УДК 621.317

О.О. Добржанський, к.т.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ОЦІНКА ВПЛИВУ ДИНАМІКИ РУХУ ОСНОВИ НА ВИХІДНИЙ СИГНАЛ ІНТЕГРУЮЧОГО ГІРОГРАВІМЕТРА

Представлено результати досліджень щодо аналітичного представлення взаємозв'язку між вхідними відносно інтегруючого гірогравіметра, величинами та величинами складових вихідного сигналу чутливого елемента гірогравіметра. Знайдено аналітичні та кількісні оцінки складових вихідного сигналу інтегруючого гірогравіметра, оцінки похибок результату вимірювань цим приладом. Основні результати дослідження отримані за допомогою методу послідовних наближень при розв'язку нелінійних диференційних рівнянь та методу знаходження кількісних оцінок комплексних передатних коефіцієнтів приладу для різних частотних складових вхідних сигналів.

Ключові слова: *гірогравіметр, вихідний сигнал, похибка, чутливий елемент, інтегруючий гірогравіметр.*

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку систем моніторингу геофізичних параметрів актуальною проблемою є забезпечення точності літакових вимірювань розподілу гравітаційного поля. Фільтруючі властивості гіроскопічних інтеграторів лінійних прискорень визначають перспективність застосування цих приладів на літаках у якості гравіметрів – інтегруючих гірогравіметрів (ІГ). Проблемою вимірювань за допомогою ІГ є наявність у вихідному сигналі останнього перешкод, зумовлених дією вібрацій: динамічних складових векторів лінійного прискорення, кутової швидкості та кутового прискорення основи, де встановлено ІГ на літаку. Останні є вхідними величинами відносно перетворювальної (вимірювальної) системи ІГ. Розрахувавши вплив низькочастотних вібрацій на вихідний сигнал ІГ, можливо усунути відповідні складові перешкод із вихідного сигналу ІГ, якщо попередньо визначити параметри низькочастотних вібрацій за допомогою навігаційної системи безпосередньо під час польоту. Високочастотні складові перешкод не можуть бути вилучені із вихідного сигналу ІГ методами, які застосовані для низькочастотних складових. Проте деякі параметри високочастотних складових перешкод можуть також бути визначені під час процесу вимірювання. Можливо також аналітично підтвердити ступінь впливу на вихідний сигнал ІГ високочастотних завад, і, таким чином, визначати частини отриманої вимірювальної інформації, що надмірно спотворені перешкодами та не можуть бути прийняті як результат вимірювання.

Отже, важливою теоретичною проблемою є визначення функціональних взаємозв'язків між інструментальними параметрами ІГ, параметрами збурюючих вібрацій та вихідним сигналом ІГ. Вирішення її забезпечить можливість підвищення точності літакових вимірювань гравітаційного прискорення шляхом підбору інструментальних параметрів чутливого елементу, введення поправок у результати вимірювань та вилучення частини вимірювальної інформації за ознакою пошкодженості завадами, які неможливо компенсувати.

Аналіз останніх досліджень. Дослідження щодо розширення сфери застосування гіроскопічного інтегратора лінійних прискорень (ГІЛП) та удосконалення його приладових характеристик представниками наукових шкіл гіроскопістів Росії вважаються неперспективними [1]. Проте західні науковці, навпаки, вбачають дослідження щодо покращення характеристик зазначеного приладу стратегічним напрямом. Група вчених з Університету Мінісоти під керівництвом професора Б.Мортона [2] виконує дослідження використання стандартних законів управління у каналах стабілізації між рамками підвісу гіроскопа для зменшення похибок у вихідному сигналі ГІЛП. Ці дослідження не враховують вібрацій при встановленні ГІЛП на борту літака і розглядають ГІЛП лише як акселерометр навігаційної системи.

Більш ґрунтовні дослідження виконуються Центром космічних польотів Маршала (Алабама) та Масачусецьким технологічним університетом. Досліджується застосування гіроскопічного інтегратора у навігаційних системах міжконтинентальних балістичних ракет сімейства Trident професором Р.Е. Хопкінсом [3], представником наукової дослідницької лабораторії доктора Ч.Драпера (Кембридж) – послідовники інженерних ідей конструктора ракет V-2 нацисько ї Німеччини доктора Ф.Мюллера, який був вивезений до США та працював там до самого початку XXI століття. Дослідження зосереджені на підборі конструктивних матеріалів та удосконаленню підсистем реєстрації вихідного сигналу, для застосування ГІЛП як навігаційного акселерометра. Отже вивчаються похибки вимірювання траєкторії руху та прискорень, що викликані інструментальними факторами, проте, не розглядається використання приладу за гравіметр.

Західна наука також активно розвиває напрям використання принципів ГІЛП у мікромашинних гіроскопічних акселерометрах. Дослідження ведуться у Технологічному університеті Джорджиї (Атланта) спільно з Лабораторією сенсорних систем військового призначення (Західний Ньютон) під керівництвом науковців Т.Кайзера та М.Алена [4]. Проте мікромашинні пристрої переважають лише у мінімізованих масі та габаритах. Щодо точності вимірювання, то дослідники визначають ГІЛП як найбільш точний прилад на цей час.

Вітчизняні дослідники традиційно розглядають математичні моделі гіроскопічних приладів на основі наближених прецесійних рівнянь. Але, на думку представників наукової школи гіроскопістів України 80-х років професора А.Ю. Ішлінського [5] та А.А. Одинцова [6] простежується слабкість прецесійної теорії для точних досліджень гіроскопів, і є необхідність застосування у повному вигляді теореми про зміну кінетичного моменту кількості руху системи матеріальних точок [7]. Представниками наукової школи гіроскопістів сучасної України, до якої входять доктори наук Б.Б. Самотокін, О.М. Безвесільна, М.Д. Гераїмчук, О.В. Збруцький, В.В. Карачун (Національний технічний університет України «КПІ»), наслідується ця ідея при дослідженні гіроскопічних приладів в умовах застосування їх на рухомій основі [8], а також вказується на перспективність ГІЛП за гравіметр. Ґрунтовні дослідження ГІЛП не виконувались. Не розглянуто також вплив вібрацій рухомої основи на похибку вимірювання здійсненого за допомогою гравіметра, побудованого на основі ГІЛП.

Взаємодія динамічних (змінних) складових у системі ІГ спричиняє наявність у вихідному сигналі ІГ складових-перешкод із комбінаційними частотами. Для реалізації ідентифікації перешкод у вихідному сигналі ІГ необхідно оцінити динамічний режим роботи ІГ. Застосувати тільки лише метод знаходження комплексного передатного коефіцієнта ІГ для дослідження динамічного режиму роботи ІГ не дає можливості прямо визначити вплив нелінійних складових моментів (наприклад $W_\eta(t)\cdot[\sin\alpha(t)]\cdot\beta(t)$). Тому доцільно для розв'язку системи нелінійних диференційних рівнянь динаміки руху елементів ІГ застосувати метод послідовних наближень у комбінації із методом знаходження модулів комплексних передавальних коефіцієнтів ІГ [9, 10]. За основу вхідні сигнали ІГ можливо прийняти узагальнене представлення динаміки механічної системи просторовими векторами кутових та лінійних прискорень.

При визначенні результатів оцінки похибок ІГ важливим є конкретне значення сумарної похибки, яке є актуальним на цей час. Дослідження, проведені професором В.Грамертом [11] та Д. Харисоном [12], показали, що авіаційні гравіметричні роботи з визначення вертикальної складової вектора гравітаційного прискорення будуть мати комерційну доцільність за умови похибки даних до 2мГл.

Постановка завдання. Визначення функціонального зв'язку між інструментальними параметрами ІГ, параметрами збурюючих впливів та вихідним сигналом ІГ шляхом застосування методу послідовних наближень у комбінації із методом знаходження модулів комплексних передавальних коефіцієнтів при розв'язку системи диференційних рівнянь динаміки руху елементів ІГ за умов дії на вході моделі узагальнених просторових векторів кутових та лінійних прискорень.

Викладення основного матеріалу. Можливо показати, що математична модель динаміки кутів повороту рамок підвісу ІГ α та β може бути представлена аналітично так:

$$\alpha=\frac{p\cdot(B\cdot p+f_1)\cdot M_2-(H\cdot p+K_k)\cdot\left(-m_{г+к}\cdot l\cdot(W_\xi-g_\xi)+M_1\right)}{p\cdot\left(A\cdot B\cdot p^3+(A\cdot f_1+B\cdot f_2)\cdot p^2+(f_1\cdot f_2+H^2)\cdot p+H\cdot K_k\right)}; \qquad (1)$$

$$\beta=\frac{p\cdot(A\cdot p+f_2)\cdot\left(-m_{г+к}\cdot l\cdot(W_\xi-g_\xi)+M_1\right)-(-H\cdot p)\cdot M_2}{p\cdot\left(A\cdot B\cdot p^3+(A\cdot f_1+B\cdot f_2)\cdot p^2+(f_1\cdot f_2+H^2)\cdot p+H\cdot K_k\right)}; \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -l\cdot(m_{г+к})\cdot\left((W_\eta-g_\eta)\cdot\sin\alpha-(W_\zeta-g_\zeta)\cdot\cos\alpha\right)\cdot\beta+\\ &-B^I\cdot(\dot\omega_\eta\cdot\cos\alpha+\dot\omega_\zeta\cdot\sin\alpha)+\\ &+H\cdot\left(\omega_\xi+(\omega_\eta\cdot\sin\alpha-\omega_\zeta\cdot\cos\alpha)\cdot\beta\right)-M_{T1}\cdot sign(\dot\beta); \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -A\cdot\dot\omega_\xi-H\cdot(\omega_\eta\cdot\cos\alpha+\omega_\varsigma\cdot\sin\alpha)+\\ &+N\cdot(-\dot\omega_\eta\cdot\sin\alpha+\dot\omega_\zeta\cdot\cos\alpha)\cdot\beta-M_{T2}\cdot sign(\dot\alpha), \end{aligned} \qquad (4)$$

де $p \equiv d/dt$ – оператор диференціювання; A, B, B^I, N – за суттю є моментами інерції інструментальних елементів приладу; l – зміщення центру мас гіроскопа; $H = \dot{\gamma} \cdot I_{z.г}$ – кінетичний момент гіроскопа; $I_{z.г}$ – момент інерції ротора гіроскопу ІГ; $\dot{\gamma}$ – кутова швидкість ротора гіроскопа; M_{T1}, M_{T2} – моменти сил сухого тертя у осях підвісу ІГ; ζ, η – горизонтальні осі горизонтально стабілізованої платформи (ГСП); ξ – вертикальна вісь ГСП; f_1, f_2 – коефіцієнти в'язкого тертя у підвісах ІГ; $m_{г+к}$ – маса безпосередньо гіроскопу та його корпусу; g_ξ – вертикальна складова гравітаційного прискорення.

1) *Нульове наближення:* моменти-перешкоди відсутні $M_1 = 0$, а кут β достатньо малий, що можливо знехтувати його значенням:

$$\alpha_0 = -\left(m \cdot l \cdot g_\xi \cdot t\right)/H \,, \quad \beta_0 = 0 \,. \tag{5}$$

2) *Перше наближення:* на вході ІГ діють вхідні величини: $\bar{g}_\xi$, W_ξ, W_η, W_ζ, ω_ξ, ω_η, ω_ζ, $\dot{\omega}_\xi$, $\dot{\omega}_\eta$, $\dot{\omega}_\zeta$. У (1), (2) підставляємо (5) нульового наближення:

$$\beta_I = W_1^\beta \cdot M_{1.I} + W_2^\beta \cdot M_{2.I} \,, \quad \alpha_I = W_1^\alpha \cdot M_{1.I} + W_2^\alpha \cdot M_{2.I} \,; \tag{6}$$

$$M_{1.I} = B^I \cdot \left(\dot{\omega}_\eta \cdot \cos\alpha + \dot{\omega}_\zeta \cdot \sin\alpha\right) + H \cdot \omega_\xi + m \cdot l \cdot W_\xi - m \cdot l \cdot g_\xi \,; \tag{7}$$

$$M_{2.I} = A \cdot \dot{\omega}_\xi + H \cdot \left(\omega_\eta \cdot \cos\alpha - \omega_\zeta \cdot \sin\alpha\right). \tag{8}$$

Зрозуміло, що β_I, α_I не характеризують перехідний процес, а характеризують реакцію ІГ на вхідні величини після закінчення перехідного процесу.

$$W_1^\beta = \left|W_1^\beta(p)\right|_{p=j\cdot\omega} = \left[\left(A^2 \cdot \omega^2 + f_2^2\right)/\Delta(p)\right]^{1/2}; \tag{9}$$

$$W_2^\beta = \left|W_2^\beta(p)\right|_{p=j\cdot\omega} = \left[\left(H^2\right)/\Delta(p)\right]^{1/2}; \tag{10}$$

$$W_1^\alpha = \left|W_1^\alpha(p)\right|_{p=j\cdot\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \left[\left(H^2 \cdot \omega^2 + K_k^2\right)/\Delta(p)\right]^{1/2}; \tag{11}$$

$$W_2^\alpha = \left|W_2^\alpha(p)\right|_{p=j\cdot\omega} = \left[\left(B^2 \cdot \omega^2 + f_1^2\right)/\Delta(p)\right]^{1/2}; \tag{12}$$

$$\Delta(p) = \left(H \cdot K_k - \left(A \cdot f_1 + B \cdot f_2\right) \cdot \omega^2\right)^2 + \left(H^2 + f_1 f_2 - A \cdot B \cdot \omega^2\right)^2 \cdot \omega^2 \,. \tag{13}$$

Необхідно визначити вхідні для ІГ величини:

$$g_\xi = -\bar{g}_\xi \,, \tag{14}$$

$$W_\xi = \overline{W}_\xi + \tilde{W}_\xi \cdot \sin\left(\omega_W \cdot t + \phi\right), \tag{15}$$

$$W_\eta = \overline{W}_\eta + \tilde{W}_\eta \cdot \sin\left(\omega_W \cdot t + \phi\right), \tag{16}$$

$$W_\zeta = \overline{W}_\zeta + \tilde{W}_\zeta \cdot \sin\left(\omega_W \cdot t + \phi\right), \tag{17}$$

де $\overline{W}_\xi$, $\overline{W}_\eta$, $\overline{W}_\zeta$ – статичні (постійні) складові; $\tilde{W}_\xi$, $\tilde{W}_\eta$, $\tilde{W}_\zeta$ – амплітуди динамічних (змінних) складових лінійного прискорення основи; ω_W – частота динамічних складових вектора лінійного прискорення основи; ϕ – величина, що характеризує в кожному випадку деяку фазу (для спрощення всі фази позначені одним знаком, хоча мають різні кількісні значення).

$$\omega_{**} = \bar{\omega}_{**} + \tilde{\omega}_{**} \cdot \sin\left(\omega_\omega \cdot t + \phi\right); \tag{18}$$

$$\dot{\omega}_{**} = \omega_{**} \cdot \tilde{\omega}_{**} \cdot \sin\left(\omega_\omega \cdot t + \phi\right); \quad ** = \xi, \eta, \zeta \,. \tag{19}$$

Тоді можна записати β_I так:

$$\begin{aligned}
\beta_I(t) = {} & 0{,}5 \cdot B^I \cdot \omega_\omega \cdot \tilde{\omega}_\eta \cdot \sin\left(\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) \cdot t + \phi\right) \cdot W_1^\beta\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) + \\
& + 0{,}5 \cdot B^I \cdot \omega_\omega \cdot \tilde{\omega}_\zeta \cdot \sin\left(\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) \cdot t + \phi\right) \cdot W_1^\beta\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) + \\
& + 0{,}5 \cdot H \cdot \tilde{\omega}_\eta \cdot \sin\left(\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) \cdot t + \phi\right) \cdot W_2^\beta\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) + \\
& + 0{,}5 \cdot H \cdot \tilde{\omega}_\zeta \cdot \sin\left(\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) \cdot t + \phi\right) \cdot W_2^\beta\left(\omega_\omega + \dot{\alpha}\right) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+0{,}5\cdot B^{I}\cdot\omega_{\omega}\cdot\varpi_{\eta}\cdot\sin((\omega_{\omega}-\dot\alpha)\cdot t+\phi)\cdot W_1^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)+\\
&+0{,}5\cdot B^{I}\cdot\omega_{\omega}\cdot\varpi_{\zeta}\cdot\sin((\omega_{\omega}-\dot\alpha)\cdot t+\phi)\cdot W_1^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)+\\
&+0{,}5\cdot H\cdot\varpi_{\eta}\cdot\sin((\omega_{\omega}-\dot\alpha)\cdot t+\phi)\cdot W_2^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)+\\
&+0{,}5\cdot H\cdot\varpi_{\zeta}\cdot\sin((\omega_{\omega}-\dot\alpha)\cdot t+\phi)\cdot W_2^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)+\\
&+H\cdot\varpi_{\xi}\cdot\sin((\omega_{\omega})\cdot t+\phi)\cdot W_1^{\beta}(\omega_{\omega})+\\
&+A\cdot\omega_{\omega}\cdot\varpi_{\xi}\cdot\sin((\omega_{\omega})\cdot t+\phi)\cdot W_2^{\beta}(\omega_{\omega})+\\
&+A\cdot\overline{\omega}_{\xi}\cdot W_1^{\beta}(0)+m\cdot l\cdot\overline{W}_{\xi}\cdot W_1^{\beta}(0)+m\cdot l\cdot\overline{g}_{\xi}\cdot W_1^{\beta}(0)+\\
&+m\cdot l\cdot\tilde{W}_{\xi}\cdot\sin((\omega_{W})\cdot t+\phi)\cdot W_1^{\beta}(\omega_{W})+\\
&+H\cdot\sqrt{\overline{\omega}_{\eta}^2+\overline{\omega}_{\zeta}^2}\cdot\sin((\dot\alpha)\cdot t+\phi)\cdot W_2^{\beta}(\dot\alpha).
\end{aligned}
\qquad(20)
$$

3) *Друге наближення*: його особливість у тому, що у вираз (6) підставляємо перше наближення β_I, а як величини $[\sin\alpha(t)]$ та $[\cos\alpha(t)]$ застосуємо відповідно $[\sin\alpha_0(t)]$ та $[\cos\alpha_0(t)]$.

$$\alpha_{II}=W_1^{\alpha}\cdot M_{1.II}+W_2^{\alpha}\cdot M_{2.II}\ ;\qquad(21)$$

$$
\begin{aligned}
M_{1.II}&=B^{I}\cdot(\dot\omega_{\eta}\cdot\cos\alpha_0+\dot\omega_{\zeta}\cdot\sin\alpha_0)-H\cdot\omega_{\xi}-\\
&-H\cdot(\omega_{\eta}\cdot\sin\alpha_0-\omega_{\zeta}\cdot\cos\alpha_0)\cdot\beta_I+\\
&+m\cdot l\cdot W_{\xi}-m\cdot l\cdot g_{\xi}+m\cdot l\cdot(W_{\eta}\cdot\sin\alpha_0+W_{\zeta}\cdot\cos\alpha_0)\cdot\beta_I\ ;
\end{aligned}
\qquad(22)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{2.II}&=-A\cdot\dot\omega_{\xi}-H\cdot(\omega_{\eta}\cdot\cos\alpha_0-\omega_{\zeta}\cdot\sin\alpha_0)+\\
&+N\cdot(-\dot\omega_{\eta}\cdot\sin\alpha_0+\dot\omega_{\zeta}\cdot\cos\alpha_0)\cdot\beta_I\ .
\end{aligned}
\qquad(23)
$$

Результати обчислення складових $\alpha_{II}(t)$ будуть наведені нижче та лише для найбільш суттєвих складових. Розподіл фаз важко врахувати. Тому приймаємо, що вони розподілені у конкретному випадку випадково. При оцінці амплітуд складових сигналу α_{II} будемо підсумовувати квадрати амплітуд для кожної з частотних складових однакової частоти. Наприклад складова з частотою $\dot\alpha$, спричинена лінійними прискореннями, матиме амплітудне значення:

$$[\tilde{W}_{\xi}]\cdot[\tilde{W}_{\eta}^2+\tilde{W}_{\zeta}^2]^{1/2}\cdot[(1/4)\cdot(m\cdot l)^2\cdot W_1^{\beta}(\omega_W)\cdot W_1^{\alpha}(\dot\alpha)]\cdot\sqrt{2}\ .\qquad(24)$$

Також можливо прийняти спрощення: зважаючи на малість амплітуд кутових швидкостей та кутових прискорень ГСП, можливо знехтувати складовими-перешкодами, які залежать від квадратів або добутків амплітуд кутових швидкостей ГСП. Наприклад складова з частотою $2\cdot\omega_{\omega}+\dot\alpha$, спричинена кутовими прискореннями, матиме амплітудне значення:

$$
\begin{aligned}
&[\varpi_{\xi}]\cdot[\varpi_{\eta}^2+\varpi_{\zeta}^2]^{1/2}\cdot[1/4]\cdot[W_1^{\beta}(\omega_{\omega})^2\cdot H^2+W_2^{\beta}(\omega_{\omega})^2\cdot A^2\cdot\omega_{\omega}^2]^{1/2}\times\\
&\times[W_1^{\alpha}(2\cdot\omega_{\omega}+\dot\alpha)^2\cdot H^2+W_2^{\alpha}(2\cdot\omega_{\omega}+\dot\alpha)^2\cdot N^2\cdot\omega_{\omega}^2]^{1/2}.
\end{aligned}
\qquad(25)
$$

У результаті нелінійної взаємодії частотних складових у випадку збігу фаз можуть утворитись постійні складові вихідного сигналу $\alpha_{II}(t)$:

$$
\begin{aligned}
&[H\cdot\overline{\omega}_{\xi}+m\cdot l\cdot\overline{W}_{\xi}]\cdot[W_1^{\alpha}(0)]+\\
&+[\overline{W}_{\eta}^2+\overline{W}_{\zeta}^2]^{\frac12}\cdot[\overline{\omega}_{\eta}^2+\overline{\omega}_{\zeta}^2]^{\frac12}\cdot[(1/2)\cdot m\cdot l\cdot H\cdot W_2^{\beta}(\dot\alpha)\cdot W_1^{\alpha}(0)]+\\
&+[\overline{\omega}_{\eta}^2+\overline{\omega}_{\zeta}^2]^{1/2}\cdot[(1/2)\cdot H\cdot W_2^{\beta}(\dot\alpha)\cdot W_1^{\alpha}(0)]+\\
&+[\varpi_{\eta}^2+\varpi_{\zeta}^2]^{1/2}\cdot[1/8]\cdot\Big[W_1^{\beta}(\omega_{\omega}+\dot\alpha)^2\cdot B^{I\,2}\cdot\omega_{\omega}^2+\\
&+W_2^{\beta}(\omega_{\omega}+\dot\alpha)^2\cdot H^2\Big]^{1/2}\cdot\Big[W_1^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)^2\cdot B^{I\,2}\cdot\omega_{\omega}^2+\\
&+W_2^{\beta}(\omega_{\omega}-\dot\alpha)^2\cdot H^2\Big]^{1/2}\cdot[H^2\cdot W_1^{\alpha}(0)^2+N^2\cdot\omega_{\omega}^2\cdot W_2^{\alpha}(0)^2]^{1/2}.
\end{aligned}
\qquad(26)
$$

Амплітуда a_i кожної складової це додаткова складова сумарного сигналу ІГ:

$$\Delta\alpha_\Sigma = \sum_{i=n}^{n} a_i + \Delta\alpha\,;\ \Delta\alpha = m\cdot l\big/\bar{g}_\xi\,. \tag{27}$$

Це означає, що абсолютна похибка від кожної складової при визначенні $\Delta\alpha$:

$$\Delta[\Delta\alpha]_i = a_i\,. \tag{28}$$

А абсолютна похибка визначення $\bar{g}_{\xi.вим}$ від кожної складової:

$$\Delta[\bar{g}_\xi] = a_i \cdot \frac{H}{m\cdot l\cdot (t_к - t_п)}\,.$$

Оскільки фази кожної складової важко врахувати, то значення кожної складової у конкретний момент можливо вважати випадковим, тому сумарну похибку визначення $\bar{g}_\xi$ визначимо як корінь суми квадратів амплітуд окремих складових:

$$\Delta[\bar{g}_\xi]_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\cdot\frac{H}{m\cdot l\cdot(t_к - t_п)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta[\Delta\alpha]_i)^2}\cdot\frac{H}{m\cdot l\cdot(t_к - t_п)}\,. \tag{29}$$

Співвідношення (29) вірне тільки для високочастотних складових сигналу $\alpha(t)$, а для низькочастотних приймемо амплітудні значення (у випадку, якщо частота складової значно нижча або співмірна з частотою обертання зовнішньої рамки підвісу, кут обертання якої і є головним вихідним сигналом ІГ):

$$\Delta[\Delta\alpha]_j = \frac{d}{dt}\big(a_i\cdot\sin(\omega_j\cdot t + \phi_j)\big)\cdot(t_к - t_п) = a_j\cdot\omega_j\cdot(t_к - t_п)\,, \tag{30}$$

де a_j, ϕ_j, ω_j – амплітуда, фаза та частота *j*-ої низькочастотної складової.

Також, для кількісної оцінки систематичних методичних похибок ІГ у динамічному режимі роботи ІГ визначимо модулі передатних функцій ІГ W_1^α, W_2^α, W_1^β, W_2^β для типових, у нашому випадку, частот (9)–(12). Результати зведемо у таблицю 1.

Таблиця 1

Модулі передатних функцій ІГ для різних частот вхідних сигналів

Передатні функції	Типові частоти складових вихідного сигналу ІГ, р/с						
	0, р/с	$\dot{\alpha} = 2$	$2\cdot\dot{\alpha} = 4$	$\omega_\omega = 13\cdot10^{-4}$	$2\cdot\omega_\omega = 26\cdot10^{-4}$	$\omega_W = 1640$	$2\cdot\omega_W = 3280$
W_1^β	1	1	1	1	1	$6{,}4\cdot10^{-3}$	$1{,}6\cdot10^{-3}$
W_2^β	20	19	16	20	20	$6{,}3\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-5}$
W_1^α	$(100\times\times(t_к - t_п))$	50	25	$(100\times\times(t_к - t_п))$	$(100\times\times(t_к - t_п))$	$6{,}3\cdot10^{-4}$	$8\cdot10^{-5}$
W_2^α	1	1	1	1	1	$5{,}8\cdot10^{-3}$	$1{,}5\cdot10^{-3}$

При цьому прийнято типові інструментальні параметри ІГ:

$B^I = 5{,}3\cdot10^{-5}$ кг·м², $K_k = 5\cdot10^{-2}$ кг·м²/с²;

$f_1 = f_2 = 5\cdot10^{-4}$ кг·м²/с, $A = 0{,}64\cdot10^{-4}$ кг·м²;

$B = 0{,}55\cdot10^{-4}$ кг·м², $N = 1{,}98\cdot10^{-5}$ кг·м².

Враховано також динамічні параметри ІГ $\bar{\dot{\alpha}} \cong 2$ р/с ($H = 1\cdot10^{-2}$ кг·м²/с, при $m\cdot l = 20\cdot10^{-4}$ кг·м), $K_k = 5\cdot10^{-2}$ кг·м²/с². Враховуємо, що зняття даних з ІГ відбувається за $(t_к - t_к) = 10$ с. Вхідні величини, відносно ІГ:

$\tilde{W}_\xi = \tilde{W}_\eta = \tilde{W}_\zeta = 10$ м/с²; $\overline{W}_\xi = 6{,}2\cdot10^{-2}$ м/с²; $\overline{W}_\eta = \overline{W}_\zeta = -1{,}6\cdot10^{-1}$ м/с²;

$\bar{\omega}_\xi = 6{,}8\cdot10^{-5}$ р/с; $\bar{\omega}_\eta = 4{,}8\cdot10^{-5}$ р/с; $\bar{\omega}_\zeta = 4{,}8\cdot10^{-5}$ р/с;

$$\varpi_{\xi} = 3{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ р/с}^2;\ \varpi_{\zeta} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ р/с}^2;\ \varpi_{\eta} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ р/с}^2.$$

Кількісні оцінки систематичних методичних похибок визначення $\bar{g}_{\xi}$ при динамічному режимі роботи ІГ, які спричинені кожною частотною складовою вихідного сигналу $\alpha(t)$ ІГ занесено до таблиці 2.

Висновки. На цей час важливою прикладною науковою задачею є розробка авіаційних гравіметричних систем, що забезпечують вимірювання вертикальної складової вектора гравітаційного прискорення з точністю до 2 мГл.

Результати сучасних досліджень свідчать про перспективність вибору гіроскопічного інтегратора лінійних прискорень (ГІЛП) як гравіметра авіаційної гравіметричної системи. Водночас більшість науковців зазначає, що інтегруючі властивості приладу уможливлюють створення унікальної приладової системи з послабленими складовими перешкод у вихідному сигналі чутливого елементу. Таким чином, слід очікувати значного послаблення вимог щодо фільтрації вихідного сигналу інтегруючого гравіметра (ІГ), побудованого на базі ГІЛП, і можливо вищої точності авіаційних вимірювань параметрів гравітаційного поля. З'ясувавши неповну вивченість питання похибок ГІЛП у випадку дії кутових та лінійних вібрацій основи та за умов використання його як ІГ, з метою розв'язку цих питань виконано аналітичне дослідження.

Використовуючи математичну модель ІГ, побудовану на основі повних рівнянь зміни кінетичного моменту кількості руху системи матеріальних точок, та із залученням методу послідовних наближень для розв'язання нелінійних диференційних рівнянь математичної моделі, за умови дії на вході факторів гармонічного характеру: кутових та лінійних вібрацій, було здійснено теоретичне виведення функціональних залежностей між статичними та динамічними інструментальними параметрами ІГ та амплітудами і частотами вібрацій основи, де встановлено прилад. На наступному етапі на основі отриманих функціональних залежностей та із врахуванням типових частот і амплітуд кутових та лінійних вібрацій літака та гіростабілізованої платформи (ГСП), на якій встановлюють ІГ, а також типових інструментальних параметрів приладу отримано кількісні оцінки складових перешкод вихідного сигналу ІГ та кількісні оцінки, спричинених цими складовими, похибок вимірювання вертикальної складової гравітаційного прискорення. З метою недопущення отримання занижених значень похибок вимірювання на етапі оцінки складових вихідного сигналу, враховані максимально можливі прирости амплітуд низькочастотних складових за час реєстрації вихідного сигналу приладу.

Встановлено, що сумарний вплив постійних складових векторів кутової швидкості та лінійних прискорень на результат вимірювання становить близько 6,5Г л. Переважаючі за значенням змінні складові похибки ІГ є похибки від вертикальної змінної складової вектора лінійного прискорення в місці установки ІГ на ГСП: 0,6 мГл, від сумісної дії вертикальної та від горизонтальних змінних складових вектора лінійного прискорення в місці установки ІГ на ГСП: 3,2 мГл, від вертикальної змінної складової вектора кутової швидкості ГСП: 0,2 мГл.

Таблиця 2

Похибки ІГ, спричинені постійними та змінними складовими збурень

Частота складової-перешкод, р/с	Символьна оцінка амплітуд складових-перешкод вихідного сигналу ІГ, рад.	Розрахунок спричинених перешкодами кількісних оцінок похибок ІГ, мГл
1	2	3
$\omega_W =$ $= 1640$р/с	$\left[\overline{W}_{\xi} \cdot m \cdot l \cdot W_1^{\alpha}(\omega_W)\right]$	$\left[1{,}2 \cdot 10^{-5}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 0{,}6$ мГл
$\dot{\alpha} =$ $= 2$р/с	$\left[\overline{W}_{\xi}\right] \cdot \sqrt{\overline{W}_{\eta}^{2} + \overline{W}_{\zeta}^{2}} \cdot \left[(1/4) \cdot (m \cdot l)^2 \cdot W_1^{\beta}(\omega_W) \cdot W_1^{\alpha}(\dot{\alpha})\right] \cdot \sqrt{2}$	$\left[6{,}4 \cdot 10^{-5}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 3{,}2$ мГл
$\omega_{\omega} =$ $= 13 \cdot 10^{-4}$ р/с	$\left[\overline{\omega}_{\xi}\right] \cdot \sqrt{W_1^{\alpha}(\omega_{\omega})^2 \cdot H^2 + W_2^{\alpha}(\omega_{\omega})^2 \cdot A^2 \cdot \omega_{\omega}^2}$	$\left[1{,}9 \cdot 10^{-2}\right] \cdot \dfrac{H \cdot \omega_{\omega} \cdot (t_к - t_к)}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 0{,}2$ мГл
$\omega_{\omega} =$ $= 13 \cdot 10^{-4}$ р/с	$\sqrt{\overline{W}_{\eta}^{2} + \overline{W}_{\zeta}^{2}} \cdot \sqrt{\overline{\omega}_{\eta}^{2} + \overline{\omega}_{\zeta}^{2}} \cdot \left[1/2 \cdot m \cdot l \cdot H\right] \cdot \left[W_2^{\beta}(\omega_{\omega} + \dot{\alpha})^2 +\right.$ $\left. + W_2^{\beta}(\omega_{\omega} - \dot{\alpha})^2\right]^{1/2} \cdot \left[W_1^{\alpha}(\omega_{\omega})\right]$	$\left[7{,}7 \cdot 10^{-6}\right] \cdot \dfrac{H \cdot \omega_{\omega} \cdot (t_к - t_к)}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 6{,}5 \cdot 10^{-5}$ мГл
$\dot{\alpha} =$ $= 2$р/с	$\sqrt{\overline{W}_{\eta}^{2} + \overline{W}_{\zeta}^{2}} \cdot \left[(1/2) \cdot m \cdot l \cdot W_1^{\beta}(0)\right] \times$ $\times \left[H \cdot \overline{\omega}_{\xi} + m \cdot l \cdot \overline{W}_{\xi} + m \cdot l \cdot \overline{g}_{\xi}\right] \cdot \left[W_1^{\alpha}(\dot{\alpha})\right]$	$\left[1{,}7 \cdot 10^{-4}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 8{,}5$ мГл

Закінчення табл. 2

1	2	3
$\dot{\alpha} =$ $= 2$р/с	$\sqrt{\overline{\omega}_\eta^2 + \overline{\omega}_\zeta^2} \cdot \left[H \cdot W_1^\beta(0)\right] \times$ $\times \left[H \cdot \overline{\omega}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{W}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{g}_\xi\right] \cdot \left[W_1^\alpha(\dot{\alpha})\right]$	$\left[3{,}4 \cdot 10^{-7}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ мГл
$\dot{\alpha} =$ $= 2$р/с	$\sqrt{\overline{\omega}_\eta^2 + \overline{\omega}_\zeta^2} \cdot [H] \cdot \left[W_2^\alpha(\dot{\alpha})\right]$	$\left[6{,}8 \cdot 10^{-7}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ мГл
$\omega_W =$ $= 1640$р/с	$\sqrt{\overline{W}_\eta^2 + \overline{W}_\zeta^2} \cdot \left[(1/2) \cdot H \cdot W_1^\beta(0)\right] \times$ $\times \left[H \cdot \overline{\omega}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{W}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{g}_\xi\right] \cdot \left[W_1^\alpha(\omega_W + \dot{\alpha})\right]$	$\left[1{,}8 \cdot 10^{-7}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 9 \cdot 10^{-3}$ мГл
$\omega_W =$ $= 1640$р/с	$\sqrt{\overline{W}_\eta^2 + \overline{W}_\zeta^2} \cdot \left[(1/2) \cdot H \cdot W_1^\beta(0)\right] \times$ $\times \left[H \cdot \overline{\omega}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{W}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{g}_\xi\right] \cdot \left[W_1^\alpha(\omega_W - \dot{\alpha})\right]$	$\left[1{,}8 \cdot 10^{-7}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 9 \cdot 10^{-3}$ мГл
$2 \cdot \dot{\alpha} =$ $= 4$р/с	$\sqrt{\overline{W}_\eta^2 + \overline{W}_\zeta^2} \cdot \sqrt{\overline{\omega}_\eta^2 + \overline{\omega}_\zeta^2} \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot l \cdot H \cdot W_2^\beta(\dot{\alpha}) \cdot W_1^\alpha(2 \cdot \dot{\alpha})\right]$	$\left[6 \cdot 10^{-8}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 3 \cdot 10^{-3}$ мГл
0	$\sqrt{\overline{W}_\eta^2 + \overline{W}_\zeta^2} \cdot \sqrt{\overline{\omega}_\eta^2 + \overline{\omega}_\zeta^2} \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot m \cdot l \cdot H \cdot W_2^\beta(\dot{\alpha}) \cdot W_1^\alpha(0)\right]$	$\left[2 \cdot 10^{-6}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 0{,}1$ мГл
0	$\sqrt{\overline{\omega}_\eta^2 + \overline{\omega}_\zeta^2} \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot H \cdot W_2^\beta(\dot{\alpha}) \cdot W_1^\alpha(0)\right]$	$\left[4{,}4 \cdot 10^{-7}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ мГл
0	$\left[H \cdot \overline{\omega}_\xi + m \cdot l \cdot \overline{W}_\xi\right] \cdot \left[W_1^\alpha(0)\right]$	$\left[1{,}2 \cdot 10^{-1}\right] \cdot \dfrac{H}{m \cdot l \cdot (t_к - t_к)} = 6500$ мГл

Знайдені аналітичні залежності забезпечують можливість розрахунку та введення у результат вимірювання поправок, що компенсують похибки від постійних складових вібрацій, якщо попередньо виміряти їх значення. Складові перешкод у вихідному сигналі, що змінюються з частотою 2–4 рад./с можливо компенсувати, якщо виконати реєстрацію сигналу за цілу кількість періодів їх зміни. Водночас, через неможливість врахування фаз вібрацій, що змінюються з частотою 1640 р/с, сумарна, викликана ними, похибка 0,6 мГл не може бути ефективно компенсована, але знайдені аналітичні залежності можливо використати для прогнозування імовірного впливу на результат вимірювання змінних складових вібрацій. Ці дані дозволяють вилучати надмірно спотворену вимірювальну інформацію. Потрібно зазначити також, позитивний факт, що сумарна некомпенсована похибка ІГ 0,6 мГл все ж не перевищує межу у 2 мГл, яка визначає комерційну доцільність виконання літакових вимірювань розподілу гравітаційного поля. Отже, результати виконаних досліджень уможливлюють підвищення точності результатів вимірювань, виконаних за допомогою ІГ, і, таким чином, теоретично обґрунтовують можливість використання ІГ як основи авіаційної гравіметричної системи.

Список використаної літератури:

1. *Пешехонов В.Г.* Ключевые задачи современной автономной навигации / *В.Г. Пешехонов* // Гироскокпия и навигация. – 1996. – № 1(12). – С. 48–55.
2. Error Analysis of a Pendulous Integrating Gyro Accelerometer / *D.Bainbridge, P.Bidigare, C. Gupta et oll.* // University of Minnesota, Minneapolis. – 1996.
3. *Hopkins R.E.* The Pendulous Integrating Gyroscope Accelerometer (PIGA) from the V-2 to Trident D5, the Strategic Instrument of Choice / *R.E. Hopkins, F.Mueller, W.Haeussermann* // Guidance, Navigation, and Control Conference & Exhibit, 6–9, Montreal, Canada. – 2001.
4. *Kaiser T.* A Micromachined Pendulous Oscillating Gyroscopic Accelerometer / *T.Kaiser, G.Allen* // Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head, South Carolina, 2000. – Pp. 85–88.
5. *Ишлинский А.Ю.* Лекции по теории гироскопов / *А.Ю. Ишлинский, В.И. Борзов, Н.П. Степаненко.* – М. : МГУ, 1983. – 248 с.
6. *Одинцов А.А.* Гироскопический интегратор линейных ускорений / *А.А. Одинцов.* – К. : НМК ВО, 1986. – 68 с.
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики / *В.Ф. Журавлев.* – М. : Физматлит, 2008. – 304 с.
8. *Безвесільна О.М.* Вимірювання гравітаційних прискорень / *О.М. Безвесільна.* – Житомир : ЖІТІ, 2002. – 264 с.
9. *Гуляев В.И.* Прикладные задачи теории нелинейных колебательных механических систем / *В.И. Гуляев.* – М. : Высшая шк., 1989. – 82 с.
10. *Трауб Д.Ф.* Итерационные методы решения уравнений / *Д.Ф. Трауб.* – М. : Мир, 1985. – 263 с.
11. *Gramert W.R.* Third generation aerogravity system / *W.R. Gramert* // International Association of Geodesy Symposium G4, IUGG XXI General Assembly. – Boulder, Colorado, 1995.
12. The LST Airborne Gravity System / *J.C. Harrison, J.D. MacQueen, A.C. Rauhut, J.Y. Cruz* // International Association of Geodesy Symposium G4, IUGG XXI General Assembly. – Boulder, Colorado, 1995.

ДОБРЖАНСЬКИЙ Олександр Олексійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизованого управління технологічними процесами та комп’ютерних технологій факультету інформаційно-комп’ютерних технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- прилади та системи автоматики;
- прилади та методи вимірювання механічних величин.

Тел.: (0412)22–91–95.

E-mail: aikt.doo@gmail.com

Стаття надійшла до редакції 21.10.2013