

ЕЛЕКТРИЧНА МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Запропонована електрична схема, що являє собою модель транспортної задачі, однієї з поширених задач лінійного програмування. Її основу складають дві групи джерел струму, одна з яких імітує виробників, друга – споживачів. Виходи джерел однієї групи за допомогою ланцюгів з резисторами приєднані до входів джерел струму другої групи. Виводи джерел, що не приєднуються до з'єднуючих ланцюгів, з'єднуються разом, формуючи з усіх елементів замкнене коло. Чисельні значення струму джерел встановлюють рівними значенням кількості продукту у відповідних виробників та споживачів. Чисельні значення електричного опору резисторів встановлюють рівними значенням транспортних витрат.

Доказаний збіг математичного визначення струму у запропонованій моделі з математичною моделлю, що визначає розподіл вантажу в транспортній задачі. Тобто показана можливість визначити план транспортування вантажу за шляхами на основі визначення струму у ланцюгах моделі. На прикладі розрахунку конкретної транспортної задачі, яка надана у вигляді електричної моделі, показана можливість використання алгоритмів її розв'язання, що мають широке застосування у лінійному програмуванні. Основна дія при розв'язанні задачі на моделі – розмикання ланцюгів, у яких, згідно з алгоритмом рішення, передбачається нульовий вантаж. При застосуванні моделі зникає необхідність підраховувати вантаж в ланцюгах на проміжних етапах, фіксувати залишки продукту у постачальників чи його недобір у споживачів. Необхідні, «правильні» значення струму у залишених ланцюгах виникають автоматично завдяки дії в електричних колах моделі закону Кірхгофа щодо струму.

Застосування моделей, що побудовані на інших принципах, ніж існуючі, дозволить знайти нові методи і підходи до процесу розв'язання. Як приклад, при розв'язанні конкретної транспортної задачі запропоновано два варіанта визначення елементів замкнених кіл, в яких можна проводити перерозподіл вантажу на етапі оптимізації базового плану.

Ключові слова: лінійне програмування; транспортна задача; модель; методи (алгоритми) рішення.

Аналіз досліджень і публікацій. Одним з поширених завдань лінійного програмування є так звана транспортна задача [1, 2, 3]. Її постановка за критерієм вартості полягає у наступному.

У m пунктах постачання (або, як варіант, пунктах виробництва, складах) A_1, A_2, \dots, A_m розміщено однорідний вантаж в обсязі a_1, a_2, \dots, a_m одиниць. Цей вантаж повинен бути доставлений в деяку систему з n пунктів споживання B_1, B_2, \dots, B_n з обсягом попиту b_1, b_2, \dots, b_n відповідно. Можливе транспортування з кожного пункту постачання в кожний пункт споживання. Відомі транспортні витрати C_{ij} , що пов'язані з доставкою одиниці вантажу з пунктів A_i в пункти B_j ($i = 1, m; j = 1, n$).

З вказаних даних формують таблицю перевезень (табл. 1).

Таблиця 1

Постачальник A_i	Споживач B_j						Об'єм вантажу
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}	a_2
...
A_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}	a_i
...
A_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mj}	...	C_{mn}	a_m
Потреба у вантажі	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Необхідно визначити такий план перевезень, що забезпечує виконання наступних умов:

- запаси кожного постачальника повинні бути повністю вивезені;
- попит всіх пунктів споживання повинен бути задовільнений за рахунок розподілу усього запасу вантажів;
- транспортні витрати на перевезення повинні бути мінімальними.

Якщо позначити через X_{ij} кількість вантажу, який перевозиться з пункту постачання A_i в пункт споживання B_j , то можна сформулювати матрицю плану перевезень X , подібну до таблиці перевезень розміром $m \times n$:

$$X = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Розв'язання задачі проводиться [1, 2, 3] на основі *математичної моделі*, яка полягає у визначенні мінімального значення цільової функції транспортних витрат:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min \quad (2)$$

при обмеженнях:

- за обсягом постачань:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; (i = 1, m) \quad (3)$$

- за обсягом попиту:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; (j = 1, n) \quad (4)$$

- невід'ємності змінних:

$$x_{ij} \geq 0; (i = 1, m, j = 1, n) \quad (5)$$

Умови *необхідні і достатні* для розв'язання задачі визначаються балансом:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (6)$$

Постановка проблеми. Рішення, що задовольняє умовам (3)–(6), полягає у визначенні на підставі математичних алгоритмів кількості одиниць вантажу, який перевозиться по кожному шляху, при мінімальних сумарних витратах (2). *Тобто застосовуються та шукаються лише математичні підходи та шляхи.* Найбільш поширеною є їх розробка у розділах лінійного програмування.

Пропонується електрична (фізична) модель транспортної задачі, що дозволяє застосувати при її розв'язанні інші підходи, методи і рішення, які широко розвинуті в електро-радіотехніці. Наприклад, визначення перехідних процесів, яке ретельно пророблене в теорії електричних кіл, може дозволити визначити реакцію моделі чи знайденого рішення на раптову зміну умов перевезення. Деякі нові підходи будуть наведені нижче під час розв'язання конкретної задачі.

Формулювання мети статті. Враховуючи відсутність публікацій відносно використання електричної моделі при рішенні транспортної задачі, у даній роботі ставиться дві **мети**:

- показати збіг математичного визначення струму у запропонованій моделі з математичною моделлю, яка визначає розподіл вантажу в транспортній задачі. Тобто показати можливість визначити план транспортування вантажу за шляхами на основі розрахунку струму у ланцюгах моделі;
- на прикладі розрахунку конкретної транспортної задачі, яка також надана у вигляді електричної моделі, показати можливість використання алгоритмів її розв'язання, що мають широке застосування у лінійному програмуванні.

Викладення основного матеріалу. Пропонується *електрична модель* транспортної задачі у вигляді електричної схеми, яка сформована зі стандартних елементів електричних кіл [4, 5]. Її базовими елементами є джерела постійного струму, що з'єднані в єдине коло. Джерела струму об'єднані у дві групи, одна з яких імітує виробників, друга – споживачів. *Виходи* джерел

струму, що імітують виробників, за допомогою з'єднуючих елементів приєднані до *входів* джерел струму, що імітують споживачів. Функціонування моделі не зміниться, якщо напрямок струму в усіх джерелах струму змінити на протилежний (для цього необхідно *входи* джерел струму, що імітують виробників, за допомогою з'єднуючих ланцюгів приєднати до *виходів* джерел струму, що імітують споживачів). Виводи джерел, що не приєднуються до з'єднуючих ланцюгів, з'єднуються разом, найчастіше приєднуючись до спільної точки схеми (землі, ґрунту). Направленість струму в усіх джерелах однакова, тому вони не формують зустрічних струмів у з'єднуючих ланцюгах. Виходи та входи джерел визначаються щодо напрямку струму джерела. Головним елементом з'єднання є резистор, чисельне значення опору якого визначається транспортними витратами. Додатково (за необхідністю) у з'єднуючі ланцюги можуть бути введені інші електричні елементи, наприклад, конденсатори тощо.

Креслення загальної схеми моделі, сформованої на підставі наведеного вище опису електричної моделі транспортної задачі, наведено на рисунку 1. На ньому показані:

- три джерела (I_{1S} , I_{2S} , I_{mS}) з m джерел струму, якими моделюються пункти постачання;
- три джерела (I_{1C} , I_{2C} , I_{nC}) з n джерел струму, якими моделюються пункти споживання;
- резистори R_{ij} , якими з'єднують вихід i -го джерела струму «постачальника» з входом j -го джерела струму «споживача» і якими моделюються транспортні шляхи.

Джерела струму і з'єднуючі елементи, що не наведені на кресленні, позначені трьома крапками.

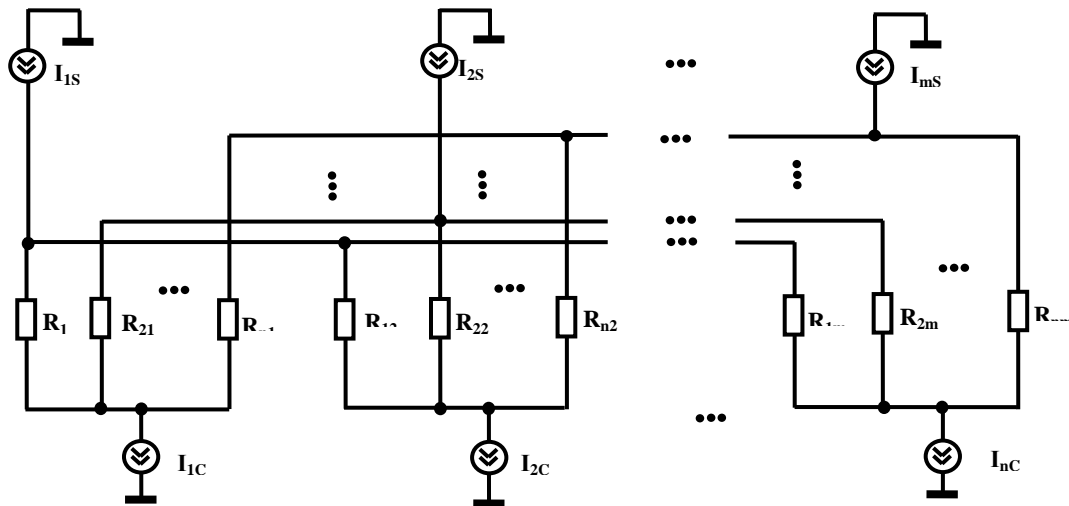


Рис. 1

При формуванні моделі конкретної задачі чисельні значення струму джерел струму встановлюють рівними значенням кількості продукту у відповідних виробників та споживачів. Чисельні значення електричного опору резисторів встановлюються рівними значенням транспортних витрат перевезення одиниці продукту відповідним шляхом, тобто кожен з'єднуючий ланцюг є еквівалентом відповідного шляху. Всі струми та опори встановлюються в одних фізичних одиницях, наприклад, в амперах для струму і омах для опору (у цьому разі виникаючи у схемі напруги будуть визначатись у вольтах, що іноді спрощує проведення аналізу отриманих результатів). Вказані фізичні одиниці струму (ампери) і опору (оми) будуть застосовані в подальшому при формуванні моделі конкретної задачі.

При формуванні моделі на фізичних приладах, для підвищення точності отриманих результатів моделювання, максимальні опори резисторів повинні бути значно меншими (на декілька порядків) за вихідний опір джерел струмів. Це також повинно враховуватись при формуванні моделі за допомогою різних електронних програм, що призначені для побудови та розрахунку електричних схем. В ідеалі вихідний опір джерела струму [4, 5] наближається до нескінченності, що достатньо добре реалізується в існуючих електронних програмах.

Розв'язком задачі на запропонованій моделі будуть чисельні значення струму у ланцюгах резисторів, що імітують відповідні шляхи. Тобто чисельні значення струмів у з'єднуючих

ланцюгах визначають кількості одиниць вантажу, що транспортується відповідним шляхом. Струм у ланцюгах необхідно визначати в одиниці, яка була застосована при завданні струмів джерел. Індикація значень струмів обумовлюється особливостями програми, за допомогою якої формується електрична схема моделі. В одних програмах відображення струмів необхідно ввести в ланцюги прилади (амперметри), як це буде зроблено в подальшому, в інших – використати відповідну команду виводу даних і т. д. При створенні моделі на реальних приладах для індикації безперечно необхідно буде застосувати амперметри.

Можливість використання пропонованої моделі для імітування транспортної задачі ґрунтується на дії в замкненому електричному колі першого закону Кірхгофа щодо струмів, згідно з яким у точках з'єднання електричних ланцюгів сума вихідних струмів дорівнює сумі вхідних (і, навпаки, сума вхідних рівна сумі вихідних) [4, 5]. Це забезпечує виконання умов (3) і (4) за струмом. Вважається, що розглядається збалансована задача, для якої виконується умова (6). У разі незбалансованої задачі її зводять до збалансованої, як і зазвичай, введенням фіктивного або виробника, або споживача, з'єданого з рештою джерел шляхами з нульовими витратами [2, 3].

Щодо виконання умови (5), то необхідно дати декілька пояснень. Взагалі, в електричних колах прийнято вважати за позитивний струм, напрямком якого збігається з технічним напрямком – від точки з більшим потенціалом (напругою) до меншого. Цього правила дотримуються в усіх програмах, в яких розраховуються електричні схеми. Йому необхідно слідувати і при розгляді електричної моделі. Як звісно, будь-яких рішення транспортної задачі (чи опорне, чи оптимальне) характеризується відсутністю замкнених кіл (циклів), утворених з шляхів, де плануються перевезення [2, 3]. Тому струм у з'єднуючих ланцюгах буде визначатись лише під'єднаними до них джерелами струму, що гарантує його невід'ємність, тобто забезпечує виконання умови (5).

Покажемо формування моделі та її перетворення в процесі розв'язання на прикладі конкретної транспортної задачі, яка задана наступною таблицею перевезень (табл. 2). Згідно з нею, 700 одиниць товару необхідно доставити (перевезти) 5-ти споживачам від 3-х виробників (постачальників), при вказаних у таблиці витратах на перевезення одиниці вантажу.

Таблиця 2

Виробник	Споживач					Об'єм товару
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	13	7	15	4	11	250
A_2	20	9	6	10	9	250
A_3	2	4	7	3	6	200
Потреби	120	110	85	195	190	

Розв'язання транспортних задач у лінійному програмуванні часто проводиться у два етапи. Спочатку знаходять так зване базове рішення і, якщо воно не характеризується мінімумом витрат, його покращують, отримуючи остаточне, оптимальне. І одне, і друге отримують на основі аналізу таблиці перевезень. Різноманітність методів, в основному, спостерігається на етапі визначення базового рішення. При оптимізації, зазвичай, використовується метод потенціалів.

План перевезень базового рішення, знайдений на підставі алгоритму методу найменших витрат, що отриманий на основі аналізу даних таблиці 2 та наведений у таблиці 3, а.

Таблиця 3, а

$$X_{ij} =$$

0	110	0	115	25
0	0	85	0	165
120	0	0	80	0

Таблиця 3, б

$$X_{ij} =$$

⊕	(110)	⊕	(115)	(25)
⊕	⊕	(85)	⊕	(165)
(120)	⊕	⊕	(80)	⊕

Сформувати отримане базисне рішення на електричній моделі можна двома шляхами:




- створити схему, в якій будуть усі джерела струму (імітуючі і виробників, і приймачів), а також з'єднуючі ланцюги, за якими піде струм (C_{12} ; C_{14} ; C_{15} ; C_{23} ; C_{25} ; C_{31} ; C_{34} – позначення шляхів задачі згідно з індексацією, введеною у таблиці 1);

- 2) почати з повної загальної електричної схеми моделі запропонованої задачі і, повторюючи кроки методу мінімальних витрат, вилучати (розмикати) з'єднуючи ланцюги з нульовим вантажем, що, безперечно, забезпечить їх нульовий струм.

Перший – просто ілюструє, констатує можливість отримання рішення транспортної задачі на заставі використання електричної схеми. Більш інформативним є другий підхід. Він дозволяє крок за кроком пройти увесь алгоритм отримання рішення. При його засвоєнні можливо розв'язати задачу не лише на основі аналізу таблиці перевезень, як це завжди робиться, а й на основі роботи з електричною схемою моделі, чи використовуючи обидва джерела інформації.

До демонстрації другого шляху необхідно вказати на деякі особливості роботи з електричною моделлю. По-перше, як вже було вказано, ланцюги, за якими визначається нульове перевезення, у моделі просто розмикаються (розриваються). По-друге, під час роботи з електричною моделлю не треба буде визначати кількість вантажу у з'єднуючому ланцюгу (шляху), який розглядається, та підраховувати залишки у виробника чи недобір у споживача, що визначились на попередніх кроках рішення. В результаті дії закону Кірхгофа відповідне значення струму, обумовлене вказаними об'ємами, встановлюється автоматично. Тому у таблиці 3, б, яка не лише доводить знайдений базовий план перевезень, але і вказує на остаточний вигляд електричної схеми моделі, розімкнені ланцюги (шляхи з нульовими перевезеннями) позначені символом \emptyset , а значення струмів у залишених з'єднуючих ланцюгах вставлені у дужки. Заміна нулів на позначку обумовлена тим, що при рішенні деяких задач у ланцюзі, який не повинен бути розімкнутим, може визначитись нульовий струм.

На рисунку 2 надана схема моделі, що виникає після другого кроку алгоритму методу найменшої вартості [2, 3]. Вона, як і схема всієї моделі, була сформована (згідно з даними табл. 2) на робочому полі програми **Electronics Workbench (EWB 5.12)** [6]. На рисунку застосовані зображення наступних елементів електричного кола:

-  – джерело постійного струму, у цьому разі, на струм 60 ампер;
 – резистор опором 2 Ом (наприклад, третій резистор на рис. 2);
 – спільна точка (земля, ґрунт). Прямокутниками позначені амперметри.
 Струми джерел вказані в амперах, опори резисторів – в омах.

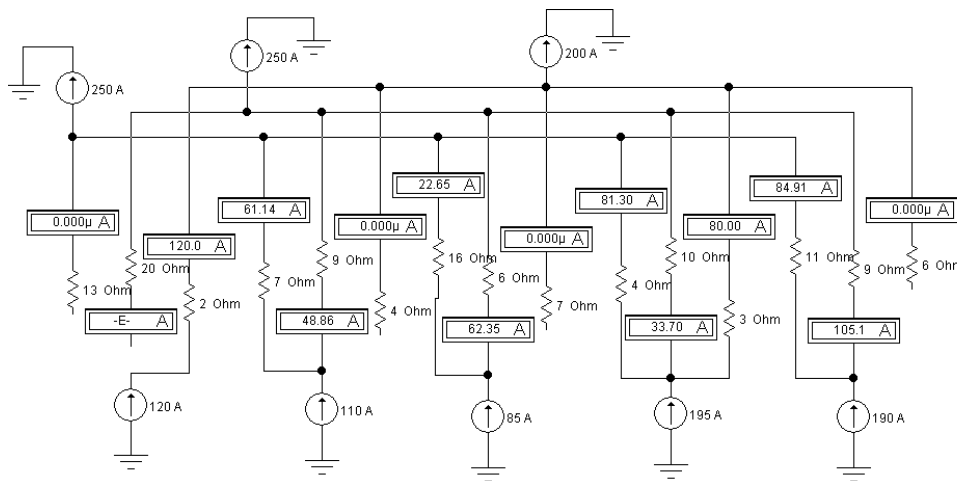


Рис. 2

Щоб не ускладнювати загальне сприйняття рисунку, в схему не введені умовні та позиційні позначення елементів. Залишені лише значення струмів, що встановлюються у джерелах струму, номінали опору резисторів у з'єднуючих ланцюгах і амперметри, які відображають отримані значення струму (вантаж), що транспортується відповідним шляхом. Хоча у наступному пояснювальному тексті замість сполучення «ланцюг з резистором з номіналом опору 13 Ом» буде використане «ланцюг опором 13 Ом» чи просто «ланцюг $R = 13 \text{ Ом}$ ». Щоб спростити прив'язку елементів моделі до даних таблиці 2:

- верхній ряд джерел імітує трьох виробників, а нижній – п'ятьох приймачів;
- опори резисторів ланцюгів, що приєднані до джерел приймачів, визначаються втратами, які вказані у відповідному стовпці таблиці 2.

Пояснимо роботу з моделлю, яка призвела до стану, зображеного на рисунку.

1-ий крок алгоритму розв'язання методом найменшої вартості – визначення струму (об'єму вантажу) ланцюга (шляху) з мінімальною вартістю перевезення.

Згідно з таблицею 2, мінімальну вартість перевезення має шлях між третім постачальником і першим споживачем ($C_{31} = 2$). Відповідний ланцюг з резистором опором у 2 Ом (на рисунку) з'єднує джерело зі струмом 200 А (третій виробник) з джерелом струмом 120 А (перший споживач). Мінімум визначається споживачем, тому для того, щоб шляхом з мінімальною вартістю пішов максимально *можливий* вантаж, два додаткових ланцюги, що під'єднані до цього споживача, розриваються (розмикають ланцюги з резисторами 13 і 20 Ом). Через ланцюг з резистором 2 Ом (автоматично) піде струм 120 А. В джерелі «виробника» залишиться надлишок невикористаного струму (вантаж). Об'єм цього надлишку при роботі з моделлю на даному кроці не має значення; він однозначно визначиться на наступних етапах розв'язання.

2-ий крок алгоритму. Наступним шляхом з мінімальною вартістю є шлях з витратами $C_{34} = 3$. Еквівалентний йому ланцюг з резистором 3 Ом «випадково» виявився приєднаним до джерела того самого виробника, об'єм вантажу якого вже був частково використаний на попередньому кроці. Четвертий споживач може отримати 195 одиниць вантажу, що більше, ніж залишилось у третього виробника. Тому, щоб весь залишок вантажу третього виробника (80 одиниць) був транспортований визначеним шляхом з відносно низькими витратами, розриваються всі інші ланцюги, що приєднані до цього виробника (це ланцюги з резисторами 4, 7 і 6 Ом). Струм, що виник у ланцюзі з резистором у 3 Ом, встановлюється рівним залишкам ($200 - 120 = 80$) від попереднього відбору з цього джерела. Якщо б залишок струму у третього виробника був більшим за потреби четвертого споживача, то необхідно було б розривати ланцюги, що приєднані до четвертого споживача, подібно тому, як це робилось на першому кроці.

Наступні кроки (при переключенні роботи з таблиці на модель):

3-ий крок. Табл. 2 \Rightarrow вантаж у шляху $C_{14} = 4$. Модел \Rightarrow розрив ланцюга з резистором 10 Ом, струм у ланцюзі 4 Ом–115 А, що визначається можливістю споживача прийняти додатковий струм ($195 - 80$);

4-ий крок. Табл. 2 \Rightarrow вантаж у шляху $C_{23} = 6$. Модел \Rightarrow розрив ланцюга з резисторами 16 Ом (ланцюг 7 Ом був розірваний на другому кроці), струм – 85 А, що визначається потребою споживача;

5-ий крок. Табл. 2 \Rightarrow вантаж у шляху $C_{12} = 7$. Модел \Rightarrow розрив ланцюгів з резистором 9 Ом (ланцюг з резистором 4 Ом був розірваний ще на другому кроці), струм 110 А – потреба виробника.

Остаточні значення перевезень за шляхами C_{15} ($R = 11$ Ом) і C_{23} ($R = 9$ Ом) встановились ще за завершенням четвертого кроку і не змінились на п'ятому.

Електрична схема моделі, отримана у результаті всіх перетворень розв'язку методом найменшої вартості, наведена на рисунку 3. Сумарні розходи на перевезення всього вантажу становили 3980 одиниць. Якщо врахувати, що витрати визначаються добутком кількості вантажу на вартість перевезення, які, згідно з моделлю, визначаються струмом та опором резисторів, то для визначення витрат в схему можна ввести вольтметри.

Використання інших методів отримання опорного рішення призвело би лише до вибору інших шляхів перевезень, порівняно з наведеними, тобто – до визначення інших з'єднуючих ланцюгів, в яких необхідно було б встановити максимально можливий обсяг вантажу (струму). Вибір шляхів зручно проводити на основі таблиці перевезень чи просто на основі таблиць, якими сформульована задача. В них необхідна інформація скомпонована щільніше.

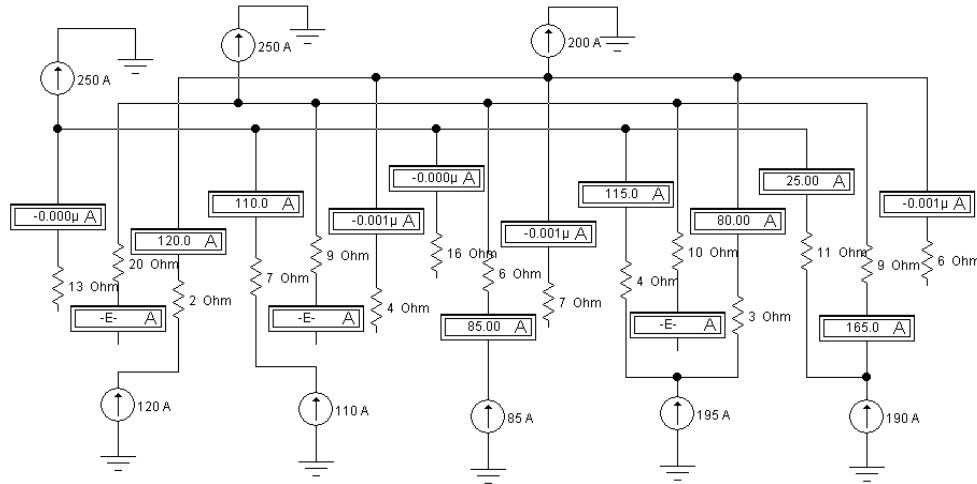


Рис. 3

Подальші дії зі встановлення максимального струму в обраному шляху доцільніше проводити на електричній схемі з врахуванням наступного:

- максимально можливий струм в обраному ланцюзі визначається меншим зі струмів джерел виробника чи приймача, які з'єднує ланцюг (шлях). Якщо струми джерел не використовувались на попередніх кроках алгоритму розв'язання, то порівнюють номінали струму джерел. Якщо використовувались – порівнюють залишки струму виробника чи нестачу у приймача;
- якщо струм ланцюга визначається приймачем, то розривають всі інші ланцюги, які приєднані до нього;
- якщо струм ланцюга визначається виробником, то розривають всі інші ланцюги, які приєднані до нього;
- стан ланцюгів (розімкнений чи залишений), що встановлений на попередніх кроках, не повинен змінюватись на наступних.

При виконанні цих правил струм в обраному ланцюзі встановлюється автоматично.

Оптимізація базового рішення проводиться в результаті перерозподілу вантажу в межах кола (циклу), яке сформоване з задіяних шляхів (залишених з'єднуючих ланцюгів) та яке замкнене на шлях з нульовим вантажем (розімкнений ланцюг).

Усі шляхи з нульовими перевезеннями можуть утворити з задіяними більш-менш складні замкнені кола. Вибір оптимального з них здійснюється на основі методу потенціалів. Згідно з ним [2] визначають потенціали комірок таблиці базового плану перевезень, які далі порівнюють з витратами на транспортування. Зрозуміло, що для реалізації методу достатньо базового плану перевезень (табл. 3). Визначення елементів кола, в якому буде проводитись перерозподіл, можна, як це робиться традиційно, на таблицях опорних планів. Однак використання схеми електричної моделі базового рішення дозволяє отримати фізичне пояснення процесам, якими визначається перерозподіл. Крім того, при роботі з моделлю з'являються деякі нові підходи і можливості.

Розглянемо, використовуючи таблицю 3, за приклад перерозподіл вантажу, який можна провести у колі:

$$C_{35} \rightarrow C_{15} \rightarrow C_{14} \rightarrow C_{34}$$

Цей контур позначений на комірках таблиці 4, а, в якій, порівняно з аналогічною таблицею 3, а, для спрощення не зазначені нульові перевезення. У результаті виконання стандартної процедури перерозподілу визначається новий опорний план перевезень (табл. 4, б). Сумарні витрати на перевезення всього вантажу, порівняно з попередніми, зменшилися на 100 одиниць.

Таблиця 4, а

$$X_{ij} =$$

	110		115	25
		85		165
120			80	

Таблиця 4, б

$$X_{ij} =$$

	(110)		140	
		(85)		(165)
(120)			55	25

Згідно з електричною схемою моделі при отриманому вище рішенні, перерозподіл проводиться у ланцюгах з резисторами опорами 6, 11, 4 і 3 Ом (правий бік рис. 3). Як видно зі схеми моделі, зростання струму в ланцюзі 6 Ом, у зв'язку з його зімкненням, призведе до зменшення струму ланцюга $R = 11$ Ом, бо їх сума повинна дорівнювати струму джерела п'ятого споживача. Зростання струму також повинно зменшити струм у ланцюзі $R = 3$ Ом і відповідно збільшити у ланцюзі $R = 4$ Ом, оскільки сумарні значення вказаних струмів визначаються струмами джерел третього виробника і четвертого споживача. Край зменшенню чи зростанню струмів визначається обнулінням ланцюга з меншим струмом.

Коло у розглянутому прикладі дуже просте і скоріше не потребує звернення до схеми моделі. Коло і новий «нульовий» шлях просто визначити з таблиці плану опорного рішення. Реалізація перерозподілу *на моделі* теж дуже проста: поновлюється електричне з'єднання розімкнутого ланцюга і розмикається ланцюг з «нульовим» струмом. Необхідні значення струмів в усіх елементах при цьому виникають автоматично, яким би складним не було коло. На рисунку 4, а наданий правий бік креслення моделі після реалізації розглянутого вище перерозподілу (порівняйте з відповідними елементами на рис. 3).

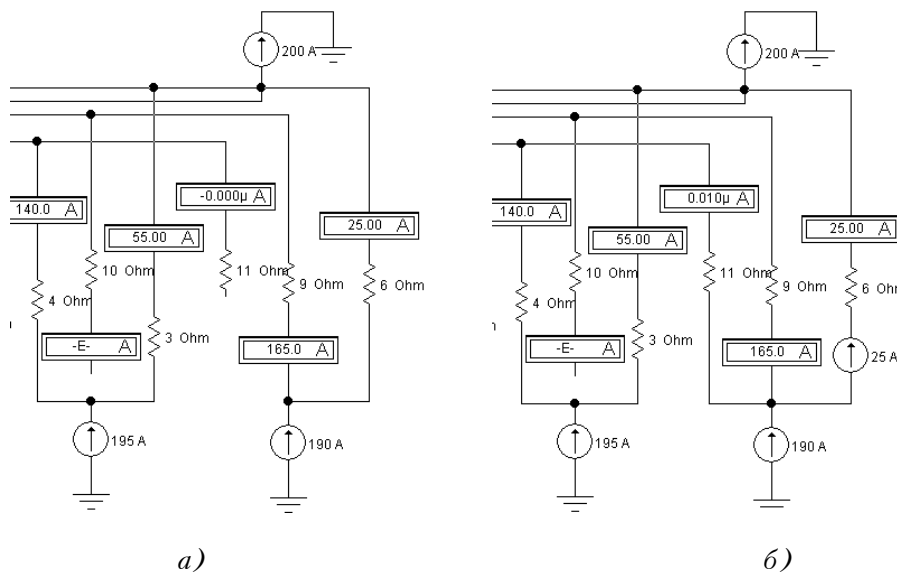


Рис. 4

Зміна струму лише у межах замкненого кола може бути використана для його виявлення, знаходження. На рисунку 4, б наведена схема, яка дозволяє встановити на моделі елементи «кола перерозподілу», визначити струми в них та визначити ланцюг, якій буде необхідно розімкнути. Для цього в ланцюг, електричне з'єднання якого поновлюється, вводиться додаткове джерело струму з напрямленістю струму, що збігається з напрямленістю в інших джерелах. Значення струму джерела збільшується, доки струм в одному з ланцюгів не стане нульовим. Можна переконатись, що подальше збільшення струму у додатковому джерелі призведе до появи в «нульовому» ланцюзі від'ємних струмів. Елементи кола визначаються ланцюгами, в яких змінюється струм. Значення струмів в елементах кола при обнулінні одного з ланцюгів збігаються з їх значеннями після реалізації перерозподілу (порівняйте струми в однакових ланцюгах на рис. 4, а та б).

Можна застосувати ще один варіант визначення елементів кіл, що замкнені на розімкнутий ланцюг. Продемонструємо його на найбільш складному колі, що виникає на базовому плані щодо шляху C_{33} з нульовим вантажем (розімкнутий ланцюг $R = 7$ Ом між третім виробником та третім споживачем, рис. 3). Щоправда, проводити перерозподіл вантажів (струмів) у даному колі не має сенсу, бо він призведе до нового базового рішення, але з більшими витратами.

Попередньо зробимо деяке зауваження. У попередньому не було чіткого визначення типу струму (постійний чи змінний), на якому проводиться робота моделі. Зазвичай вважалась робота на постійному струмі, що було задано вибором типу джерел струму (примітки до позначень на рис. 2). Нічого у попередніх поясненнях не змінилось, якщо було б обрано

джерела змінного струму, хоча при використанні змінного струму було б значно складніше довести умову «невід'ємності» результатів рішення.

При поясненні авансованого варіанта визначення замкнутого на C_{33} кола будемо вважати, що за виробників та споживачів використано, як раніше, джерела постійного струму.

Як і у попередньому варіанті, пошуку елементів кола відновимо електричне з'єднання третіх джерел виробника і споживача ланцюгом $R = 7$ Ом (рис. 5). Але у ланцюг введемо джерело струму змінного типу і налаштуємо всі амперметри на вимір струму цього типу. Змінний струм буде спостерігатись лише в елементах кола

$$C_{33} \rightarrow C_{34} \rightarrow C_{14} \rightarrow C_{15} \rightarrow C_{25} \rightarrow C_{23}.$$

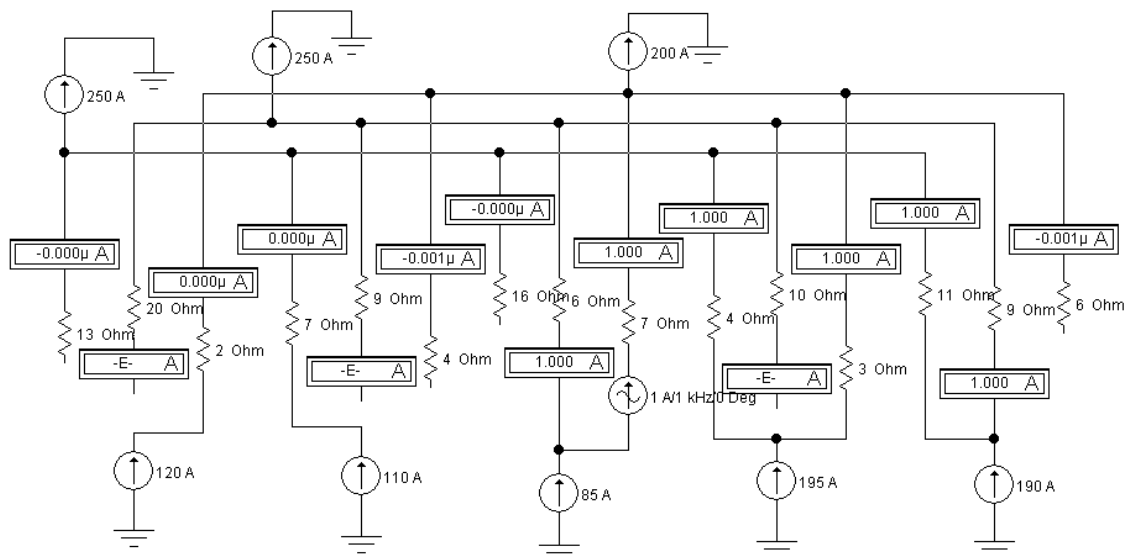


Рис. 5

Запропоновані методи визначення замкнених контурів можуть бути застосовані в задачах значної розмірності (задачах з більшою кількістю постачальників, споживачів і шляхів). Вони також можуть бути використані для знаходження можливих помилок у складних задачах на етапі визначення базового рішення.

Висновки:

1. Запропонована *електрична модель* транспортної задачі у вигляді замкнутої електричної схеми. Її основою є дві групи джерел струму, одна з яких імітує виробників, друга – споживачів. Виходи джерел однієї групи за допомогою ланцюгів з резисторами приєднані до входів джерел струму другої групи. Чисельні значення струму джерел струму встановлюють рівними значенням кількості продукту у відповідних виробників та споживачів. Чисельні значення електричного опору резисторів встановлюють рівними значенням транспортних витрат.

2. Доказаний збіг математичного визначення струму запропонованої моделі з математичною моделлю, що визначає розподіл вантажу в транспортній задачі. Тобто показана можливість визначити план транспортування вантажу за шляхами на основі визначення струму у ланцюгах моделі.

3. На прикладі розрахунку конкретної транспортної задачі, що надана у вигляді електричної моделі, за методом найменшої вартості показана можливість використання алгоритмів її розв'язання, що мають широке застосування у лінійному програмуванні. Основна дія при розв'язанні задачі на моделі – електричне розмикання ланцюгів, у яких, згідно з алгоритмом розв'язання передбачається нульовий вантаж. Показане спрощення процесу розв'язання при застосуванні електричної моделі.

4. Запропоновано два варіанти визначення елементів замкнених кіл, у яких проводять перерозподіл вантажу на етапі оптимізації базового рішення.

Список використаної літератури:

1. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев.* – 13-е изд., испр. – М. : Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 544 с.
2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / *И.Л. Акулич.* – М. : Высшая школа, 2005. – 319 с.
3. *Цегелик Г.Г.* Лінійне програмування : посібник / *Г.Г. Цегелик.* – Львів, 1995. – 216 с.
4. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники : Электрические цепи : учебник / *Л.А. Бессонов.* – 8-ое изд. – М. : Высш. шк., 1984. – 590 с.
5. Основи технічної електроніки : у 2 кн. Кн. 1. Теорія електричних кіл : підручник / *М.Б. Гумен, А.М. Гуджій, В.М. Співак* та ін. – К. : Вища шк., 2007. – 727 с.
6. *Карлащук В.И.* Электронная лаборатория на IBM PC : Программа Electronics Workbench и ее применение / *В.И. Карлащук.* – 2-ое изд., доп. и перераб. – М. : Солон-Р, 2001. – 734 с.

КУПКІН Євген Савелійович – кандидат технічних наук, доцент Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- мікросхемотехніка;
- управління в технічних системах.

Стаття надійшла до редакції 20.10.2015.