Раздел 2. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА

УДК 517.98

Павлов Е. А.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА В КЛАССЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статті в термінах норми симетричного простору сформульований критерій збіжності симетричного простору E з лебеговим простором L_1.

Ключові слова: *лебеговий простір, функція, норма.*

В статье в терминах нормы симметричного пространства сформулирован критерий совпадения симметричного пространства E с лебеговым пространством L_1.

Ключевые слова: *лебегово пространство, функция, норма.*

The article including characteristic of space L_1.

Key words: *Lebeg space, function, norm.*

Постановка проблемы. Анализ литературы. В геометрии банаховых пространств важную роль играет структура нормы пространства и ее характеристики [1–3]. Представляет интерес выделение таких свойств нормы, которые бы полностью характеризовали банахово пространство, т. е. чтобы характеристическое свойство нормы выделяло однозначно банахово пространство из всего класса симметричных пространств [1].

Цель статьи – получить характеристическое свойство лебегова пространства L_1 в классе симметричных пространств.

Изложение основного материала.

Определение 1 [1].

Пусть E симметричное пространство на $[0,\infty)$ [1, 3]. Фундаментальная функция $\varphi_e(t)=\|X_e\|_E$, где mes $e = t$. (1)

Лемма 1. Любая квазивогнутая на $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.

Лемма 2. Пусть непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ такова, что выполняется равенство $\varphi(m\cdot n) = m\varphi(n)$, $\forall n, m \in N$. (2)

Тогда функция

$\varphi(t) = t$, $\forall t \in [0,\infty)$ [3]. (3)

Теорема. Симметричное пространство E тогда и только тогда совпадает с пространством L_1, когда для любых двух функций $x(t)$ и $y(t)$ с непересекающимися носителями выполняется равенство $\|x(t)+y(t)\|_E = \|x(t)\|_E + \|y(t)\|_E$. (4)

Доказательство.

Необходимость очевидна.

Достаточность.

Пусть $x(t) = x[0, t]$, $y(t) = x\,(t,2t)$.

Тогда $\left\|\chi_{[0,t]}(\tau)+\chi_{(t,2t]}(\tau)\right\|_E = 2\left\|\chi_{[0,t)}\right\|_E$. (5)

С другой стороны,

$$\left\|\chi_{[0,t]}+\chi_{(t,2t]}\right\|_E = \left\|\chi_{[0,2t]}\right\|_E = \varphi_E(2t).$$

Итак, $\varphi_E(2t) = 2\varphi_E(t)$. (6)

Аналогично рассуждая для трех, четырех и т. д. n функций с непересекающимися носителями, получим $\varphi_E(k\cdot t) = k\varphi_E(t)$. (7)

Согласно лемме 2, получим $\varphi_E(t) = t$. (8)

Тогда [2] $E \approx L_1$. (9)

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. А. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
2. Павлов Е. А. Операция свертки и операторы типа свертки в банаховых функциональных пространствах : дис. … докт. физ.-мат. наук / Е. А. Павлов. – Луганск, 1993. – 232 с.
3. Функциональный анализ / под ред. С. Г. Крейна. – М. : Наука, 1972.