УДК 550.34.01

Ситшаева З. З., Билялова Л. Р., Билялова Э. В.

ДИСКРЕТНАЯ ПРОГНОСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПОЛЗНЕВОГО ПРОЦЕССА

У статті розглядаються геодинамічні математичні моделі и пропонується дискретна прогностична модель зсувного процесу.

Ключові слова: *зсувні процеси, математична модель, дискретизація.*

В статье рассматриваются математические модели геодинамики и предлагается дискретная прогностическая модель оползневого процесса.

Ключевые слова: *оползневые процессы, математическая модель, дискретизация.*

The article deals with the geodynamics mathematical models. There is offered discrete prognostic one for landslides process.

Key words: *landslides process, mathematical model, discretization.*

Постановка проблемы. Одной из актуальных прикладных проблем современной науки является моделирование механизма возникновения и протекания природных катастроф, в том числе и оползневых процессов. Методы прогнозирования на основе динамических математических моделей широко применяются в мировой практике и являются одним из ключевых направлений фундаментальных и прикладных исследований в геофизике, информатике и математике [1].

Анализ литературы. Для теоретического исследования и численного моделирования геодинамических процессов в основном используются конечно-разностные методы (схемы Лакса-Вендроффа и Мак-Кормака) [2–4].

Для изучения оседания земной поверхности в работе [5] А. О. Фаддеев и В. А. Минаев использовали трехмерную гидрогеологическую модель, сопряженную с одномерной моделью уплотнения водовмещающих и разделяющих слоев.

А. С. Бобрович и И. С. Рогозин в [6] применили анизотропную модель грунта по параметрам угла внутреннего трения и сцепления грунта:

$$S_{pwi} = P\mathrm{tg}\varphi_{wi} + C_{wi},$$

где S_{pwi} – сопротивление глинистого грунта сдвигу при нагрузке P и влажности w;
P – действующее нормальное напряжение;
φ_{wi} –значение угла внутреннего трения при угле среза (i), равном углу между горизонталью и нормалью к зеркалу среза;
C_{wi} – сцепление при угле среза (i), равном углу между горизонталью и нормалью к зеркалу среза.

И. Д. Музаев применил интегральные преобразования Лапласа и Фурье для численных расчетов последствий процесса вторжения в заполненное водохранилище обвально-оползневого массива на основе математической модели потока лавинного характера [7].

В расчетах напряженно-деформированного состояния оползневого склона применяется также метод конечных элементов, а С. С. Ниязбеков в работе [8] использовал метод расчетов по предельному состоянию для получения информации для принятия проектного решения по степени и достаточности противооползневой защиты дорожного земляного полотна.

В последнее время исследователи используют вычислительные схемы, называемые методом частиц (МЧ), обычно применяемые при численном моделировании процессов газодинамики и гидродинамики [9–11].

Для математического описания движения на склонах и других наклонных криволинейных поверхностях сплошных сред используется также теория мелкой воды (ТМВ). Уравнения теории мелкой воды являются более грубыми, чем полные уравнения гидромеханики и механики сплошной среды, и являются некоторым приближением последних.

Имеются работы, в которых МЧ и конечно-разностные методы совместно применяются в ТМВ [12; 13].

С. В. Богомолов и К. В. Кузнецов для численного моделирования движения оползня-потока используют вариант МЧ, состоящий в адаптации формы частиц на каждом шаге по времени с целью выполнения условия слабой аппроксимации исходного решения, предложенный в [10].

В основе моделирования оползневого процесса В. Свалова положила теорию движения вязкой жидкости в тонком слое, т. е. начально-краевую задачу для уравнения непрерывности и уравнения Навье-Стокса [14].

Для создания прогнозной модели Herbert Neuland [15] исследовал коэффициент корреляции для тридцати одного показателя оползня (вся выборка насчитывала 150 объектов) и выяснил, что независимыми можно считать, лишь девять из них. Им была построена прогнозная функция в виде:

$$\mathrm{T} = 0{,}92222 \times 10^{-5}\mathrm{HN}^2 + 0{,}7926 \times \lg(\mathrm{FL} + 10) - 0{,}6098 \times \lg(\mathrm{EIND} + 10),$$

где HN и FL – крутизна и обводненность склона; EIND – плотность почвы.

Цель данной **работы** – разработка прогностической дискретной пространственно-временной математической модели оползня.

Изложение основного материала. Основная причина оползней состоит в нарушении устойчивости склона в результате природных процессов или человеческой деятельности, когда в какой-то момент времени силы связности грунтов или горных пород оказываются меньше, чем сила тяжести, например, при определенных сочетаниях структуры почвы, влажности и угла наклона. В результате оползня происходит перераспределение почвы в процессе резких обвалов или медленного постепенного скольжения, и геодинамическая структура приходит, возможно, на некоторое время, в состояние равновесия.

Рассмотрим двумерное движение тела оползня, следуя [16].

Пусть склон представляет собой наклонную плоскость.

Введем: систему координат $Oxyz$ так, что ось Ox направлена вдоль склона, а оси y и z – в плоскости, ортогональной к Ox и обозначения: h – осредненная глубина потока, измеренная по нормали к Ox; u, v – компоненты осредненной по глубине скорости вдоль Ox, L – расстояние, на котором h, u, v меняются на величины порядка их самих.

Пусть $h/L << 1$, и среда является несжимаемой и однородной. Тогда уравнения неразрывности и движения потока имеют вид:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{du_x}{dt} = \rho g\sin\alpha\cos\theta - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \rho\dfrac{du_y}{dt} = \rho g\sin\alpha\sin\theta - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{yz}}{\partial z}; \\ \rho\dfrac{du_z}{dt} = -\rho g\cos\alpha - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u_n = (u_x, u_y, u_z)$ – компоненты скорости, в качестве массовых сил рассматривается сила тяжести с ускорением g, α – угол склона к горизонту, θ – угол между Ox и дном потока, p – давление, $\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$ – тензор напряжения.

Скольжение происходит по дну потока $z = 0$, уравнение свободной поверхности имеет вид $z = h(x, y, t)$. На границах должны выполняться кинематические и динамические условия. Если нет потока массы через границу за счет фильтрации на дне и дождевого потока или испарения на поверхности, то кинематические условия состоят в том, что нормальные составляющие скорости среды на границе и скорости границы совпадают:

$$u_n\big|_\Gamma = (\vec{u}\cdot\vec{n})\big|_\Gamma = (u_x\cdot n_x + u_y\cdot n_y + u_z\cdot n_z)_\Gamma, \quad (3)$$

где $u_n\big|_\Gamma$ – компоненты скорости границы;

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней по отношению к среде нормали к границе; для нижней границы $z = 0$, $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = -1$, $u_n = u_z$, $u_n = 0$, а для свободной поверхности: $z - h(x, y, t) = 0$,

$$n_x = -\frac{1}{N}\frac{\partial h}{\partial x},\ n_y = -\frac{1}{N}\frac{\partial h}{\partial y},\ n_z = \frac{1}{N},$$

$$N = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2},$$

$$u_n = -\frac{1}{N}\left(u_x\frac{\partial h}{\partial x} + u_y\frac{\partial h}{\partial y} - u_z\right).$$

Продифференцируем компоненты скорости точки верхней границы, удовлетворяющей равенству $z - h(x, y, t) = 0$ по t, и получим соотношения:

$$u_{z\Gamma} - \frac{\partial h}{\partial x}\cdot u_{x\Gamma} - \frac{\partial h}{\partial y}\cdot u_{y\Gamma} - \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

и $u_{n\Gamma} = \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial h}{\partial t}$,

откуда имеем кинематические условия на дне и свободной поверхности потока

$$\begin{cases} u_z = 0, & \text{при } z = 0 \\ u_z = \dfrac{\partial h}{\partial t} + u_x\dfrac{\partial h}{\partial x} + u_y\dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{dh}{dt}, & \text{при } z = h(x, y, t). \end{cases} \quad (4)$$

Для потоков, содержащих глину, камни, глинистые растворы, сыпучие материалы, в [15] предлагается следующая зависимость:

$$\tau = \tau_C + \rho u^2, \quad (5)$$

где коэффициент τ_C не зависит от скорости.

Для сыпучих материалов коэффициент τ_C вычисляется с помощью закона Кулона (трение пропорционально нормальному давлению) и для потока на поверхности

$$\tau_C = k_C + \rho gh\cos\alpha, \quad (6)$$

где k_C – коэффициент кулоновского трения.

В [6] предложена модификация формулы для сухого трения, которая состоит в том, что пока не превышен предел прочности материала движущегося потока или склона трение вычисляется по формуле (6); если трение по Кулону оказывается выше предельного, то трение считается равным предельному, т. е.

$$\tau_C = \begin{cases} k_C\,\rho\, g\, h\cos\alpha, & \tau_C \le \tau_*, \\ \tau_*, & \tau_C > \tau_* \end{cases},$$

где τ_* – наименьший из пределов прочности на сдвиг материалов потока и его дна.

Расчеты устойчивости склонов основываются на идее предельного пластического равновесия: если касательные напряжения по поверхности скольжения становятся равными прочности грунта на сдвиг, то возникает состояние предельного равновесия:

$$\tau = s/\eta, \quad (7)$$

где τ – касательная составляющая напряжения;
s – прочность сдвига;
η – коэффициент устойчивости.

Согласно теории Мора-Кулона для s имеем:

$$s = C + \sigma_n \mathrm{tg}\varphi, \quad (8)$$

где σ_n – нормальное напряжение;
C и φ – характеристики прочности грунта.

Поскольку предполагается, что поверхность скольжения плоская, то коэффициент устойчивости определяется выражением:

$$\eta = (N\mathrm{tg}\varphi + CS)/T, \quad (9)$$

где N и T – нормальная к плоскости скольжения и тангенциальная, действующая вдоль плоскости скольжения, силы соответственно;
S – площадь поверхности скольжения.

Заметим, что значения k_C и коэффициент гидравлического трения k_Γ не являются постоянными в процессе движения оползня. Однако описание изменения этих величин является сложным, поэтому обычно при расчетах они считаются константами, не зависящими от x и t. На основании данных о типичных углах β естественного откоса горных осыпей для коэффициентов сухого трения $k_C \approx \mathrm{tg}\beta$ в работе [3] предлагается следующий диапазон для k_C и для k_Γ:

$$0{,}55 \le k_C \le 0{,}85,$$
$$0{,}01 \le k_\Gamma \le 0{,}1.$$

Действующая на оползень сила состоит из двух компонент: силы тяжести ($gh\sin\alpha$) и градиента гидростатического давления $\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\cos\alpha\right)}{\partial x}\right)$, и действует как на элемент потока, так и на его остановившуюся часть. На основе приведенных рассмотрений запишем систему уравнений движения оползня по склону в одномерном приближении при $x \geq x_0$, $t \geq 0$ в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(hu)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}g\,h^2\cos\alpha\right)}{\partial x} = g\,h\sin\alpha - k_Г\,u|u| - k_C\,g\,h\cos\alpha \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = -\dfrac{\partial(hu)}{\partial x} \end{cases}. \tag{10}$$

Начальные условия для поставленной задачи имеют вид:

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0} = u_0(x) \\ h(x,t)|_{t=0} = h_0(x) \end{cases}. \tag{11}$$

Значения коэффициентов k_C, $k_Г$ и геометрические характеристики склона и оползневого потока $\alpha(x)$, $h_0(x)$, $u_0(x)$ считаются известными.

Задача Коши для системы двух дифференциальных уравнений в частных производных (10) с начальными условиями (11) в работе [13] решается с помощью МЧ при постоянных значениях функций h и α. В настоящей работе предлагается конечно-разностная аппроксимация поставленной задачи, которая позволяет вычислять решение, как для постоянных, так и переменных h и α.

Введем сеточное разбиение по переменным x и t с шагами Δx и Δt:

$x_{i+1} = x_i + \Delta x$; $i = \overline{0, n-1}$, $x_0 = 0$, $x_n = L$,

$t_{i+1} = t_i + \Delta t$; $t_0 = 0$; $i = 1, 2, 3, \ldots$

и обозначим через $h_{ij} = h(x_i, t_j)$; $v_{i,j} = v_{ij}(x_i, t_j)$ значения искомых функций в узлах сетки (i, j). Заменим в задаче (10), (11) частные производные функций в каждой точке (x_i, t_j) их конечно-разностными аналогами:

$$\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)_{i+1,j} = \frac{v(x,t+\Delta t) - v(x,t)}{\Delta t} = \frac{v(x_i,t_{j+1}) - v(x_i,t_j)}{\Delta t} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta t},$$

$$\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)_{i+1,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x},\ \Delta x = x_{i+1} - x_i,\ \Delta t = t_{j+1} - t_j,$$

и в результате получим систему $2n$ конечно-разностных уравнений относительно переменных (h_{ij}, v_{ij}) в каждой точке t_1, t_2:

$$\begin{cases} \dfrac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta t} = -\dfrac{h_{i+1,j}\,v_{i+1,j} - h_{i,j}\,v_{i,j}}{\Delta x} \\ \dfrac{h_{i,j+1}\,v_{i,j+1} - h_{i,j}\,v_{i,j}}{\Delta t} + \dfrac{\left(h_{i+1,j}\,v^2{}_{i+1,j} + \frac{1}{2}g\cos\alpha\,h^2{}_{i+1,j}\right) - \left(h_{i,j}\,v^2{}_{i,j} + \frac{1}{2}g\cos\alpha\,h^2{}_{i,j}\right)}{\Delta x} = \\ = g\sin\alpha\,h_{i,j} - k_Г\,v_{i,j}\left|v_{i,j}\right| - k_C\,g\cos\alpha\,h_{i,j} \end{cases} \tag{12}$$

Функции $h(x,t)$, $v(x,t)$ при j = 0 считаем известными: $h_{i,0} = (h_0)_i$, $v_{i,0} = (v_0)_i$, $i = \overline{0,n}$. Вводя обозначения A = 1/2$g\cos\alpha$, $B = \sin\alpha$, $C = k_C g\cos\alpha$, из (12) получаем явные итерационные формулы для искомых величин:

$$\begin{cases} h_{i,j+1} = h_{i,j} - \dfrac{h_{i+1,j}\,v_{i+1,j} - h_{i,j}\,v_{i,j}}{\Delta x}\cdot\Delta t \\ v_{i,j+1} = [h_{i,j}\,v_{i,j} - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_{i+1,j}\,v^2{}_{i+1,j} + A\cdot h^2{}_{i+1,j} - h_{i,j}\,v^2{}_{i,j} - A\cdot h^2{}_{i,j}\right)\times \\ \times\Delta t\left(B\cdot h_{i,j} - k_Г\,v_{i,j}\left|v_{i,j}\right| - C\cdot h_{i,j}\right)]/h_{i,j+1} \end{cases} \tag{13}$$

Выводы. Математические модели, основанные на теории мелкой воды, являются эффективным инструментом для исследования динамики оползневого процесса. Дискретные модели и итерационные схемы их решения позволяют получить численные результаты и для переменных характеристик оползня. Поскольку математическая модель имеет переменную границу (вдоль зеркала склона), то это следует учитывать при проведении численных расчетов. Поскольку разные части оползня не останавливаются одновременно, то в точках останова грунта следует проверить соотношение величин активной силы и силы трения. Если сила трения больше активной силы, то ее следует заменить силой, равной по абсолютной величине и обратной по направлению активной силе. Если активная сила меньше, чем сила сухого трения, то движения остановившейся части потока не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Про затвердження Основних наукових напрямів та найважливіших проблем фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і гуманітарних наук на 2009–2013 роки. Наказ МОНУ та НАНУ від 26 листопада 2009 р. – № 1066/609. – 2009 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mon.gov.ua/?id=2.
2. Григорян С. С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней / С. С. Григорян // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 244. – № 4. – С. 846–849.
3. Математическое моделирование горных обвалов и оползней больших объемов / С. С. Григорян, Н. Н. Нилов, А. В. Остроумов, В. С. Федоренко // Инженерная геология. – 1983. – № 6. – С. 61–73.
4. Бахвалов Н. С. Исследование одномерного движения снежной лавины по плоскому склону / Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит // Механика жидкости и газа. – 1973. – № 5. – С. 7–14.
5. Минаев В. А. Оползни, оседания, карстовые явления как проявления «медленных» катастроф [Электронный ресурс] / В. А. Минаев, А. О. Фаддеев. – Режим доступа : http://agps-2006.narod.ru/ttb/2006-5/29.ppt.06.pdf.
6. Бобрович А. С. Определение вероятности образования оползня с учетом анизотропной модели грунта / А. С. Бобрович // Успехи современного естествознания. – 2007. – № 7. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=447312.
7. Музаев И. Д. Математическое моделирование некоторых опасных экзогенных и гидравлических процессов [Электронный ресурс] / И. Д. Музаев, В. Г. Созанов / Северо-Осетинский государственный ун-т. – Режим доступа : http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=27.
8. Ниязбеков С. С. Методика расчета и проектирования противооползневых сооружений для защиты дорожного земляного полотна : автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук : спец. 05.23.11 / С. С. Ниязбеков. – М. : НИИ транспортного строительства, 2006. – 27 с.
9. Консервативный метод частиц для квазилинейного уравнения переноса / С. В. Богомолов, А. А. Замараева, Х. Карабелли, К. В. Кузнецов // ЖВМиМФ. – 1998. – Т. 38. – № 9. – С. 1602–1607.
10. Богомолов С. В. Метод частиц для систем уравнений газовой динамики / С. В. Богомолов, К. В. Кузнецов // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 3. – С. 93–100.
11. Хокни Р. Численное моделирование методом частиц / Р. Хокни, Д. Иствуд. – М. : Мир, 1987. – 633 с.
12. Богомолов С. В. Моделирование движения потоков различной природы по наклонной поверхности методом частиц [Электронный ресурс] / С. В. Богомолов, Е. В. Захаров, С. В. Зеркаль // Вестник ХНУ. Серия «Математическое моделирование». – 2003. – № 12. – С. 115–119.
13. Зеркаль С. В. Математическое моделирование движения оползней-потоков методом частиц : автореф. на соискание ученой степени докт. г.-м. наук : спец. 05.13.18 / С. В. Зеркаль. – М. : МГУ, 2002. – 14 с.
14. Свалова В. Mechanical-mathematical modeling for sedimentary movement and landslide processes / В. Свалова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://iamg09.stanford.edu/IAMG09%20Abstracts/Valentina%20Abstract.pdf.
15. Neuland H. Lehrstuhl für Hydrologie im FB Geowissenschaften Universität Bayreuth [Электронный ресурс] / Herbert Neuland. – Режим доступа : http://www.sciencedirect.com/science.
16. Эглит М. Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах / М. Э. Эглит. – М. : МГУ, 1986. – 96 с.