УДК 511:519.6

Павлов Е. А., Омельченко Е. А.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ ТЕМЫ «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ»

В роботі розглядається нетрадиційний підхід до подання данної теми, який дозволяє покращити засвоєння матеріалу студентами зі слабкою математичною підготовкою.

Ключові слова: *визначник, рядок, стовбчик.*

В работе рассматривается нетрадиционный подход к изложению данной темы, который позволяет легче усвоить материал студентам со слабой школьной математической подготовкой.
Ключевые слова: *определитель, строка, столбец.*
The article deals with the alternative approach to the given subject which allows to learn the material much easier with the students, having low school mathematic preparation.
Key words: *determinant, line, column.*

Постановка проблемы. Практически во всех учебниках и учебных пособиях принято изложение данной темы с использованием понятий «подстановка», «инверсия», «перестановка», которые плохо воспринимаются студентами и не имеют практического значения. Возникает проблема доступности изложения.

Анализ литературы. Понятие определителя *n*-го порядка в учебной литературе (например, [1]) вводится с использованием понятия «инверсия», которое, как показывает практика, затрудняет восприятие учебного материала по данной теме.

Авторами учебников [2; 3] представлена методика доступного изложения материала, связанная с разложением определителей.

Цель данной **статьи** – дать доступное каждому студенту изложение темы «Определители», которое поможет практически вычислять определители.

Изложение основного материала.

Определение 1.

Пусть A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица 2-го порядка.

Определителем 2-го порядка, соответствующим матрице 2-го порядка, называется число, символически обозначаемое так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Свойство 1. При замене строк определителя на столбцы с теми же номерами (операция транспонирования), получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. значение определителя не изменится при транспонировании.

Свойство 2. Поменяем местами две строки или 2 столбца, получим

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

т. е. перестановка двух строк или столбцов определителя равносильна умножению его на число 1.

Свойство 3. Несложно доказать, что

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

т. е. общий множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя можно выносить за знак этого определителя.

Свойство 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha a_{11} & a_{22} + \alpha a_{12} \end{vmatrix} \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \alpha a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \alpha a_{21} \end{vmatrix},$$

т. е. если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель α, то величина определителя не изменится.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то и определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}.$$

Следствие 1. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 2. Определитель равен нулю, если соответствующие элементы хотя бы двух строк (или столбцов) пропорциональны.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ если } \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \text{ или } \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Определение 2.

Определителем 3-го порядка, соответствующим квадратной матрице 3-го порядка, называется число, которое обозначается

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и вычисляется так:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}a_{i3}A_{i3} \qquad (1)$$

$$A_{ii} = (-1)^{i+i}\Delta_{ij},$$

где Δ_{ij} – минор, определитель 2-го порядка, который получается вычеркиванием из определителя матрицы *A* *i*-й строки и *j*-го столбца.

Формула (1) называется разложением определителя по *i*-й строке. Аналогично можно разложить определитель по всякому его столбцу.

Замечание.

По индукции вычисляется определитель любого *n*-го порядка с помощью определителей (*n* – 1)-го порядка.

Определение 3.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 4-го порядка.

Тогда

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2}a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4},$$

где $Aij = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, где Δ_{ij} – определители 3-го порядка, которые получаются вычеркиванием из определителя матрицы *A* *i*-й строки и *j*-го столбца.

Замечание.

Аналогично определяем определитель 5-го, 6-го и т. д. *n*-го порядков по индукции, т. е. определитель *n*-го порядка определяется равенством

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, Δ_{ij} –определитель (*n* – 1)-го порядка, полученный вычеркиванием из определителя матрицы *A* *i*-й строки и *j*-го столбца.

Обратите внимание на то, что если хотя бы один из элементов строки (или столбца) разложения в определителе равен нулю, процесс вычисления упрощается.

Поэтому на практике, как правило, обнуляют (*n* – 1) элементов какой-либо строки (столбца), используя свойства 1–5, а затем вычисляют определитель *n*-го порядка сведением его к одному определителю (*n* – 1)-го порядка.

Выводы. Учитывая невысокий уровень математической подготовки студентов, считаем необходимым использование данной методики изложения материала при изучении темы «Определители».

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 176 с.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. для вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – [6-е изд.]. – Ч. 1. – М. : ООО «Издательство «Оникс» ; ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005. – 304 с.
3. Высшая математика. Общий курс : учебник / [А. В. Кузнецов, Л. Ф. Янчук, С. А. Мызгаева и др.] ; под общ. ред. проф. А. И. Яблонского. – Минск : Вышейша школа, 1993. – 349 с.