

УДК 519.25

Долгин В. П., Владецкая Е. А., Братан С. М.

РЕАКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ СИГНАЛ

Аннотация. Предложен метод вычисления реакции динамической системы на входной сигнал, изменяющийся во времени по произвольному закону, включая сигналы, имеющие широкий спектр, в том числе полигармонические со случайными фазами и амплитудами. Изложена методика численной реализации метода. Приведен пример вычисления выходного сигнала по заданной передаточной функции системы на входной сигнал со случайным характером изменения уровня в случайные моменты времени. Рассмотрены особенности уменьшения внешних воздействий на технологическую систему шлифовального станка в условиях плавучей ремонтной мастерской путем использования демпфирующего устройства – виброизолирующей опоры новой конструкции.

Ключевые слова: динамическая система, критерий, дисперсия, статистическая погрешность, качество, шлифовальный станок, плавучая ремонтная мастерская.

Долгін В. П., Владецька О. А., Братан С. М.

РЕАКЦІЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ДОВІЛЬНИЙ СИГНАЛ

Анотація. Запропонований метод обчислення реакції динамічної системи на вхідний сигнал, що змінюється в часі за довільним законом, включаючи сигнали, що мають широкий спектр, у тому числі полігармонічні з випадковими фазами і амплітудами. Викладена методика чисельної реалізації методу. Наведений приклад обчислення вихідного сигналу по заданій передатній функції системи на вхідний сигнал з випадковим характером зміни рівня у випадкові моменти часу. Розглянуті особливості зменшення зовнішніх дій на технологічну систему шліфувального верстата в умовах плавучої ремонтної майстерні шляхом використання демпфуючого облаштування – віброізолюючої опори нової конструкції.

Ключові слова: динамічна система, критерій, дисперсія, статистична погрешність, якість, шліфувальний верстат, плавуча ремонтна майстерня

Dolgin V. P., Vladetskaya E. A., Bratan S. M.

DYNAMIC SYSTEM REACTION TO AN ARBITRARY SIGNAL

Summary. A method for calculating the dynamic response of the system to an input signal which varies according to random acts, including signals having a wide range including polyharmonic with random phases and amplitudes is offered. The technique of numerical implementation of the method was proposed. An example of the calculation of the output signal for a given transfer function to the input signal from the random nature of the level in random periods of time is proposed. The features of reducing the external affect on technological system of polishing machine-tool in the conditions of floating repair shop by the use of snubber – vibroinsulating support of new construction are considered.

Emerging challenges associated with vibration resistance of such technical facilities like machines, operating under a floating repair shop, automotive systems require new approaches to the modeling of reactions of their dynamical systems on arbitrary waveforms. The purpose of this paper is to obtain a numerical procedure for evaluating response of linear systems with lumped parameters for arbitrary waveform without converting input. This affords an opportunity to calculate the response of the system to an arbitrary input signal without converting its procedures. The error obtained at numerical solution depends on the quantization step size. Damping factor to evaluate the quality of the suspension and the effect of input offset parameters is introduced.

Key words: dynamical system, the criteria, variance, the error of statistical quality, polishing machine-tool, floating repair shop.

Постановка проблемы. Анализ реакции динамических систем на сигнал произвольной формы представляет собой особую задачу. Ее решение возможно путем разложения сигнала и представления его в полигармонической форме. При этом возникает проблема определения требуемого числа гармонических составляющих и вычисления значений их амплитуд, что осложняет решение задачи и приводит к появлению погрешности. Возможен рекуррентный метод [1] анализа реакции динамической системы по ее операторной передаточной функции, исключаяющую процедуру преобразования сигнала.

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросам исследования реакции динамической системы на внешние воздействия посвящено большое количество работ, накоплен справочный материал, в частности по защите технических объектов от вибраций и ударов [2]. Разработан математический аппарат для автоматического управления различными техническими и технологическими объектами и системами, позволяющий использовать численные методы анализа и синтеза систем и объектов в конкретных примерах [3].

Однако возникающие новые задачи, связанные с виброустойчивостью таких технических объектов, как станки, работающие в условиях

плавающей ремонтной мастерской, автомобильные системы, требуют новых подходов к моделированию реакций их динамических систем на сигналы произвольной формы.

Цель статьи состоит в получении численной процедуры вычисления реакции линейной системы с сосредоточенными параметрами на сигнал произвольной формы без преобразования входного сигнала.

Изложение основного материала. Рассмотрим процедуру получения решения в обобщенной форме. Для входного сигнала X звена с операторной передаточной функцией $W(p) = \frac{C(p)}{Z(p)}$,

где $C(p) = b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m$ – оператор воздействия, $Z(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n$ – собственный оператор, p – оператор Лапласа, допустимо описание связи входного X и выходного Y сигналов в форме

$$\begin{aligned} X(b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m) \\ Y(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n) \end{aligned} \quad (1)$$

Задача состоит в получении решения уравнения (1) относительно выходного сигнала Y при известном входном сигнале X , коэффициентах b_0, \dots, b_m и a_0, \dots, a_n . Запишем одно из возможных решений уравнения (1) в операторной форме:

$$Y = \frac{Xb_0 - Ya_0}{a_n p^n} + \frac{Xb_1 - Ya_1}{a_n p^{n-1}} + \dots + \frac{Xb_m - Ya_m}{a_n p^{n-m}} - \frac{Ya_{m-1}}{a_n p^{n-m-1}} - \dots - \frac{Ya_{n-1}}{a_n p} ; n > m. \quad (2)$$

Для получения решения во временной области необходимо выполнить интегрирование, так как p^{-q} означает q – кратное интегрирование слагаемых, содержащих $q = 1, \dots, n$.

С этой целью уравнение (2) представим в тождественной форме:

$$Y = a_n^{-1} \left(p^{-n}(Xb_0 - Ya_0) + p^{1-n}(Xb_1 - Ya_1) + \dots + p^{m-n}(Xb_m - Ya_m) - p^{1+m-n}Ya_{m-1} - \dots - p^{-1}Ya_{n-1} \right) ; n > m.$$

Выполняя последовательно интегрирование с некоторым шагом по времени h , найдем дискретные значения выходного сигнала $Y(t)$ для значений $t = 0, h, 2h, \dots, zh$, где z – число значений, на которые разбит временной интервал.

Пример 1. На рис. 1 изображена кинематическая схема звена второго порядка, которая может быть применена при моделировании технологических процессов, динамических систем станков, автомобилей, систем виброизоляции и др.

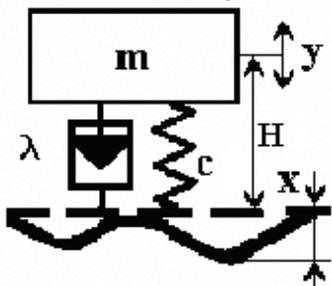


Рис. 1. Кинематическая схема.

Динамическая система, изображенная на рис. 1, имеет следующие обозначения: m – масса, кг; c – жесткость, Н/м; λ – сопротивление потерь, Нс/м; y – изменение положения центра тяжести, м; H – положение центра тяжести, м.

На основании изложенной методики представим процедуру преобразования дифференциального уравнения системы.

Запишем дифференциальное уравнение с учетом введенных обозначений в виде

$$\begin{aligned} my'' + \lambda y' + cy &= kx; \\ y'' &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} y ; y' = \frac{\partial}{\partial t} y ; \\ m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y \right) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} y \right) + cy &= kx. \end{aligned}$$

Сведем к операторной форме полученное выражение, учтя связь производной с дифференциалом и введя символ (оператор) дифференцирования p :

$$\begin{aligned}
 py &= \frac{\partial}{\partial t} y; p^2 y = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y; \\
 mp^2 y + lpy + cy &= kx.
 \end{aligned}$$

Перейдем к стандартной (безразмерной) форме:

$$\begin{aligned}
 a_2 = m/c; a_1 = l/c; k/c = 1; \\
 a_2 p^2 y + a_1 p y + y = x.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Разделив переменные x и y

$$y(a_2 p^2 + a_1 p + 1) = x,$$

получим операторную передаточную функцию

$$W_1(p) = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + 1},$$

по которой для сравнения можно вычислить реакцию на стандартный сигнал.

Получим решение уравнения (3) в рекурсивной форме:

$$\begin{aligned}
 mp^2 y &= c(x - y) - lpy; \\
 y &= c(x - y)/mp^2 - lpy/mp; \\
 y &= (c(x - y)/p - lpy)/mp.
 \end{aligned}$$

Выполним интегрирование по методу Эйлера:

$$\begin{aligned}
 y &= y + c(x - Y)h; \\
 Y &= Y + (y - lY)h/m.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем к рекуррентной форме:

$$\begin{aligned}
 y[i] &= y[i - 1] + c(x[i] - Y[i - 1])h; \\
 Y[i] &= Y[i - 1] + (y[i] - lY[i - 1])h/m,
 \end{aligned} \quad (5)$$

где $i = 1, \dots, z$.

Одно из полученных решений (4) и (5) либо их комбинация могут быть применены для вычисления реакции системы на произвольный дискретно заданный входной сигнал.

Пример 2. Имитационная модель. Для иллюстрации результатов анализа реакции системы подвески автомобиля в качестве примера выбраны параметры автомобиля ВАЗ-2101:

- масса автомобиля – $M_a = 950$ кг;
- грузоподъемность – $M_g = 300$ кг;
- коэффициент загрузки – $K_z = 0,5$;
- приведенная масса – $m = (M_a + M_g \times K_z)/4$ кг;
- осадка под нагрузкой – $D_h = 0,169$ м;
- жесткость рессоры – $c = 4353$ Н/м;
- коэффициент демпфирования – $x_i = 0,5$;
- сопротивление амортизаторов – $L = 1094$ Нс/м;
- положение кузова – $H = 0,35$ м;
- максимальная величина неровностей – $D = 9$ Н/м.

Задав временной интервал t_0 и число реализаций z , найдем шаг дискретизации по времени h . При известном значении h по формуле (5) вычислим значения $Y_i = Y(t_i)$, где $t_i = ih; i = 0, \dots, z$. Для заданных моментов времени t_i получим значения $X_i = X(t_i)$, что позволяет построить графики входного воздействия $X(t)$ и реакции подвески $Y(t)$.

На рис. 2 изображены графики рельефа поверхности дорожного покрытия $X(t)$ и реакции подвески $Y(t)$ при номинальных параметрах.

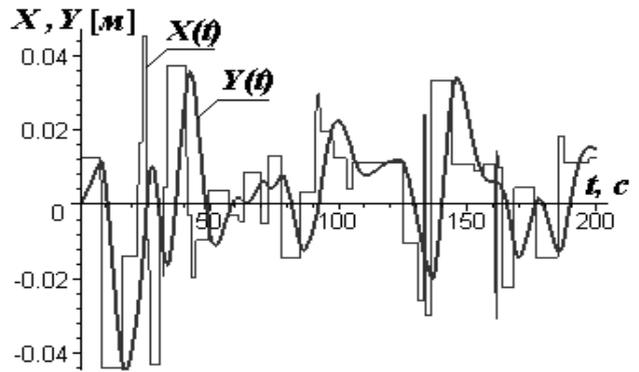


Рис. 2. Реакция системы при номинальных параметрах.

На рис. 3 изображены графики рельефа поверхности дорожного покрытия $X(t)$, реакции подвески при номинальных параметрах $Y(t)$ и при уменьшении c $Yc(t)$.

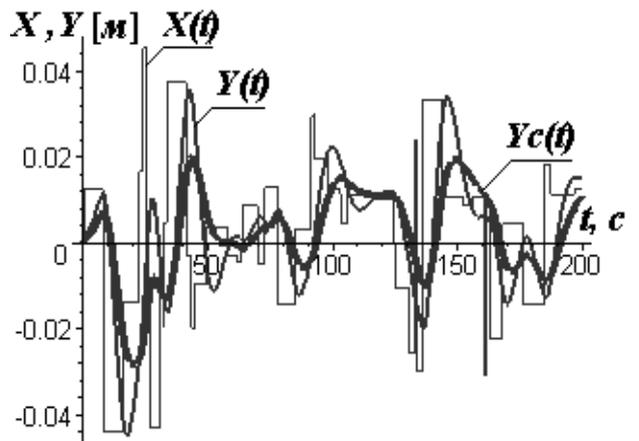


Рис. 3. Реакция системы при уменьшении c .

На рис. 4 изображены графики рельефа поверхности дорожного покрытия $X(t)$, реакции подвески при номинальных параметрах $Y(t)$ и при уменьшении m $Ym(t)$.

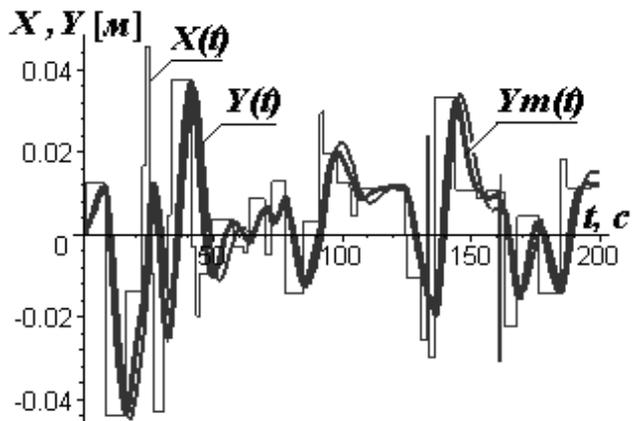


Рис. 4. Реакция системы при уменьшении m .

На рис. 5 изображены графики рельефа поверхности дорожного покрытия $X(t)$, реакции подвески при номинальных параметрах $Y(t)$ и при увеличении λ $Y\lambda(t)$.

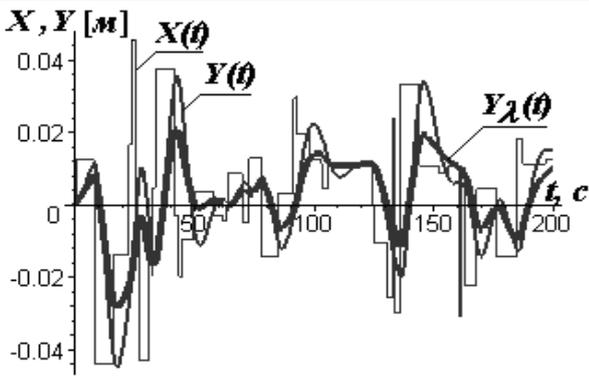


Рис. 5. Реакция системы при увеличении λ .

Оценка влияния параметров. При анализе влияния параметров на свойства подвески, находящейся под воздействием случайных возмущений, связанных с неровностями покрытия, уместен статистический подход сравнения статистических характеристик входного сигнала, обусловленного случайными изменениями рельефа покрытия, с выходным сигналом, характеризующим изменение положения центра тяжести приведенной массы. В зависимости от цели анализа такими характеристиками могут быть начальные и центральные моменты k -го порядка. Наиболее приемлемыми для анализа качества работы подвески является дисперсия или стандартное отклонение в качестве меры оценки степени влияния на качество работы подвески значений ее параметров.

Сравнивая, например, дисперсии входного воздействия $D(X)$ и реакции подвески $D(Y)$, мож-

но судить о качестве работы подвески. Введем коэффициент демпфирования $K = D(X)/D(Y)$, который отражает степень демпфирования. Его величина будет расти по мере снижения $D(Y)$. Для вычисления дисперсии применен программный пакет Maple.

$Dx := \text{describe}[\text{variance}](\text{seq}(X[i], i=1..z))$:

для вычисления дисперсии входного воздействия.

$Dy := \text{describe}[\text{variance}](\text{seq}(Y[i], i=1..z))$:

для вычисления дисперсии реакции подвески.

В результате вычислений получены следующие значения коэффициентов демпфирования:

$K_n = 1,63$ для номинальных параметров подвески;
 $K_c = 3,27$ при уменьшении жесткости c в два раза;

$K_m = 1,74$ при уменьшении приведенной массы подвески m в два раза;

$K_\lambda = 3,38$ при увеличении сопротивления амортизаторов подвески λ в два раза.

Пример 3. Рассмотрим пример моделирования технологической системы плоскошлифовального станка модели 3Г71М, оснащенного демпфирующим устройством (рис. 6) [4] с такими параметрами:

масса системы – $M_a = 3450$ кг;

масса детали (заготовки) – $M_g = 30$ кг;

коэффициент загрузки – $K_z = 0,5$;

приведенная масса – $m_0 = M_a + M_g \times K_z$ кг;

жесткость системы – $c_0 = 500$ Н/м;

сопротивление потерь – $L_0 = 1000$ Нс/м;

максимальное значение шумовой составляющей – $D_x = 0,035$ м.

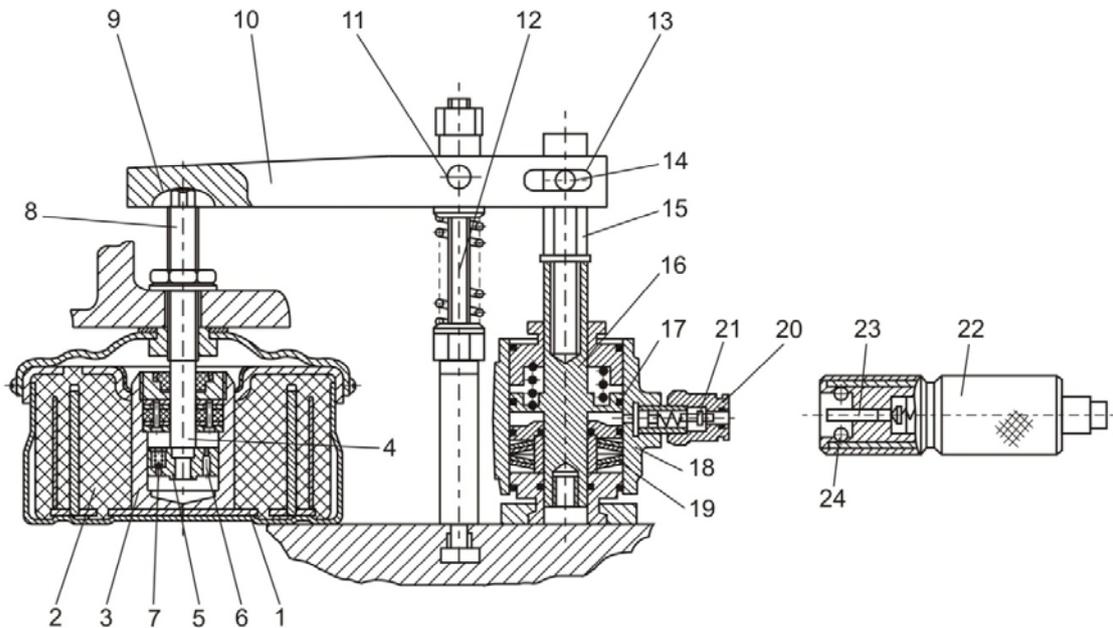


Рис. 6. Общий вид демпфирующего устройства плоскошлифовального станка:

- 1 – основание; 2 – резиновый элемент; 3 – цилиндр; 4 – шток; 5 – поршень; 6 – калиброванное отверстие;
- 7 – клапан сжатия; 8 – регулировочный винта; 9 – сферическая поверхность лунки; 10 – прихват;
- 11 – ось; 12 – стойка; 13 – продольный паз; 14 – ось; 15 – опора; 16 – опорный шток; 17 – поршень;
- 18 – гидроцилиндр; 19 – пружинный аккумулятор; 20 – малая полумуфта; 21 – клапан;
- 22 – большая полумуфта; 23 – клапанный штырь; 24 – шарики.

На рис. 7 изображены графики помехи $X(t)$, действующей на систему, и результат демпфирования $Y(t)$ при номинальных параметрах. На рис. 7б наложен график результата демпфирования $Y_c(t)$ при $c = c/2$.

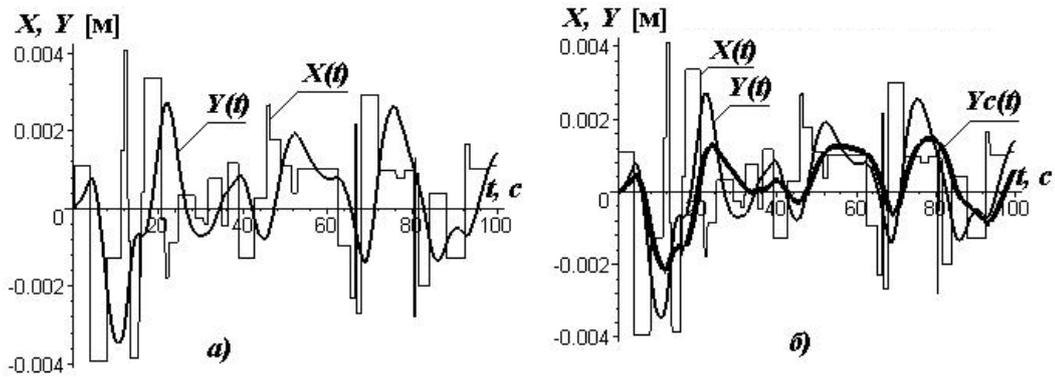


Рис. 7. Графики реакции системы при: а) номинальных параметрах системы; б) значении $c = c/2$.

Для оценки влияния изменения параметров технологической системы на рис. 8 приведены графики реакции системы при изменениях остальных параметров $m = m/2$ и $\lambda = 2\lambda$.

В результате вычислений получены следующие значения коэффициентов демпфирования:

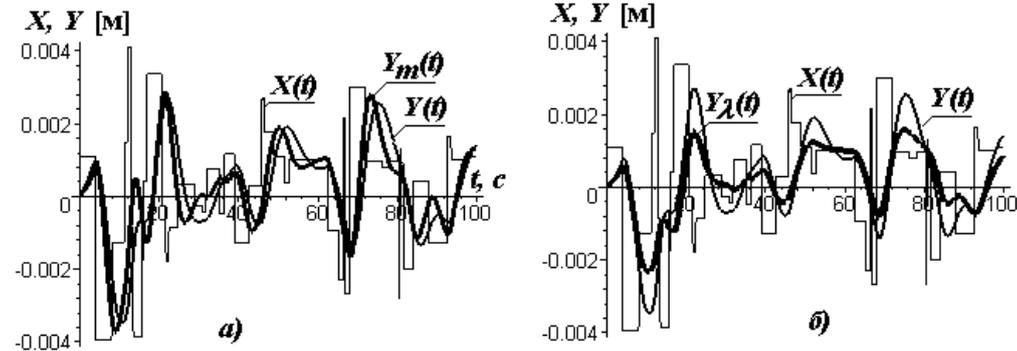


Рис. 8. Графики реакции системы при: а) значении $m = m/2$; б) значении $\lambda = 2\lambda$.

$K_n = 1,78$ для номинальных параметров подвески; $K_c = 3,75$ при уменьшении жесткости c в два раза; $K_m = 1,86$ при уменьшении приведенной массы подвески m в два раза; $K_\lambda = 3,79$ при увеличении сопротивления амортизаторов подвески λ в два раза.

Оценка погрешности дискретного преобразования. Для оценки величины погрешности дискретного преобразования передаточная функция системы приведена к стандартной форме $W_2(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}$, где $a_0 = 1$; $a_1 = \lambda/c$; $a_2 = m/c$.

На рис. 9а изображены графики переходных характеристик, где $Y(t)$ – переходная характери-

стика, вычисленная в результате дискретного представления, а $y(p)$ – переходная характеристика, полученная в результате обратного преобразования Лапласа. На рис. 9б изображены графики погрешности $Eps(t) = Y(t) - y(t)$, где кривая 1 получена при шаге дискретизации в два раза больше шага дискретизации, соответствующего кривой 2.

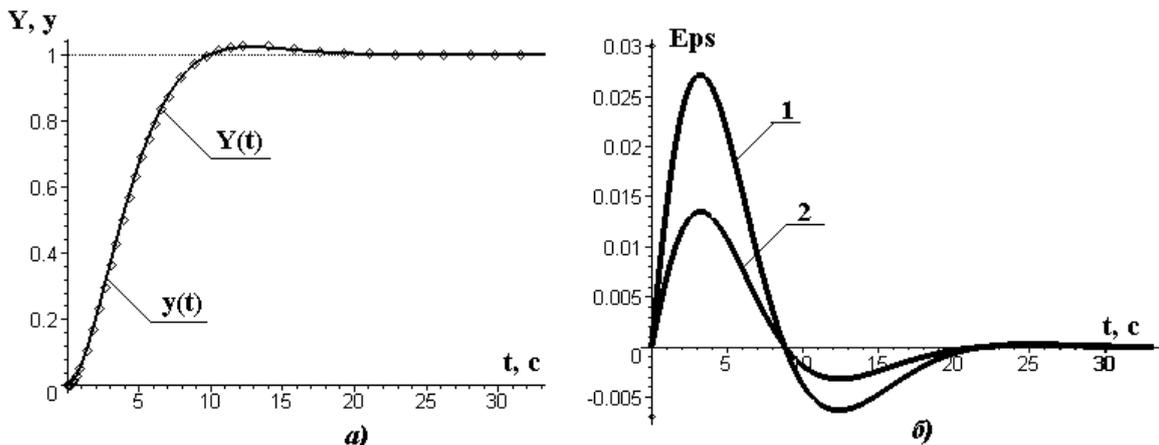


Рис. 9. Графики переходных характеристик.

Выводы. Рассмотренный метод позволяет вычислить реакцию системы на произвольный входной сигнал без процедур его преобразования.

Погрешность полученного численного решения зависит от величины шага квантования.

Введенный коэффициент демпфирования позволяет оценить качество работы подвески и эффект от ввода коррекции ее параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – СПб. : Профессия, 2003. – 744 с.

2. Вибрации в технике : справочник : в 6-ти т. / под ред. К. В. Фролова. – М. : Машиностроение, 1981. – Т. 6. Защита от вибраций и ударов. – 456 с.

3. Долгин В. П. Автоматическое управление техническими и технологическими объектами и системами. Численные методы анализа и синтеза систем и объектов / В. П. Долгин. – Севастополь : СевНТУ, 2003. – 320 с.

4. Пат. № 51621 Україна, МПК В 23 Q 1/00. Віброізолюючий пристрій металорізального верстата плавучої ремонтної майстерні / О. О. Харченко, К. О. Владецька, С. М. Братан, Д. О. Владецький ; заявник та патентовласник Севастопольський національний технічний університет. – № 201000394 ; заявл. 18.01.2010 ; опубл. 26.07.2010. Бюл. № 14.