УДК 628.387

МАСОПЕРЕНОС У ФІЛЬТРАХ З НЕОДНОРІДНИМ ЗАВАНТАЖЕННЯМ

А. А. Нестер, С. В. Демчик
Хмельницький національний університет, м. Хмельницький
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне
e-mail: nester111@yandex.ru

Запропоновано метод розрахунку фільтрів з неперервно неоднорідним завантаженням. Проведені конкретні розрахунки для найбільш типових залежностей кінетичного коефіцієнта від діаметра гранул.

Ключові слова: неперервно неоднорідне завантаження, друковані плати, фільтрувальні елементи.

Вступ

Як показує практика при відновленні водних розчинів, які використовуються в процесах виготовлення друкованих плат і створенні замкнутих циклів використання водних ресурсів, необхідно постійне фільтрування розчинів. У фільтрах з однорідним завантаженням основна маса осаду накопичується у перших по ходу фільтрування шарах. Внаслідок цього неефективно використовуються внутрішні шари завантаження, знижується продуктивність фільтрів та нераціонально використовується гідравлічний напір, так як основна частина втрат напору припадає на вхідні шари, де до того ж осадок спресовується підвищеним перепадом тиску, що, в свою чергу, ускладнює відновлення. Зокрема, з вищезазначених причин використання неоднорідних завантажень, в яких розподіл осадка вирівнюється, є одним з загальновизнаних способів підвищення ефективності роботи фільтрів. За принципом фільтрування в напрямку спадання крупності гранул працюють контактні освітлювачі, двопоточні, багатошарові, контактні та двоступінчасті фільтри. Способи розрахунку характеристик фільтрувальних елементів та завантажень гранично специфічні, що обмежує область їх застосувань та ускладнює узагальнення [1].

Аналіз патентної й науково-технічної літератури показав, що питаннями фільтрування відпрацьованих водних розчинів впритул не займаються. Відомі лише окремі теоретичні роботи, в яких аналізуються частинні випадки теорії процесів фільтрування [2,3].

Постановка завдання: З огляду на існуюче положення, на підприємствах доцільне створення локальних замкнутих систем водного господарства, які працюють в автоматичному режимі та з використанням фільтрів. У даній роботі пропонується метод розрахунку фільтрів з неперервно неоднорідним завантаженням. Показана його ефективність на прикладі найбільш типових залежностей кінетичного коефіцієнта від діаметра гранул завантаження, що спадає за лінійним законом у напрямку фільтрування.

Виклад досліджень

Розглянемо фільтри з неперервно неоднорідним завантаженням, масоперенос в яких описується наступною узагальненою моделлю

$$\left.\begin{aligned} &\rho_t + vC_x = 0, \qquad (1)\\ &\rho_t = \beta(x)C - a(x)\rho, \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

$$C\big|_{x=0} = C_0(t), \;\; \rho\big|_{t=0} = 0., \qquad (3)$$

де $x-$ координата в напрямку фільтрування $(0 \le x \le L)$; $t-$ час; $C(x,t)$ і $\rho(x,t)-$ концентрації, відповідно, домішкових частинок завислих у рідині, що фільтрується, і частинок осаду; $C_0(t)-$ концентрація завислих домішкових частинок на вході фільтру; v=const – швидкість фільтрування; β і $a-$ сталі коефіцієнти.

Концентрація завислих домішкових частинок на вході фільтру вважається залежною від часу, а завантаження в початковий момент вільним від осаду.

Застосовуючи до системи (1) – (3) перетворення Лапласа по змінній t (початкову умову для ρ залишаємо без змін), дістанемо

$$p\overline{\rho} + v\overline{C}_x = 0, \quad (4)$$

$$p\overline{\rho} = \beta(x)\overline{C} - a(x)\rho, \quad (5)$$

$$\overline{C}\big|_{x=0} + \overline{C}_0(p),\ \rho\big|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

З системи (4), (5), при додаткових умовах (6), знаходимо

$$\overline{C}(x,p) = \frac{\overline{C}_0(p)}{p}\exp(-\frac{p}{v}\int_0^x \frac{\beta(x')dx'}{p+a(x')}), \quad (7)$$

$$\overline{\rho}(x,p) = \frac{\overline{C}_0(p)\beta(x)}{p(p+1)}\exp(-\frac{p}{v}\int_0^x \frac{\beta(x')dx'}{p+a(x')}). \quad (8)$$

Надалі для спрощення обчислень обмежимося випадком постійної вхідної концентрації. (Якщо величина постійної вхідної концентрації співпадає із середнім значенням змінної вхідної концентрації, то для фільтрів з достатньо великою товщиною завантаження ці два випадки еквівалентні).

Перепишемо вирази (7), (8) з метою їх спрощення наступним чином

$$C(x,\tilde{t}) + \frac{C_0}{p}\exp(-\frac{p}{v}\int_0^x \frac{\beta(x')dx'}{p+r(x')}), \quad (9)$$

$$\tilde{\rho}(x,\tilde{t}) + \frac{1}{p(p+1)}\exp(-\frac{p}{v}\int_0^x \frac{\beta(x')dx'}{p+r(x')}), \quad (10)$$

де $\tilde{t} = a(x)t, r(x') = a(x')/a(x)$, $\tilde{\rho}(x,\tilde{t}) = \rho(x,\tilde{t})/\rho_*$, $\rho_* = \beta(x)C_0/a(x)$.

Залишається відновити оригінали зображень (9), (10) для найбільш типових залежностей $\beta(x)$ і $a(x)$ від гранулометричного складу завантаження. Методику відповідних розрахунків наведемо на прикладі лінійної залежності ефективного діаметра гранул d від x ($d(x) = d(0)(1-\gamma x), \gamma -$ стала) для найбільш поширених випадків залежності кінетичного коефіцієнта β від d. Крім того, будемо вважати, що $a = a_0/d$, де a_0- стала. $\beta(x) = \beta_0/d^2(x), \beta_0 -$ стала.

Після підстановки виразів для $d(x), \beta(x)$ і $a(x)$ у вираз (9) і інтегрування отримаємо:

$$\overline{C}(x,p) + \frac{C_0}{p}\left(\frac{p+1}{p+b}\right)^{-\frac{DB_1 p}{\gamma}}, \quad (11)$$

де $D = (1-\gamma x)^{-1}, B_1 = \dfrac{\beta_0}{vd^2(0)}, b = 1-\gamma x > 0.$

Як і повинно бути, при $\gamma \to 0$ вираз (11) переходить у відомий розв'язок моделі (1) – (3), для фільтрів з однорідним завантаженням. Дійсно,

$$\overline{C}(x,p) + \frac{C_0}{p}\left(\frac{p+1}{(p+1)-\gamma x}\right)^{-\frac{DB_1 p}{\gamma}} = \frac{C_0}{p}\lim_{\gamma\to 0}\left(1-\frac{\gamma x}{p+1}\right)^{\frac{DB_1 p}{\gamma}} =$$

$$= \frac{C_0}{p}e^{-\frac{DB_1 xp}{p+1}} = \frac{C_0}{p}e^{-DB_1 x}e^{\frac{DB_1 x}{p+1}}.$$

Звідси отримуємо

$$C(\tilde{x},\tilde{t}) = C_0 e^{-\tilde{x}-\tilde{t}}\left[I_0(2\sqrt{\tilde{x}\tilde{t}}) + \int_0^{\tilde{t}} I_0\left(2\sqrt{\tilde{x}(\tilde{t}-\tilde{\eta})}\right)e^{\tilde{\eta}}d\tilde{\eta}\right],$$

де $\tilde{x} = \dfrac{\beta x}{v}(\beta = const), \tilde{t} = at\,(a = const)$, $I_0 -$ функція Бесселя першого роду нульового порядку від уявного аргумента.

Перепишемо вираз (11) у вигляді

$$C(x,\tilde{t})+\frac{C_0}{p}e^{-X_1}=\frac{C_0}{p}\left(1-X_1+\frac{X_1^{\ 2}}{2!}-\frac{X_1^{\ 3}}{3!}+\frac{X_1^{\ 4}}{4!}-...\right), \qquad (12)$$

де $X_1=\frac{DB_1p}{\gamma}\ln\left(\frac{p+1}{p+b}\right)$.

Розкладаючи X_1 в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, будемо мати:

$$X_1=Ap\left(\frac{a_1}{p}-\frac{a_2}{2p^2}+\frac{a_3}{3p^3}-\frac{a_4}{4p^4}+\frac{a_5}{5p^5}-...\right)=Ap\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_n}{p^n}, \qquad (13)$$

де $A=\frac{DB_1}{\gamma}$, $a_n=1-b^n$.

Обмежуючись попередньо першими п'ятьма членами у розкладах (12), (13) і враховуючи, що $\frac{1}{p^{n+1}} \div \frac{t^n}{n!}$, отримаємо:

$$C(x,\tilde{t})=C_0\left(N_0+N_1\tilde{t}-N_2\frac{\tilde{t}^{\,2}}{2!}+N_3\frac{\tilde{t}^{\,3}}{3!}-N_4\frac{\tilde{t}^{\,4}}{4!}+N_5\frac{\tilde{t}^{\,5}}{5!}-..\right), \qquad (14)$$

де

$$N_0=1-a_1A+\frac{a_1^2A^2}{2!}-\frac{a_1^3A^3}{3!}+\frac{a_1^4A^4}{4!},$$

$$N_1=\frac{a_2A}{2}\left(1-a_1A+\frac{a_1^2A^2}{2!}-\frac{a_1^3A^3}{3!}\right),$$

$$N_2=\frac{a_3A}{3}-\left(\frac{2a_1a_3}{3}+\frac{a_2^2}{4}\right)\frac{A^2}{2!}+a_1\left(\frac{3a_2^2}{4}+a_1a_3\right)\frac{A^3}{3!}-$$
$$-a_1^2\left(\frac{3}{2}a_2^2+\frac{4}{3}a_1a_3\right)\frac{A^4}{4!},$$

$$N_3=\frac{a_4A}{4}-\left(\frac{a_1a_4}{2}+\frac{a_2a_3}{3}\right)\frac{A^2}{2!}+\left(a_1a_2a_3+\frac{a_2^3}{8}+\frac{3a_1^2a_4}{4}\right)\frac{A^3}{3!}-$$
$$-a_1\left(2a_1a_2a_3+\frac{1}{2}a_2^3+a_1^2a_4\right)\frac{A^4}{4!},$$

$$N_4=\frac{a_5A}{5}-\left(\frac{a_2a_4}{4}+\frac{a_3^2}{9}+\frac{a_1a_5}{5}\right)\frac{A^2}{2!}+\left(\frac{3}{4}a_1a_2a_4+\frac{a_1a_3^2}{3}+\frac{a_2^2a_3}{4}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{5}a_1^2a_5\right)\frac{A^3}{3!}-\left(\frac{3}{2}a_1^2a_2a_4+a_1a_2^2a_3+\frac{2}{3}a_1^2a_3^2+\frac{a_2^4}{16}+\frac{3}{5}a_1^3a_5\right)\frac{A^4}{4!},$$

$$N_5=\frac{a_6A}{6}-\left(\frac{a_3a_4}{6}+\frac{a_2a_5}{10}\right)\frac{A^2}{2!}+\left(\frac{1}{2}a_1a_2a_3+\frac{3a_2^2a_4}{16}+\frac{a_2a_3^2}{6}\right)\frac{A^3}{3!}+$$
$$+\left(a_1^2a_3a_4+\frac{3}{4}a_1a_2^2a_4+\frac{9}{10}a_1^2a_2a_5+\frac{2}{3}a_1a_2a_3^2+\frac{a_2^3a_3}{6}\right)\frac{A^4}{4!},$$

$(N_i\geq 0,\ i=0,1,...)$.

Із збіжності ряду (12) при довільних X_1 і $p\neq 0$ (в перетворенні Лапласа за означенням $p\neq 0$) випливає збіжність знакопочережного ряду (14) при довільних x і $\tilde{t}$ до оригіналу зображення (11), якщо коефіцієнти N_i і їх необхідна кількість достатньо точно визначені.

Точне значення коефіцієнта N_0 можна знайти виходячи із означення лишка функції $\overline{C}(x,p)$ в точці $p=\infty (\underset{p=\infty}{res}\,\overline{C}(x,p))$. Дійсно, як відомо: $-\underset{p=\infty}{res}\,\overline{C}(x,p)=-c_{-1}$, де c_{-1} – коефіцієнт при $1/p$ ряду Лорана для функції $\overline{C}(x,p)$.

З іншої сторони,

$$\underset{p=\infty}{res}\ \overline{C}(x,p)=\lim_{p\to\infty} p\left[C(x,\infty)-C(x,p)\right].$$

Враховуючи, що $C(x,\infty)=\lim_{p\to\infty} C(x,p)=0,$ звідси і з виразу (11) знаходимо

$$\underset{p=\infty}{res}\ \overline{C}(x,p)=-e^{-a_1 A}.$$

Отже,

$$N_0=e^{-a_1 A}.$$

На підставі виразів (13), (14), шляхом урахування більшого числа членів, неважко знайти і точне значення коефіцієнта N_1, а саме

$$N_1=\frac{a_2 A}{2}e^{-a_1 A}.$$

Інші коефіцієнти являють собою перші члени збіжних знакопочережних рядів. Якщо члени цих рядів і ряду (14) монотонно спадають, то за ознакою Лейбніца похибки, з якими визначені дані коефіцієнти і сума ряду (14) менші за абсолютними величинами перших з відкинутих членів. Отже, область застосовності методу, що розглядається, обмежена вимогою монотонного спадання коефіцієнтів $N_i\ (i\geq 2)$ і членів рядів, які їм відповідають.

Таким чином, уточнений вираз (14) можна представити у вигляді

$$C(x,\tilde{t})=C_0\left((1+\frac{a_2 A\tilde{t}}{2})e^{-a_1 A}-N_2\frac{\tilde{t}^2}{2!}+\right.$$
$$\left.+N_3\frac{\tilde{t}^3}{3!}-N_4\frac{\tilde{t}^4}{4!}+N_5\frac{\tilde{t}^5}{5!}-...\right). \qquad (15)$$

Наведена залежність, як і слід було чекати, є достатньо складною, так як вона описує процес зміни концентрації завислих домішкових частинок у фільтрах з довільним неперервним неоднорідним завантаженням. У зв'язку з цим важливо зауважити, що формальне застосування до виразу (11) перетворення Рімана-Мелліна (як суми лишків у точках 0 і (–1)), приводить до відносно простого, але неправильного результату.

За відомою концентрацією $C(x,\tilde{t})$ можна знайти і концентрацію $\rho(x,\tilde{t})$. Дійсно, з рівняння (2) і початкової умови (3) для ρ знаходимо

$$\tilde{\rho}=e^{-\tilde{t}}\int_0^{\tilde{t}}\tilde{C}(x,\tilde{\eta})e^{\tilde{\eta}}d\tilde{\eta}, \qquad (16)$$

де $\tilde{\rho}=\rho/\rho_*, \rho_*=\beta(x)C_0/a(x), \tilde{C}=C/C_0.$

Відповідно, після підстановки виразу для концентрації $\tilde{C}$ в (16) з урахуванням рівності:

$$\int\tilde{t}^n e^{\tilde{t}}d\tilde{t}=e^{\tilde{t}}\left(\tilde{t}^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n(n-1)...(n-k+1)\tilde{t}^{n-k}\right),$$

будемо мати

$$\tilde{\rho}=N_0(M_0+\frac{a_2 A}{2}M_1)-N_2\frac{M_2}{2!}+$$
$$+N_3\frac{M_3}{3!}-N_4\frac{M_4}{4!}+N_5\frac{M_5}{5!}-..., \qquad (17)$$

де $M_0=1-e^{-\tilde{t}},\ M_1=(\tilde{t}-1)+e^{-\tilde{t}},\ M_2=(\tilde{t}^2-2\tilde{t}+2)-2e^{-\tilde{t}},$

$M_3=(\tilde{t}^3-3\tilde{t}^2+6\tilde{t}-6)+6e^{-\tilde{t}},$

$M_4=(\tilde{t}^4-4\tilde{t}^3+12\tilde{t}^2-24\tilde{t}+24)-24e^{-\tilde{t}},$

$M_5=(\tilde{t}^5-5\tilde{t}^4+20\tilde{t}^3-60\tilde{t}^2+120\tilde{t}-120)+120e^{-\tilde{t}}.$

Вирази (15), (17) достатні для знаходження довільних характеристик процесів фільтрування через неперервні неоднорідні завантаження у випадку, що розглядався.

$\beta(x) = \beta_0 / d^{3/2}(x), \beta_0$ – стала.

Після підстановки виразів для $d(x), \beta(x)$ і $a(x)$ у вираз (9), перетворень і інтегрування дістанемо

$$\overline{C}(x,p) \div \frac{C_0}{p} \exp\left[-B\sqrt{pD} arctg \frac{\sqrt{p}(\sqrt{D}-1)}{p\sqrt{D}+1}\right]., \quad (18)$$

де $B = \dfrac{2\beta_0 D}{\gamma v d^{3/2}(0)}$.

Враховуючи, що нескінченно малі z і $arctg\, z$ є еквівалентними, вираз (18) при $\gamma \to 0$ можна записати наступним чином

$$\overline{C}(x,p) \div \frac{C_0}{p} \exp\left[-\frac{p\beta_0 x}{vd^{3/2}(0)(p+1)}\right] =$$

$$= \frac{C_0}{p} \exp\left[-\frac{\beta_0 x}{vd^{3/2}(0)}\right] \exp\left[\frac{\beta_0 x}{vd^{3/2}(0)(p+1)}\right].$$

Очевидно, оригіналом цього зображення, як і у розглянутому вже випадку, є розв'язок А.Н. Тихонова.

Подамо вираз (18) наступним чином

$$C(x,\tilde{t}) \div \frac{C_0}{p} e^{-X_2} = \frac{C_0}{p}\left(1 - X_2 + \frac{X_2^{\ 2}}{2!} - \frac{X_2^{\ 3}}{3!} + \frac{X_2^{\ 4}}{4!} - ...\right), \quad (19)$$

де $X_2 = B\sqrt{pD} arctg \dfrac{\sqrt{p}(\sqrt{D}-1)}{p\sqrt{D}+1}$.

Розкладаючи X_2 в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, отримаємо

$$X_2 = qB\left(1 - \frac{1}{\sqrt{D}p} + \frac{1}{Dp^2} - \frac{1}{D^{3/2}p^3} + \frac{1}{D^2 p^4} - \frac{1}{D^{5/2}p^5} + ...\right)., \quad (20)$$

де $q = \sqrt{D} - 1$.

Обмежуючись першими п'ятьма членами у розкладах (19), (20), аналогічно попередньому знаходимо

$$C(x,\tilde{t}) = C_0\left(N_0' + N_1'\tilde{t} - N_2'\frac{\tilde{t}^2}{2!} + N_3'\frac{\tilde{t}^3}{3!} - N_4'\frac{\tilde{t}^4}{4!} + N_5'\frac{\tilde{t}^5}{5!} - ..\right), \quad (21)$$

де

$$N_0' = e^{-qB},\ N_1' = \frac{qB}{\sqrt{D}} e^{-qB},\ N_2' = \frac{qB}{D}\left(1 - \frac{3qB}{2} + q^2B^2 + \frac{5q^3B^3}{12}\right),$$

$$N_3' = \frac{qB}{D^{3/2}}\left(1 - 2qB + \frac{5q^2B^2}{3} - \frac{5q^3B^3}{6}\right),$$

$$N_4' = \frac{qB}{D^2}\left(1 - \frac{5qB}{2} + \frac{5q^2B^2}{2} - \frac{35q^3B^3}{24}\right),$$

$$N_5' = \frac{qB}{D^{5/2}}\left(1 - 3qB + \frac{7q^2B^2}{2} - \frac{8q^3B^3}{3}\right).$$

Все сказане відносно рядів (14), (15) та їх коефіцієнтів, очевидно, залишається в силі і для ряду (21).

Відповідно з (16) будемо мати

$$\tilde{\rho} = N_0'(M_0 + \frac{a_2 A}{2} M_1) - N_2' \frac{M_2}{2!} +$$
$$+ N_3' \frac{M_3}{3!} - N_4' \frac{M_4}{4!} + N_5' \frac{M_5}{5!} - ....$$

Висновки: Запропонований метод розрахунку фільтрів з неперервно неоднорідним завантаженням дозволив знайти концентрації C і ρ для найбільш типових залежностей кінетичного коефіцієнта від діаметра гранул. Цього достатньо для знаходження довільних характеристик процесів фільтрування відпрацьованих водних розчинів, що розглядались. Доцільність застосування до вказаних випадків загального методу розрахунку складних процесів фільтрування проблематична через громіздкий алгоритм визначення функції Рімана.

Перспективи подальших досліджень: Подальші дослідження повинні бути направленні на аналіз за допомогою рівнянь можливості використання фільтрів різної конструкції та технології виготовлення для їх застосування в практичних цілях з метою зменшення впливу на навколишнє середовище обладнання для виробництва друкованих плат.

МАССОПЕРЕНОС В ФИЛЬТРАХ С НЕОДНОРОДНОЙ ЗАГРУЗКОЙ

А. А. Нестер, С. В. Демчик
Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий
Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно
e-mail: nester111@yandex.ru

Предложен метод расчета фильтров с непрерывно неоднородной загрузкой. Проведены конкретные расчеты для наиболее типичных зависимостей кинетического коэффициента от диаметра гранул.

Ключевые слова: непрерывно неоднородная загрузка, печатные платы, фильтрующие элементы.

MASS TRANSFER IN FILTERS WITH HETEROGENEOUS MEDIA

A. A. Nester, S.V. Demchik
Khmelnytsk National University, Khmelnytskyi
Rivne State Humanitarian University, Rivne
e-mail: nester111@yandex.ru

The calculation method of filters with continuously heterogeneous media was offered. Specific calculations for most typical dependences of kinetic coefficient from diameter of granules were conducted.

Key words: continuously heterogeneous media, circuit boards, filter elements.

Список літератури:

17. *Запольський А.К.* Комплексная переработка сточных вод гальванического производства / Запольський А.К, Образцов В.В. — К. : Техника, 1989.—199с.
18. *Аюкаев Р.И.* Пути интенсификации работы фильтровальных сооружений / Р.И. Аюкаев, П.А. Грабовский, Г. М. Ларкина // Химия и технология воды. — 1991. — Т. 13. — № 11. — С. 1041 — 1047.
19. *Комарова Е.А.* Применение ступенного фильтрования в технологии водоподготовки / Е.А. Комарова, В.Ф. Накорчевская, Л.А. Кульский // Химия и технология воды. — 1982. — Т. 4, № 3. — С. 240 — 244.