

НАУКОВІ ПОВІДОМЛЕННЯ

Степан ПОПІНА, Олеся МАРТИНЮК

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Відомі економіко-математичні моделі оптимізації портфеля цінних паперів доповнені співвідношенням між частками інвестицій. Розглянуто компромісний варіант, який враховує сподівану норму прибутку та ризик.

Ключові слова: *оптимізація, сподівана норма прибутку, ризик портфеля цінних паперів.*

З розгортанням економічних реформ в Україні операції з цінними паперами стали невід'ємною частиною господарської діяльності підприємств та фірм. Цінні папери відіграють значну роль у платіжному обороті держави, у мобілізації інвестицій. За допомогою цінних паперів здійснюється переміщення капіталу інвесторів до виробників, визначення ефективності використання фінансових активів в окремих секторах економіки. У розвинених країнах в умовах рівноважної економіки значна частина вільного капіталу вкладається безпосередньо в купівлю цінних паперів. Відомо, що для зменшення ризику цінні папери об'єднують у портфелі. *Актуальною залишається проблема оптимізації портфеля цінних паперів.*

Родоначальником сучасної теорії портфеля є Гаррі Марковіц, який одержав за свої дослідження в 1990 р. Нобелівську премію з економіки. Ґрунтовний аналіз досліджень у цьому напрямку здійснено в роботі [1]. Важливий внесок у розвиток економіко-математичного моделювання портфеля цінних паперів (ПЦП) зробила *низка вчених*, зокрема В. В. Вітлінський та його учні [2; 3]. Окремі проблеми цінних паперів розглянуто в працях [4; 5; 6].

Метою статті є розвиток економіко-математичного моделювання ПЦП з використанням співвідношення між частками цінних паперів у портфелі та побудовою компромісного варіанта.

Розглянемо задачу збереження капіталу. Дана задача актуальна для портфеля з ліквідними цінними паперами. Економіко-математична модель має такий вигляд [3; 8; 9; 10]:

$$\begin{aligned}
 V_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j S_{ij} \rightarrow \min, \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \\
 x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1;n}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де V_n – ризик ПЦП як дисперсія норми прибутку, який визначається за формулами:

$$V_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j S_{ij},$$

де x_i – частка інвестицій у ЦП i -того виду ($0 \leq x_i \leq 1$),

$$S_{ij} = S_i \times S_j \times r_{ij},$$

де S_i – середнє квадратичне відхилення норми прибутку (ризик) ЦП i -того виду,

r_{ij} – коефіцієнт кореляції між ЦП видів i та j , n – кількість видів ЦП ($n \geq 2$).

Базову модель (1) пропонуємо доповнити таким співвідношенням між частками

інвестицій $\sum_{i=1}^n k_i x_i + c = 0$, де k_i , c – сталі величини.

Для розв'язання задачі (1) з доповненням використовується метод множників Лагранжа [3; 12]. Для цього будемо функцію:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j S_i S_j r_{ij} + I_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) + I_2 \left(\sum_{i=1}^n k_i x_i + c \right),$$

Досліджуємо функцію на мінімум. З цією метою прирівнюємо до нуля частинні похідні першого порядку функції L відносно змінних x_i , I_1 , I_2 .

Одержимо систему $(n + 2)$ лінійних алгебраїчних рівнянь з таким самим числом невідомих. Зазначимо, що метод Лагранжа не враховує умови $x_i \geq 0$. Якщо всі розв'язки невід'ємні, то задача розв'язана. Якщо деякі x_i від'ємні, то серед них вибираємо найменше і вважаємо його таким, що дорівнює нулю. Тоді розв'язуємо задачу оптимізації без цінного паперу відповідного виду. Процес вилучення "несприятливих" ЦП продовжуємо до моменту одержання решти невід'ємних значень x_i .

Наприклад, відомі ризики ЦП чотирьох видів $S_1=10\%$, $S_2=15\%$, $S_3=20\%$, $S_4=25\%$ та коефіцієнти кореляції норм прибутків $r_{13} = -0,3$; $r_{12} = r_{14} = r_{24} = 0,2$; $r_{23} = r_{34} = -0,4$. Визначити частки ЦП у портфелі з найменшим ризиком, якщо $x_1 = 2x_2$.

Вираз для ризику портфеля має такий вигляд:

$$V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2,$$

Таким чином, економіко-математична модель має вигляд:

$$V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 = 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1;4}.$$

Одержимо такий розв'язок: $x_1 = 0,4332$; $x_2 = 0,2166$; $x_3 = 0,2658$; $x_4 = 0,0844$,
 $V_n^{\min} = 37,4544$.

Без врахування умови $x_1 = 2x_2$ матимемо такий результат: $x_1 = 0,4251$; $x_2 = 0,2238$; $x_3 = 0,2667$; $x_4 = 0,0844$, $V_n^{\min} = 37,4396$. Накладання додаткової умови приводить до збільшення ризику портфеля.

Дослідимо задачу одержання заданого прибутку. Основна проблема задачі полягає у визначенні структури ПЦП, щоб сподівана норма прибутку портфеля дорівнювала заданій величині m_c та ризик був найменший.

Економіко-математична модель має вигляд [3; 10]:

$$\begin{aligned}
 &V_n \rightarrow \min \\
 &\sum_{i=1}^n x_i m_i = m_c, \\
 &\sum_{i=1}^n x_i = 1, \\
 &x_i \geq 0, \quad i = \overline{1; n}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

де m_i – сподівана норма прибутку ЦП i -того виду.

Доповнимо модель (2) співвідношенням між частками інвестицій, вказаними вище. Функція Лагранжа в цьому разі матиме такий вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_i s_j r_{ij} + I_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) + I_2 \left(\sum_{i=1}^n k_i x_i + c \right) + I_3 \left(\sum_{i=1}^n x_i m_i - m_c \right).$$

У другому випадку умови змінимо. Нехай додатково до інформації прикладу 1 відомі ще такі величини: $m_1 = 20\%$, $m_2 = m_3 = m_c = 30\%$, $m_4 = 50\%$. Необхідно визначити частки ЦП у портфелі з найменшим ризиком, якщо $x_1 = x_2$.

Математична модель матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 V_n = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 \rightarrow \min, \\
 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 = 30,
 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1; 4}.$$

У цьому разі функція Лагранжа така:

$$\begin{aligned}
 L = 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 + \\
 + I_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1) + I_2(x_1 - x_2) + I_3(20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 - 30).
 \end{aligned}$$

Частинні похідні функції Лагранжа рівні:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 200x_1 + 60x_2 - 120x_3 + 100x_4 + I_1 + I_2 + 20I_3, \\
 \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 60x_1 + 450x_2 - 240x_3 + 150x_4 + I_1 - I_2 + 30I_3, \\
 \frac{\partial L}{\partial x_3} &= -120x_1 - 240x_2 + 800x_3 - 400x_4 + I_1 + 30I_3, \\
 \frac{\partial L}{\partial x_4} &= 100x_1 + 150x_2 - 400x_3 + 1250x_4 + I_1 + 50I_3, \\
 \frac{\partial L}{\partial I_1} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1, \\
 \frac{\partial L}{\partial I_2} &= x_1 - x_2, \\
 \frac{\partial L}{\partial I_3} &= 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 - 30.
 \end{aligned} \right.$$

Прирівнявши їх до нуля та розв'язавши систему, одержимо:

$$x_1 = x_2 = 0,2803; x_3 = 0,2992; x_4 = 0,1402; V_n = 41,1956.$$

Без врахування умови $x_1 = x_2$ значення часток такі: $x_1 = 0,3010$; $x_2 = 0,2506$; $x_3 = 0,2979$; $x_4 = 0,1505$; $V_n = 40,9466$.

Визначимо компромісний варіант [7; 12] на основі двох задач. Перша задача – це приклад 1 без умови $x_1 = 2x_2$. Друга задача має вигляд:

$$\begin{aligned} m_n &= 20x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 50x_4 \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^4 x_i &= 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1;4}. \end{aligned}$$

де m_n – сподівана норма прибутку ПЦП. Значення m_i ($i = \overline{1;4}$) взяті з прикладу 2.

Розв'язок цієї задачі такий: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $m_n^{\max} = 50$. Підставивши одержані значення у вираз для V_n прикладу 1, одержимо $V_n = 625$.

Загальний вигляд компромісного варіанта такий:

$$\begin{aligned} z &= x_5 \rightarrow \min, \\ V_n - V_n^{\min} &\leq V_n^{\min} \cdot x_5, \\ m_n^{\max} - m_n &\leq m_n^{\max} \cdot x_5, \\ \sum_{i=1}^4 x_i &= 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1;5}. \end{aligned}$$

У результаті підстановки виразів для V_n прикладу 1 та m_n із другої задачі матимемо:

$$\begin{aligned} z &= x_5 \rightarrow \min, \\ 100x_1^2 + 60x_1x_2 - 120x_1x_3 + 100x_1x_4 + 225x_2^2 - 240x_2x_3 + 150x_2x_4 + 400x_3^2 - 400x_3x_4 + 625x_4^2 - 37,4396x_5 &\leq 37,4396, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 &\geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i = \overline{1;5}. \end{aligned}$$

Її розв'язок такий $x_1 = 0,7088$; $x_2 = 0,2491$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0,0421$; $x_5 = 1,1491$. Тоді $m_n = 23,7540$; $V_n = 80,4597$. Порівнявши найбільші значення прибутку 50 та ризику 625, маємо істотне їх зменшення, особливо ризику.

У подальших дослідженнях розглядатимуться задачі приросту капіталу з використанням ПЦП.

Література

1. Гончаренко В. Визначення оптимальної структури портфеля цінних паперів комерційного банку / В. Гончаренко // Ринок цінних паперів України. – 2011. – №3–4. – С. 67–71.
2. Вітлінський В. В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В. В. Вітлінський. – К. : ДЕМІУР, 1996. – 212 с.

3. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посіб. [для самост. вивч. дисц.] / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К. : КНЕУ, 2000. – 292 с.
4. Лацик Г. М. Оптимізація структури портфеля іпотечних цінних паперів на фінансовому ринку України / Г. М. Лацик // Науковий вісник: фінанси, банки, інвестиції. – 2011. – №1. – С. 80–84.
5. Івахненко І. Активізація діяльності ринку цінних паперів як наслідок зростання його інвестиційних можливостей / І. Івахненко // Ринок цінних паперів України. – 2010. – №5–6. – С. 13–19.
6. Долінський Л. Б. Моделі оцінювання боргових цінних паперів із урахуванням імовірностей дефолтів / Л. Б. Долінський // Фінанси України. – 2010. – № 6. – С. 89–99.
7. Іващук О. Т. Економіко-математичне моделювання в аграрному менеджменті / О. Т. Іващук. – Тернопіль : Екон. думка, 2009. – 232 с.
8. Тэпман Л. Н. Риск в экономике / Л. Н. Тэпман. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 380 с.
9. Івченко І. Ю. Економічний ризик : навч. посіб. / І. Ю. Івченко. – К. : Центр навч. л-ри, 2004. – 304 с.
10. Рэдхэд К. Управление финансовыми рисками / К. Рэдхэд, С. Хьюс. – М. : Инфра-М, 1996. – 160 с.
11. Ляшенко І. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : навч. посіб. / І. М. Ляшенко, М. В. Коробова, А. М. Столяр. – Тернопіль : Навч. кн. – Богдан, 2006. – 304 с.
12. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. / А. В. Катренко. – [3-тє вид., випр. та доп.]. – Львів : Магнолія – 2006, 2009. – 352 с.

Редакція отримала матеріал 23 травня 2013 р.