається з конусу можливих напрямів, який задається системою лінійних нерівностей так, щоб у цьому конусі довільний вектор утворював тупий кут з градієнтом функції, що мінімізується.
12	Метод штрафних функцій	Не належить до методів спуску. В його основі – ідея перетворення задачі оптимізації з обмеженнями в послідовність задач без обмежень.
13	Методи стохастичного програмування	Непрямі методи – задана задача замінюється деякою еквівалентною їй детермінованою задачею; прямі методи – методи стохастичних квазіградієнтів, скорочення нев'язок, стохастичної апроксимації.
14	Методи глобальної багатоекстремальної оптимізації	Ефективні, якщо на цільову функцію та допустиму множину накладені певні досить жорсткі обмеження.

Джерело: [2]

Задача оптимізації називається багатокритеріальною, якщо вона містить більше ніж одну цільову функцію (критерій).

Математична формалізація багатокритеріальної задачі оптимізації є такою:

$$f_i(x) \to extr, i = \overline{1,n}, x \in D,$$

де $f_i(x)$ – цільові функції (n штук); D – множина обмежень.

Наприклад, задача визначення оптимального рецепту комбікорму являє собою класичну багатокритеріальну задачу оптимізації. В першу чергу критерієм оптимізації є найнижча собівартість продукції, що виготовляється на комбікормовому заводі (ККЗ). По-друге, продукція ККЗ повинна бути максимально поживною.

Результатом розв'язання даної задачі є показники ваг входження (частка або %) кожного компоненту комбікорму в загальну масу партії (порції). Сума цих показників повинна дорівнювати 1 (або 100%):

$$\sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i} = 1; 0 \le x_i \le 1; i = \overline{1,n},$$

де $\mathbf{x_i}$ – вага i–го компоненту в рецепті комбікорму;

n – кількість компонентів.

Відповідно мінімальна собівартість та максимальна поживність продукції – цільові функції цієї задачі:

$$Z = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{p_i x_i} M \to \min; P = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{c_i x_i} M \to \max,$$

де $\mathbf{p_i}$ – вартість *i*-го компоненту комбікорму, грн;

$\mathbf{c_i}$ – поживність *i*-го компоненту комбікорму, кормових одиниць/кг;

M – маса партії (порції), кг.

Також задачу можна розглядати, враховуючи обмеженість доступних ресурсів, тобто інформацію про наявні залишки компонентів комбікорму:

$$x_i M \le a_i,$$

де $\mathbf{a_i}$ – залишок *i*-го компоненту комбікорму, кг [4].

Дослідники Шикін та Чхартішвілі в [6] так само розглядають багатокритеріальну задачу з двома цільовими функціями, які вважаються рівноправними, проте в більш загальному вигляді. Автори доходять висновку, що така задача взагалі не має розв’язків – задовольнити обидві вимоги одночасно неможливо. Отже, треба шукати деякий компромісний розв’язок.

Серед методів відшукання такого розв’язку варто виділити два: метод поступок та метод ідеальної точки.

Обидва методи використовують множину Парето, складену в даному випадку з допустимих точок задачі, які не можуть бути «зсунуті» в межах допустимої множини з покращенням одразу за обома критеріями. Іншими словами, з покращенням значення одного з критеріїв неодмінно погіршується значення іншого.

Метод (послідовних) поступок полягає в тому, що особа, яка приймає рішення (ОПР), працюючи в режимі діалогу зі спеціалістом, аналізує точки на межі Парето і врешті погоджується зупинитися на деякій компромісній.

Метод ідеальної точки полягає у відшуканні на межі Парето точки, найближчої до точки утопії, що задається ОПР. Зазвичай ОПР формулює ціль у вигляді бажаних значень показників, і часто в якості координат цільової точки обирається сполучення найкращих значень всіх критеріїв (зазвичай ця точка не реалізується при заданих обмеженнях, тому її й називають точкою утопії) [6].

Однією з нових задач такого типу може слугувати транспортна задача, яка враховує не лише критерій мінімальної собівартості перевезень, а й мінімального рівня ризику (аварій). Причому самі перевезення виконуються не одним, а кількома видами транспорту, наприклад, автомобільним, залізничним та водним. Також зазначимо, що сумарна кількість потреб пунктів доставки не перевищує сумарної кількості запасів в пунктах відправки – тобто така транспортна задача є відкритою.

ВИСНОВКИ

1. У процесі дослідження методів та моделей розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації було поставлене цілком нове завдання, що полягає у відшуканні оптимального плану транспортних перевезень за наявності кількох видів транспорту: автомобільного, залізничного та водного. Критеріями оптимізації в рамках даної транспортної задачі є найменша сумарна собівартість перевезень, а також найнижчий сумарний рівень ризику при здійсненні транспортування товарів з пунктів відправки до пунктів доставки.

Математична формалізація даної задачі є такою:

$$S = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} b_{ij} y_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ij} z_{ij} \to \min;$$

$$R = \sum_{i,j=1}^{m,n} f_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} g_{ij} y_{ij} + \sum_{i,j=1}^{m,n} h_{ij} z_{ij} \to \min,$$

де $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$ – n пунктів відправки та m пунктів доставки відповідно;

x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} – кількість одиниць товару, що перевозиться з i-го пункту відправки до j-го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом (шукані величини);

a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – вартість перевезення одиниці товару з i-го пункту відправки до j-го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом;

f_{ij}, g_{ij}, h_{ij} – ризик аварії при перевезенні вантажу з i-го пункту відправки до j-го пункту доставки відповідно автомобільним, залізничним та водним транспортом;

S, R – функції собівартості й ризику відповідно.

Множина обмежень D складається з таких рівнянь і нерівностей:

$$D: \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} \le A, \\ \sum_{i,j=1}^{m,n} y_{ij} \le B, \\ \sum_{i,j=1}^{m,n} z_{ij} \le C, \\ N_j = x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} \le M_i, \end{cases}$$

де A, B, C – сумарна вантажопідйомність парків автомобільного, залізничного та водного видів транспорту відповідно;

M_i, N_j – величини запасів в *i*-му пункті відправки та потреб *j*-го пункту доставки відповідно.

2. Дослідження методів та моделей багатокритеріальних задач оптимізації було й залишається актуальною проблемою сучасної науки. Разом з тим розвиток інформаційних технологій, всеохоплююча комп'ютеризація суспільства, прагнення до максимальної автоматизації всіх сфер людської життєдіяльності відкриває все більше можливостей для практичного застосування отриманих наукових результатів. Саме в цьому контексті постановка та розв'язання нових оптимізаційних задач прикладної спрямованості може дозволити створення високоякісних програмних продуктів для впровадження на українських і зарубіжних підприємствах.

3. Теорія математичного програмування на сучасному етапі свого розвитку володіє досить вагомим науковим апаратом для розв'язування великого спектру оптимізаційних задач. Проте дуже часто виникає потреба в розширенні моделей і доповненні методів таких задач, особливо якщо йдеться про задачі багатокритеріальної оптимізації. Зокрема, йдеться про проблему пошуку оптимального плану транспортних перевезень, іншими словами – про транспортну задачу.

4. У статті надається постановка багатокритеріальної транспортної задачі, яка враховує наявність трьох видів транспорту (автомобільного, залізничного, водного), а також містить дві цільові функції як критерії мінімальних собівартості та рівня ризику транспортних перевезень. В подальшому результат розв'язання такої задачі може бути використаний для автоматизації підприємств і підрозділів транспортної логістики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бартіш М. Я., Дудзяний І. М. Дослідження операцій. Частина 1. Лінійні моделі : підручник. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. 168 с. 2. Жалдак М. І., Триус Ю. В. Основи теорії і методів оптимізації : навч. посіб. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 608 с. 3. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций. Спб. : Питер, 2001. 192 с. : ил. 4. Маркетингові технології в освіті, бізнесі, управлінні : матеріали науково-практичної конференції, 23 березня 2017 р. / Черкаський державний технологічний університет. Черкаси : ФОП Гордієнко, 2017. 109 с. 5. Самойленко М. І., Скоков Б. Г. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування) : навч. посібник. Харків : ХНАМГ, 2005. 176 с. 6. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении : учеб. пособ. 3-е изд. М. : Дело, 2004. 440 с.

Дата надходження до редакції – 02.10.2017 р.