УДК 519.161

**Н.О. Кушнір, аспір.**
*Житомирський державний технологічний університет*
**О.Б. Мацій, аспір.**
*Харківський національний автомобільно-дорожній університет*
**В.О. Скачков, ст. викл.**
*Житомирський державний технологічний університет*

# МЕТОД НАЙКОРОТШИХ ЗБІЛЬШУЮЧИХ ШЛЯХІВ У ЗАДАЧАХ ПРО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ

*(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)*

*У застосуваннях теорії графів широку популярність отримала задача про паросполучення. Вона полягає в знаходженні в заданому графі паросполучення з найбільшою кількістю ребер − максимального паросполучення. Узагальненям цієї задачі є задача про зважене паросполучення. Класичний алгоритм Едмондса для знаходження найбільшого зваженого паросполучення у недводольному графі характеризується трудомісткістю* $O(|V^4|)$. *Відома задача про зважене паросполучення у довільному графі* $H$ *з n вершинами зводиться до однієї з задач про паросполучення для дводольного графа з* $2n$ *вершинами. Максимальне паросполучення графа* $H$ *з мінімальною сумою ваг ребер, заданих матрицею* $[c_{ij}]_n$, *знаходиться за час* $O(n^3)$ *після впорядкування за незменшенням значень* $c_{ij}$, *розташованих над головною діагоналлю.*

***Ключові слова:*** *паросполучення; максимальне паросполучення; задача про зважене паросполучення.*

**Постановка проблеми.** Нехай $H=(V,U)$ − граф, де $V$ − множина вершин, $U$ − множина ребер (неорієнтованих пар вершин). У $H$ недопустимі петлі, тобто ребра виду $\{v,v\}, v \in V$ і кратні або «паралельні» ребра. Паросполученням у графі $H$ називається підмножина ребер, у якій будь-які два ребра не мають спільних вершин.

У застосуваннях теорії графів широку популярність отримала задача про паросполучення. Вона полягає у знаходженні в заданому графі $H=(V,U)$ паросполучення з найбільшою кількістю ребер − максимального паросполучення. В узагальненні цієї задачі задані ваги ребер − невід'ємні числа, і потрібно визначити максимальне паросполучення графа, що містить ребра з мінімальною (максимальною) сумарною вагою. Сформульоване узагальнення називається задачею про зважене паросполучення (ЗЗП).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Відомо, що ЗЗП поліноміально вирішувана [1]. Класичний алгоритм Едмондса для знаходження найбільшого зваженого паросполучення в недводольному графі $H=(V,U)$, викладений в [1], характеризується трудомісткістю $O(|V|^4)$. Основною причиною щодо невисокої швидкодії алгоритму Едмондса є існування в графі $H$ квіток − циклів, що містять $2k+1$ вершин і $k$ ребер деякого фіксованого паросполучення $M$. Виявлена квітка не дозволяє організувати швидкий пошук паросполучення потужності $|M|+1$ способом, що застосовується для дводольних графів. Для роботи з довільними графами алгоритм Едмондса містить процедуру виявлення квітки й операцію її заміни однією вершиною, допустимою в процесі знаходження поточного паросполучення.

Найбільш ефективні алгоритми знаходження максимальних паросполучень у довільних графах побудовані на розвитку ідей Едмондса про стискання непарних циклів. У них включені способи зберігання даних і організації процесу обчислень, що знижує складність до $O(|V|^3)$ для графів з $n$ вершинами [1, 2].

**Мета роботи.** В умові ЗЗП, яка тут розглядається, заданий граф $H=(V,U) \mid V \in n$, в якому кожне ребро $\{i,j\} \in U$ має вагу $c_{ij} \in R_0^+$, $i,j=\overline{1,n}$, $R_0^+$ − множина невід'ємних дійсних чисел.

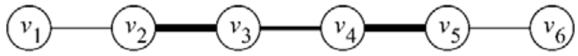
Потрібно знайти в графі $H$ максимальне паросполучення з мінімальною сумою ваг ребер.

**Викладення основного матеріалу.** Графу ЗЗП $H=(V,U)$ відповідає симетрична матриця вартостей (ваг) ребер $C=[c_{ij}]_n$, де $c_{ij}\in R_0^+$, якщо $\{i,j\}\in U$ і $c_{ij}=\infty$ інакше. Ця ж матриця визначає дводольний граф $D=(X,Y,E)$, де $X$, $Y$ − множина вершин, $|X|=|Y|=n$, $E=\{(i,j)\mid i\in X,\ \ j\in Y\}$ − множина ребер із вагами $c_{ij}\in R_0^+$, $|E|=2|V|$. Звідси слідує, що для розв'язання поставленої задачі застосовані ідеї пошуку в ширину в дводольних графах [1].

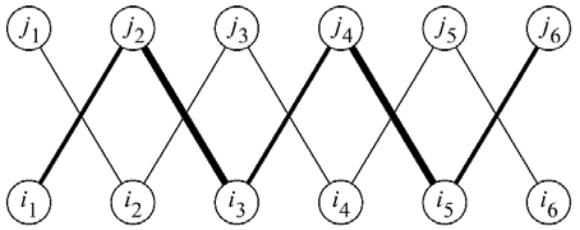
Ребро паросполучення $M$, що зв'язує вершини $v$ і $u$, позначимо $[v,u]$. В ньому $u$ є напарником $v$. Ребра, що не входять у паросполучення $M$, називаються вільними. Вершина, що належить ребру паросполучення, визначається як насичена. Інші вершини графа називаються ненасиченими або вільними. Потужність максимального паросполучення графа $H$ з $n$ вершинами не може бути більшою $\lfloor n/2\rfloor$. Якщо вона дорівнює $\lfloor n/2\rfloor$, то паросполучення вважається повним. При парному $n$ повне паросполучення насичує всі вершини графа $H$ і називається досконалим.

Нехай $M$ − паросполучення в $H$. Простий шлях називається таким, що чергується щодо $M$, якщо ребра шляху через одне присутні в $M$[2]. Шлях, що чергується, який починається і закінчується ребрами, що не належать паросполученню $M$, називається збільшуючим щодо паросполучення $M$.

Якщо $(v_1,v_2,v_3,...,v_{2k-2},v_{2k-1},v_{2k})$− збільшуючий шлях щодо паросполучення $M$ в графі $H$, то $P=(i_1,j_2,i_3,...,j_{2k-2},\ i_{2k-1},j_{2k})$ − збільшуючий шлях в дводольному графі $D=(X,Y,E)$ щодо паросполучення тієї самої потужності, що й $M$. Шлях $P$ починається в ненасиченій вершині $i_1\in X$, закінчується в ненасиченій вершині $j_{2k}\in Y$ і містить $k$ вільних ребер $(i_1,j_2),(i_3,j_4),...,(i_{2k-1},j_{2k})$. Інші $k$ ребер шляху $P$ утворюють паросполучення $\{[i_3,j_2],[i_5,j_4],...,[i_{2k-1},j_{2k-2}]\}$. На рисунку 1, *а* зображено збільшуючий шлях в графі $H=(V,U)$ щодо паросполучення $\{[v_2,v_3],[v_4,v_5]\}$, а на рисунку 1, *б* − відповідний йому збільшуючий шлях $P$ в графі $D=(X,Y,E)$ щодо паросполучення $\{[i_3,j_2],[i_5,j_4]\}$. Тут $k=3$. Ребра паросполучень представлені потовщеними лініями. Тонкими лініями зображені ребра графа $D$, що не належать $P$.




*а)*




*б)*

*Рис. 1*

Процедура знаходження збільшуючого шляху є варіантом метода пошуку в ширину, який базується на наступному відомому факті: якщо $P$ − множина ребер збільшуючого шляху щодо паросполучення $M$ в графі $H$, то $M\oplus P$ − паросполучення потужності $|M|+1$. Наприклад, зі збільшуючого шляху щодо паросполучення $\{[v_2,v_3],[v_4,v_5]\}$ (рис. 1, *а*) слідує паросполучення $\{[v_1,v_2],[v_3,v_4],[v_5,v_6]\}$. Множина ребер $\{[i_1,j_2],[i_3,j_2],[i_3,j_4],[i_5,j_4],\ [i_5,j_6]\}$ утворює збільшуючий шлях $P=(i_1,j_2,i_3,j_4,i_5,j_6)$ щодо паросполучення $M=\{[i_3,j_2],[i_5,j_4]\}$, визначаючи паросполучення $M\oplus P=\{[i_1,j_2],[i_3,j_4],[i_5,j_6]\}$.

Шлях $P=(i_1,j_2,...,i_{2k-1},j_{2k})$ у графі $D$ є простим ланцюгом, ізоморфним у графі $H$ ланцюгу $(v_1,\ v_2,...,\ v_{2k})$ при відповідності $(v_s,\ v_{s+1})\Leftrightarrow(i_s,\ j_{s+1})$ $s=1,\ 3,...,\ 2k-1$, і $[v_{2s},v_{2s+1}]\Leftrightarrow\Leftrightarrow[j_{2s+1},j_{2s}]$, $s=1,2,...,\ k-1$ (рис. 1) [3]. Паросполучення $M$ і шлях $P$ утворюють паросполучення $M\oplus P=\{[i_1,\ j_2],\ [i_3,j_4],...,\ [i_{2k-1},j_{2k}]\}$.

Допустимий розв’язок ЗЗП – це максимальне паросполучення зваженого графа $H$. Пошук максимального паросполучення в $H$ за будь-яким методом завершується при виконанні умови теореми, в наступному формулюванні. Паросполучення $M$ в графі $H$ максимальне тоді і тільки тоді, коли в $H$ не існує збільшуючого шляху щодо $M$[1]. Збільшуючий шлях щодо паросполучення $M$ графа $H$ називається найкоротшим, якщо його вартість не більше за вартість будь-якого збільшуючого шляху щодо $M$. Розв’язком ЗЗП є максимальне паросполучення $M_{opt}$ мінімальної вартості в графі $H$.

Нехай $M_{k-1} = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], ..., [i_{2k-3}, j_{2k-2}]\}$ – паросполучення з найменшою сумою ваг $k-1$ ребер на множині всіх паросполучень потужності $k-1$ в дводольному графі $D$, $k \geq 2$. В графі $H$ йому взаємно однозначно відповідає паросполучення $\{[v_1, v_2], [v_3, v_4], ..., [v_{2k-3}, v_{2k-2}]\}$. Покладемо $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]], [i_2, j[i_2]], \dots, [i_l, j[i_l]], \dots, [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$, $i_l \neq j[i_l]$, де $i_l$ – номер вершини множини $X$, $j[i_l]$ – номер вершини множини $Y$. В $M_{k-1}$ усі $2k-2$ вершин занумеровані різними числами множини $\{1, 2, \dots, n\}$, $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Позначимо $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$ – паросполучення, що містить ребро $[i_k, j[i_k]]$ з найменшою вагою серед усіх ребер, які можна приєднати до $M_{k-1}$, $P_k$ – найкоротший збільшуючий шлях щодо паросполучення $M_{k-1}$, $M_k^2 = M_{k-1} \oplus P_k$, $C(M_k^1)$ і $C(M_k^2)$ – вартості паросполучень $M_k^1$ і $M_k^2$.

Справедливе наступне твердження, доведення якого відрізняється лише позначеннями від доведення твердження в [4].

*Лема.* Якщо $C(M_k^2) \leq C(M_k^1)$, то $C(M_k) = C(M_k^2)$, інакше $C(M_k) = C(M_k^1)$, $M_k$ – паросполучення з мінімальною сумою ваг $k$ ребер в графі $D$.

Очевидно, для деякого $k$ паросполучення $M_k$ максимальне. Тоді $M_{opt} = M_k$ в графі $H = (V, U)$. Представлений метод розв’язання ЗЗП полягає в покроковому знаходженні в графі $H$ паросполучень $M_k$, $k = \overline{1, M_{opt}}$, в результаті побудови в дводольному графі $D$ кожного найкоротшого збільшуючого шляху $P_k$ щодо $M_k$, знаходження паросполучень $M_{k+1}^1$ і $M_{k+1}^2 = M_k \oplus P_k$ та вибору з них $M_{k+1}$.

Основна ідея алгоритму. Паросполучення $M_1$ складається з одного ребра, вага якого дорівнює мінімальному значенню в матриці $C$. Якщо матриця $C$ містить декілька елементів мінімальної ваги, то $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$, $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\}$, $i_1$ – номер першого за порядком рядка, якому належить $c_{i_1 j[i_1]}$.

У матриці $C$ паросполучення $M_2$ з мінімальною сумою ваг двох ребер $C(M_2) \neq \infty$ визначається зі співвідношення:

$$C(M_2) = \min\{C(M_2^1), C(M_2^2)\}. \qquad (1)$$

Паросполучення $M_2^1$ містить ребро $[i_1, j[i_1]]$ вагою $c_{i_1 j[i_1]}$ і ребро $[i_1^1, j[i_1^1]]$ мінімальної ваги $c_{i_1^1 j[i_1^1]}$ в підматриці, що отримана видаленням із матриці $C$ рядків і стовпців із номерами $i_1, j[i_1]$ (рис. 2, *a*):

$$c_{i_1^1 j[i_1^1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j \notin \{i_1, j[i_1]\}\}.$$

В паросполучення $M_2^2$ (рис. 2, *a*) входить ребро $[i_1, s]$ вагою

$$c_{i_1 s} = \min\{c_{ij} \mid j \neq j[i_1]\}$$

і ребро $[r, j[i_1]]$ вагою

$$c_{rj[i_1]} = \min\{c_{ij[i_1]} \mid i \neq i_1\}.$$

Коли матриця $C$ містить не менше двох елементів мінімальної ваги, вибір серед них елемента з найменшим номером рядка усуває єдиний випадок втрати оптимального розв’язку $M_2$. Значення (1) може не досягти мінімуму, якщо:

$$c_{l,l+1} = c_{l+1,l+2} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\}, \ 1 \leq l \leq n-3,$$

$$c_{l+2,l+3} < c_{rs} = \min\{c_{ij} \mid i,\ j \neq l+1,\ \ l+2\}.$$

Дійсно, при $c_{i_1 j[i_1]} = c_{l+1,l+2}$ паросполучення $M_2' = \{[l+1, l+2], [r, s]\}$ отримає вагу $C(M_2') = \ = c_{l+1,l+2} + c_{r,s}$. Ця вага більша ваги паросполучення $M_2^1 = \{[l, l+1],\ [l+2, l+3]\}$ (рис. 2, *б*).

На рисунку 3, *а* зображено паросполучення $M_2^1$ в дводольному графі $D$, на рисунку 3, *б* – підграф графа $D$, що містить паросполучення $M_2^2 = M_1 \oplus P_1$, де $P_1 = ((r, j[i_1]), [i_1, j[i_1]], (i_1, s))$ – множина ребер найкоротшого збільшуючого шляху щодо $M_1$.

| | | $i_1$ | $s$ | $j[i_1]$ | $j[i_1^1]$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| $i_1$ | | | $c_{i_1 s}$ | $c_{i_1 j[i_1]}$ | | |
| $i_1^1 = s$ | | | | | $c_{i_1^1 j[i_1^1]}$ | |
| | | $c_{j[i_1] i_1}$ | | | | |
| $r = j[i_1^1]$ | | | | $c_{rj[i_1]}$ | | |
| | | | | | | |

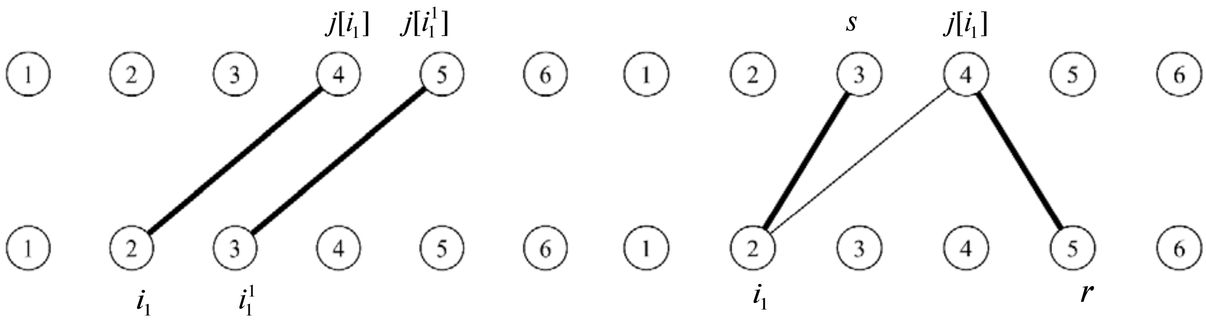
*а)*

| | | | $l+1$ | $l+2$ | $l+3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_{rs}$ | | | | |
| $l$ | | | $c_{l,l+1}$ | | | |
| $l+1$ | | | | $c_{l+1,l+2}$ | | |
| $l+2$ | | | | | $c_{l+2,l+3}$ | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

*б)*

*Рис. 2*

Таким чином, у дводольному графі $D$ $M_2 = M_2^1$, якщо $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} <$ $< C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$ і $M_2 = M_2^2$ інакше.




*а)* *б)*

*Рис. 3*

За матрицею $C$ і паросполученням $M_2^1, M_2^2$ знайдемо паросполучення $M_3$ з мінімальною сумою ваг трьох ребер $C(M_3)$. Аналогічно (1) представимо:

$$C(M_3) = \min\{C(M_3^1), C(M_3^2)\}.$$

Щоб отримати $M_3$ і $C(M_3)$, знайдемо :

$$c_{i_2 j[i_2]} = \min\{c_{ij} \mid i, j \notin \{i_1, j[i_1], i_1^1, j[i_1^1]\}\}.$$

Нехай $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} < C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$. Тоді для паросполучень $M_3^1 = M_2^1 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ і $M_3' = M_2^2 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ справедлива нерівність:

$$C(M_3^1) = C(M_2^1) + c_{i_2 j[i_2]} \le C(M_3') = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} + c_{i_2 j[i_2]}.$$

Для вибору більш точної верхньої межі $C(M_3')$ вартості $C(M_3)$ оптимального поточного розв'язку $M_3$, ніж $C(M_3')$, побудуємо найкоротший збільшуючий шлях $P_2$ щодо $M_2^1$, знайдемо $M_3^2 = M_2^1 \oplus P_2$ і $C(M_3^2)$. Очевидно, що $M_3 = M_3^1$, якщо $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, і $M_3 = M_3^2$ інакше.

Припустимо, що:

$$C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} \le C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} .$$

Оскільки $c_{i_1^1 j[i_1^1]} \le c_{i_2 j[i_2]}$, то вартості паросполучень $M_3^1 = M_2^2 \cup \{[i_1^1, j[i_1^1]]\}$ і $M_3' = M_2^1 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ задовольняють нерівності:

$$C(M_3^1) < C(M_3') .$$

Тому величина $C(M_3^1)$ є більш точною оцінкою зверху $C(M_3)$, ніж $C(M_3')$. Для знаходження $M_3$ побудуємо найкоротший збільшуючий шлях $P_2$ щодо $M_2^2$, визначимо паросполучення $M_3^2 = M_2^2 \oplus P_2$ і його вартість $C(M_3^2)$. Отже, $M_3 = M_3^1$, якщо $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, і $M_3 = M_3^2$ інакше.

Викладений спосіб знаходження $M_3$ і $C(M_3)$ вкладається в схему розв'язання ЗЗП за допомогою рівності:

$$C(M_k) = \min\{C(M_k^1), \quad C(M_k^2)\},\ 2 \le k \le | M_{opt} | . \tag{2}$$

При $k = | M_{opt} |$ хоча б одне зі значень $C(M_k^1)$ або $C(M_k^2)$ сягає $C(M_{opt})$; $M_k = M_{opt}$, якщо при деякому $k$ $C(M_k) \ne \infty$, а при $k+1$ $C(M_{k+1}^1) = C(M_{k+1}^2) = \infty$.

*Схема розв'язання задачі.* Назвемо вершину $j_l \in Y$ відображенням у графі $D$ початку $i_l$ ребра $[i_l, j[i_l]]$ паросполучення $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]], [i_2, j[i_2]], ..., [i_l, j[i_l]], ..., [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$ і позначимо її $j_l'$. Вершину $i_m \in X$ назвемо відображенням кінця $j[i_l]$ цього ребра і позначимо її $i_m'$.

Нехай $I_{k-1} = \{i_l \mid l = \overline{1, k-1}\}$, $J_{k-1} = \{j[i_l] \mid l = \overline{1, k-1}\}$ − множини вершин паросполучення $M_{k-1}$, а $I_{k-1}'$, $J_{k-1}'$ − множини їх відображень, $I_{k-1}, I_{k-1}' \subset X$, $J_{k-1}, J_{k-1}' \subset Y$. Побудова $M_{opt}$ починається зі знаходження $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$ і видалення ребер, що інцидентні відображенням $j_1'$ і $i_1'$ вершин $i_1$ і $j[i_1]$ відповідно. В матриці $C$ видалені ребра приймають вагу, що дорівнює $\infty$.

Щоб із (2) визначити $M_k$, спочатку знаходиться $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$, де:

$$c_{i_k j[i_k]} = \min\{c_{ij} \mid i \notin I_{k-1} \cup I_{k-1}',\ j \notin J_{k-1} \cup J_{k-1}'\}. \tag{3}$$

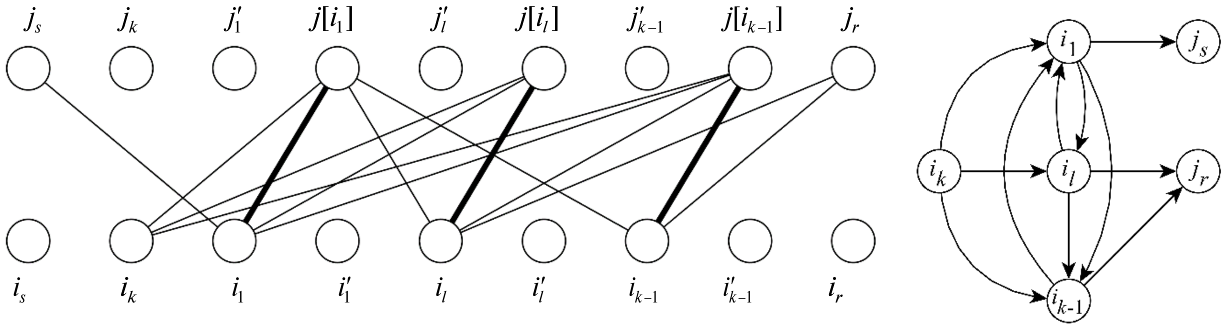
В підграфі графа $D$ видаляються ребра, що інцидентні відображенням $j_k', i_k'$ вершин $i_k$ і $j[i_k]$ відповідно. Кожне ребро, що видаляється, отримує в матриці $C$ вагу, що рдоівнює $\infty$.

Щоб знайти $M_k^2$, для кожної вершини $i_k \notin I_{k-1} \cup I_{k-1}'$ формується підграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ графа $D$. Він містить підмножину $E_{i_k}^1$ вільних ребер $(i_k, j[i_l])$ $l \in \{1, 2, ..., k-1\}$, підмножину $E_{i_k}^2$ всіх ребер, що з'єднують вершини множини $I_{k-1}$ з вершинами множини $J_{k-1}$, і підмножину $E_{i_k}^3$ вільних ребер $(i_l, j_s), j_s \ne j_k,\ j_s \in \{Y - \{J_{k-1} \cup J_{k-1}' - \{j_k\}\},\ l \in \{1, 2, ..., k-1\}\}$, з вагами:

$$c_{i_l j_s} = \min\{c_{i_l j} \mid j \in Y - \{J_{k-1} \cup J_{k-1}'\} - \{j_k\}\}, \tag{4}$$

що утворюють множину вершин $Y_{i_k}^1$. Отже, підграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ складається з множин вершин $X_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup J_{k-1}$ і множини ребер $E_{i_k}^1 \cup E_{i_k}^2 \cup E_{i_k}^3$.

Підграф $D_{i_k}$ представлений на рисунку 4, *а*. Вільні ребра $(i_k, j[i_1])$, $(i_k, j[i_l])$, $(i_k, j[i_{k-1}])$ утворюють підмножину $E_{i_k}^1$. Ребра $(i_1, j[i_l]), (i_1, j[i_{k-1}]), (i_l, j[i_1]), (i_l, j[i_{k-1}]), (i_{k-1}, j[i_1])$ і всі ребра паросполучення $M_{k-1}$ входять у підмножин $E_{i_k}^2$. Підмножина $E_{i_k}^3$ містить ребра $(i_1, j_s), (i_l, j_r), (i_{k-1}, j_r)$. В підграфі $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ $X_{i_k} = \{i_k, i_1, i_l, i_{k-1}\}$, $Y_{i_k}^1 = \{j_s, j_r\}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup \{j[i_1], j[i_l], j[i_{k-1}]\}$.




*а)* *б)*

*Рис. 4*

Підграф $D_{i_k}$ будується для знаходження в ньому шляху $P_{i_k}$, найкоротшого серед усіх збільшуючих шляхів щодо паросполучення $M_{k-1}$. Цей шлях повинен починатися у вершині $i_k$ і закінчуватися в деякій вершині $j_s \in Y^1_{i_k},\ j_s \neq j_k$. Якщо існує шлях $P_{i_k}$, то, згідно з лемою, $M_{i_k} = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ − паросполучення, що доставляє мінімальну суму ваг $k$ ребер в підграфі $D_{i_k}$. В початковому графі $H$ йому відповідає паросполучення тієї самої потужності і з такими самими вагами ребер, що і в $D_{i_k}$. Побудова підграфа $D_{i_k}$ і пошук у ньому шляху $P_{i_k}$ повторюється для кожної вершини $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$ і завершується вибором паросполучення $M^2_k$ вартістю

$$C(M^2_k) = \min\{C(M^2_{i_k}) \mid i_k \notin \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}. \quad (5)$$

Пошук шляху $P_{i_k}$ спрощується в допоміжному орграфі, отриманому в результаті перетворення $D_{i_k}$. Орграф $(Z_{i_k}, A_{i_k})$ складається з множини вершин $Z_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1} \cup Y^1_{i_k}$ і множини дуг $A_{i_k} = A^1_{i_k} \cup A^2_{i_k} \cup A^3_{i_k}$. До підмножини $A^1_{i_k}$ належить дуга $(i_k, i_l),\ i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\},\ i_l \in I_{k-1}$, тоді і тільки тоді, коли вершина $j[i_l]$ ребра $(i_k, j[i_l])$ є напарником вершини $i_l$. Дузі $(i_k, i_l)$ присвоюється вага $c(i_k, i_l) = c_{i_k j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Дуга $(i_d, i_l),\ i_d, i_l \in I_{k-1}$, належить до $A^2_{i_k}$, якщо і тільки якщо вершина $j[i_l]$ ребра $(i_d, j[i_l])$ є напарником вершини $i_l$. Дуга $(i_d, i_l)$ отримує вагу $c(i_d, i_l) = c_{i_d j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Підмножина $A_{i_3}$ містить усі дуги $(i_l, j_s),\ i_l \in I_{k-1},\ j_s \in Y^1_{i_k}$, якщо вершини $i_l$ та $j_s$ з'єднані ребром у $D_{i_k}$. Дуга $(i_l, j_s)$ має вагу $c(i_l, j_s) = c_{i_l j_s}$ (рис. 4, *б*). Нескладно переконатися, що при невід'ємних вагах ребер графа $D$ шлях $P_{i_k}$ − найкоротший шлях серед усіх простих шляхів із вершини $i_k$ у вершини множини $Y^1_{i_k}$ орграфа $(Z_{i_k}, A_{i_k})$. Пошук $P_{i_k}$ виконується за алгоритмом Дейкстри.

Позначимо $\langle D_k \rangle$ підграф дводольного графа $(X, Y, E)$, породжений множинами вершин $I_k = \{i_l \mid l = \overline{1,k}\}$ і $J_k = \{j[i_l] \mid l = \overline{1,k}\}$ паросполучення $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid l = \overline{1,k}\}$.

*Опис алгоритму.* Алгоритм розв'язання ЗЗП складається з наступних кроків.

S0. Алгоритм знаходження в зваженому графі $H = (V, U)$ максимального паросполучення $M_{opt}$ з мінімальною сумою ваг його ребер. $C = [c_{ij}]_n$ − симетрична матриця ваг ребер графа $H$, в якій $c_{ij} = c_{ji} \in R^+_0$, якщо $\{i, j\} \in U,\ i \neq j$, і $c_{ij} = c_{ji} = \infty$ інакше, $R^+_0$ − множина невід'ємних дійсних чисел. Розв'язання $M_{opt}$ взаємно однозначно відповідає максимальному паросполученню $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid i_l \neq j[i_l],\ l = \overline{1,k}\}$ дводольного зваженого графа $(X, Y, E),\ |X| = |Y| = |V|,\ E = 2|U|,\ i_l \in X,\ j[i_l] \in Y$, побудованого для матриці $C$.

У матриці $C$ знайти $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1,n}\}$, $i_1$ − номер першого за порядком рядка, що містить мінімальний елемент; $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}, I_1 = \{i_1\},\ J_1 = \{j[i_1]\}, I_1' = \{j[i_1]\} \subset X,\ J_1' = \{i_1\} \subset Y$, видалити всі ребра, інцидентні вершинам $j[i_1] \in I_1',\ i_1 \in J_1'$; $D_1$ – підграф, що містить ребро $[i_1\ j[i_1]],\ \langle D_1 \rangle = D_1,\ k = 1$.

S1. $k = k + 1$; якщо $k > \lfloor n/2 \rfloor$, то $M_{opt} = M_{k-1}$.

S2. Знайти $c_{i_k j[i_k]}$ за (3); якщо $c_{i_k j[i_k]} = \infty$, то кінець: $M_{opt} = M_{k-1}$; $M_k^1 = M_{k-1} \cup \cup\{[i_k, j[i_k]]\}$, обчислити $C(M_k^1)$.

S3. Для кожної вершини $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I_{k-1}'\}$ побудувати підграф $D_{i_k}$ і після перетворення його в допоміжний орграф $(Z_{i_k}, A_{i_k})$ знайти шлях $P_{i_k}$, найкоротший зі шляхів, що з'єднують вершину $i_k$ з вершинами $j_s \in Y - \{J_{k-1} \cup J_{k-1}'\} - \{j_k\}$. Кожна вершина $j_s$ є кінцем ребра $(i_l, j_s), i_l \in I_{k-1},\ l \in \{1,2,...,k-1\}$ вагою $c_{i_l j_s}$, що дорівнює (4). Визначити $M_{i_k}^2 = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ і $C(M_{i_k}^2)$. Якщо в графі $D_{i_k}$ не існує шляху $P_{i_k}$, то покласти $M_{i_k}^2 = \infty$. Із (5) знайти $M_k^2$ і $C(M_k^2)$; якщо для всіх $i_k$ $C(M_{i_k}^2) = \infty$, то $C(M_k^2) = \infty,\ M_k^2 = \varnothing$.

S4. Якщо $C(M_k^1) = C(M_k^2) = \infty$, то кінець: $M_{opt} = M_{k-1}$, інакше якщо $C(M_k^1) < C(M_k^2)$, то $M_k = M_k^1,\ I_k = I_{k-1} \cup \{i_k\}, J_k = J_{k-1} \cup \{j[i_k]\},\ I_k' = I_{k-1}' \cup \{i_k'\}, J_k' = J_{k-1}' \cup \{j_k'\}$, де вершини $i_k' \in X$ і $j_k' \in Y$ –– відображення відповідно кінця $j[i_k]$ і початку $i_k$ ребра $[i_k, j[i_k]]$; видалити ребра, інциденті вершинам $i_k'$ і $j_k'$, сформувати підграф $\langle D_k \rangle$, породжений множиною вершин $I_k \cup J_k$, і перейти до кроку S1, інакше $M_k = M_k^2$, визначити $I_k, J_k, I_k', J_k'$, видалити всі ребра, інцидентні вершинам множини $I_k' \cup J_k'$, і сформувати підграф $\langle D_k \rangle$, породжений множиною вершин $I_k \cup J_k'$, перейти до кроку S1.

Алгоритм представлений послідовністю ітерацій. Перша ітерація алгоритму завершується на кроці S0 знаходженням мінімального елемента в $C$, що утворює паросполучення $M_1$. Кожна наступна ітерація містить кроки S2–S4 для побудови паросполучення $M_k,\ k = \overline{2, |M_{opt}|}$ із мінімальною сумою $(M_k)$ ваг $k$ ребер.

*Теорема*. Після впорядкування за незменшенням значень елементів, розташованих над головною діагоналлю матриці вартостей $C = [c_{ij}]_n$ графа $H$, ЗЗП коректно розв'язується за час $O(n^3)$.

*Доведення*. Згідно з лемою, потрібно спочатку показати, що $M_k = M_k^2$, якщо $C(M_k^2) \le\ \le C(M_k^1)$. Дійсно, для кожної вільної вершини $i_k$ алгоритм будує підграф $D_{i_k}$, який містить множину всіх збільшуючих з $i_k$ шляхів щодо паросполучення $M_{k-1},\ k = \overline{2, |M_{opt}|}$, обирає серед них найкоротший шлях $P_{i_k}$ і визначає $M_{i_k}^2$ і $C(M_{i_k}^2)$. Коректність однократного звернення до $i_k$ слідує з наведеного в [1] доказу того, що якщо в графі не існує збільшуючого шляху з вільної вершини, то збільшуючого шляху з цієї вершини не існує на всіх наступних етапах побудови паросполучення.

Алгоритм закінчує роботу на $k$-ій ітерації. Якщо $k = \lfloor n/2 \rfloor$, то побудоване паросполучення $M_k$ максимальне. В іншому випадку не існує шляху з кожної вільної вершини $i_k$ у відповідному їй орграфі $(Z_{i_k}, A_{i_k})$ а в $D$ не існує збільшуючих шляхів щодо поточного паросполучення $M_{k-1}$. Звідси витікає, що $M_{k-1}$ максимальне [1].

Розв'язок $M_{opt}$ ЗЗП визначається із матриці $C$, що відповідає як дводольному, так і довільному графам $D = (X, Y, E)$ і $H = (V, U)$.

Оцінимо зверху час роботи алгоритму. Він максимальний, коли $n$-вершинний граф $H$ повний і, отже, $|M_{opt}| = \lfloor n/2 \rfloor$.

Якщо впорядкувати за незменшенням значення елементів, розташованих над головною діагоналлю матриці $C$, то для виконання кроку S0, який визначає $c_{i_1 j[i_1]}$, потрібен час

$O((n(n-1)/2)\log_2(n(n-1)/2))$.

Найбільша кількість операцій порівняння на кроці S2 $k$-ої ітерації, $k=\overline{2,\lfloor n/2\rfloor}$, що дорівнює $2(n-2(k-1))$, досягається на матриці $C$, в якій $c_{12}=c_{i_1j[i_1]}$, $c_{34}=c_{i_2j[i_2]}$, $\ldots$, $c_{2k-1,2k}=c_{i_kj[i_k]}$. Щоб визначити $\lfloor n/2\rfloor-1$ елементів матриці $C$, утворюючих разом з елементом $[i_1,j[i_1]]$ паросполучення $M_k^1$, $k=\lfloor n/2\rfloor$, необхідно виконати $t_1=2(n-2)+2(n-4)+\ldots+2(n-2(\lfloor n/2\rfloor-1))$ порівнянь. Отже $t_1=O(n^2)$.

Побудова графа $D_{i_k}$ на кроці S3 при $k=2$ потребує $n-4$ порівнянь для знаходження (4) і одну операцію додавання для обчислення $C(M_{i_k}^2)$. На цьому кроці при $k=2$ потрібно побудувати $n-2$ графів $D_{i_k}$, обчислити $n-2$ відповідних їм значень $C(M_{i_k}^2)$ і знайти (5). Тому $C(M_2^2)$ визначається в результаті виконання $(n-3)(n-2)+n-3=(n-2)^2-1$ операцій. Для знаходження (1) на кроці S4 потрібно одне порівняння. Таким чином, обчислення $C(M_2)$ і побудова виконуються за час $t_2=O(n^2)$.

Для $k=\overline{3,\lfloor n/2\rfloor}$ на кроці S3 потрібно побудувати $n-2(k-1)$ графів $D_{i_k}$. Граф $D_{i_k}$ будується в результаті виконання $n-2(k-1)-2$ порівнянь по знаходженню (4) для кожної з $k-1$ його вершин $i_l\in I_{k-1}$. Крім того, на кроці S3 він за час $c_1(k-1)$ перетворюється в орграф $(Z_{i_k},A_{i_k})$, в якому з трудомісткістю $c_2(k-1)^2$ знаходиться шлях $P_{i_k}$, його довжина $C(P_{i_k})$ і паросполучення $M_{i_k}^2$ вартістю $C(M_{i_k}^2)$, $c_1,c_2<k-1$. Щоб обрати $M_k$, достатньо $n-2(k-1)-1$ порівнянь для знаходження $C(M_k^2)$ та однієї операції порівняння $C(M_k^1)$ і $C(M_k^2)$, яка виконується на кроці S4. Крок S4 завершується формуванням графа $\langle D_k\rangle$ за час $c_3k$, $c_3<k$.

Визначимо кількість операцій $t_{k1}$, що виконуються на кроці S3, і кількість операцій $t_{k2}$, що виконуються на кроці S4, для $k=\overline{3,\lfloor n/2\rfloor}$.

$$t_{k1}=[n-2(k-1)][(k-1)(n-2k)+c_1(k-1)]+n-2(k-1)+c_3k,$$

$$t_{k2}=[n-2(k-1)]c_2(k-1)^2.$$

Оскільки для будь-якого $n$ і $k=\overline{3,\lfloor n/2\rfloor}$

$$[n-2(k-1)][(k-1)(n-2k)\le n^2,$$

$$[n-2(k-1)]c_1(k-1)\le[n-2(k-1)](k-1)^2\le n^2,$$

$$n-2(k-1)+c_3k\le n-2(k-1)+k^2=c_{k1}n,\ c_{k1}<n,$$

$$[n-2(k-1)]c_2(k-1)^2\le[n-2(k-1)](k-1)^3=c_{k2}n^2,\ c_{k2}<n,$$

то $t_{k1}\le 2n^2+c_{k1}n=O(n^2)$, $t_{k2}=O(n^2)$.

Трудомісткість виконання $\lfloor n/2\rfloor-1$ ітерацій, починаючи з другої, оцінюється кількістю елементарних дій, рівних сумі з $2\lfloor n/2\rfloor$ доданків,

$$t=t_1+t_2+\sum_{k=3}^{\lfloor n/2\rfloor}(t_{k1}+t_{k2}),$$

в якій кожен доданок обмежений поліномом другої степені. Тому $t=O(n^3)$.

*Приклад*. Для демонстрації роботи алгоритму вибраний приклад ЗЗП із [1] з матрицею вартостей повного графа

$C=$

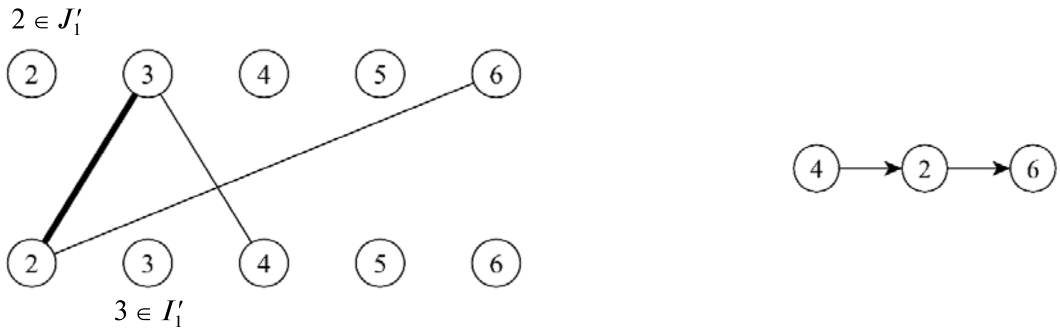
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\infty$ | 19 | 8 | 8 | 18 | 18 | 25 | 29 |
| 2 | 19 | $\infty$ | 0 | 8 | 10 | 4 | 15 | 18 |
| 3 | 8 | 0 | $\infty$ | 4 | 8 | 2 | 15 | 18 |
| 4 | 8 | 8 | 4 | $\infty$ | 2 | 10 | 15 | 16 |
| 5 | 18 | 10 | 8 | 2 | $\infty$ | 10 | 22 | 25 |
| 6 | 18 | 4 | 2 | 10 | 10 | $\infty$ | 19 | 19 |
| 7 | 25 | 15 | 15 | 15 | 22 | 19 | $\infty$ | 37 |
| 8 | 29 | 18 | 18 | 16 | 25 | 19 | 37 | $\infty$ |

S0. $c_{23} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, 8}\} = 0,\ M_1 = \{[2,3]\},\ I_1 = \{2\},\ J_1 = \{3\}, I_1' = \{3\},\ J_1' = \{2\},\ C(M_1) = = c_{23} = 0$. В графі $D$ видаляються ребра, що інцидентні вершинам $3 \in I_1'$ і $2 \in J_1'$, що утворюють підграф.

S1. $k = 2$.

S2. $c_{45} = \min\{c_{ij} \mid i, j \neq 2, 3\} = 2,\ M_2^1 = M_1 \cup \{[4,5]\} = \{[2,3], [4,5]\},\ C(M_2^1) = 2$.

S3. Для вершин 1, 4, 5, 6, 7, 8, що утворюють множину $X - (I_1 \cup I_1')$, будують підграфи $D_1, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$ і відповідні їм орграфи, в яких виконується пошук найкоротших збільшуючих шляхів $P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ щодо паросполучення $M_1$. Для кожного шляху $P_i$, $i \in X - (I_1 \cup I_1')$, якщо він існує, визначається паросполучення $M_i^2$ і його вартість $C(M_i^2)$. На рисунку 5, *а* зображено підграф $D_4$, на рисунку 5, *б* – допоміжний орграф $(Z_4, A_4)$. Єдине ребро $(2,6)$ в $D_4$ утворює підмножину вільних ребер $E_4^3$. Його вага $c_{26} = 4$ визначається із (4), $Y_4^1 = \{6\}$. Множина ребер $\{(4,3),[2,3],(2,6)\}$ шляху $P_4 = (4,2,6) \in (Z_4, A_4)$ і паросполучення $M_1 = \{[2,3]\}$ утворюють паросполучення $M_4^2 = \{[4,3],[2,6]\}$ вартістю $C(M_4^2)$, отриманою з (5). Таким чином, $M_2^2 = M_4^2,\ C(M_2^2) = c_{43} + c_{16} = 4 + 4 = 8$.

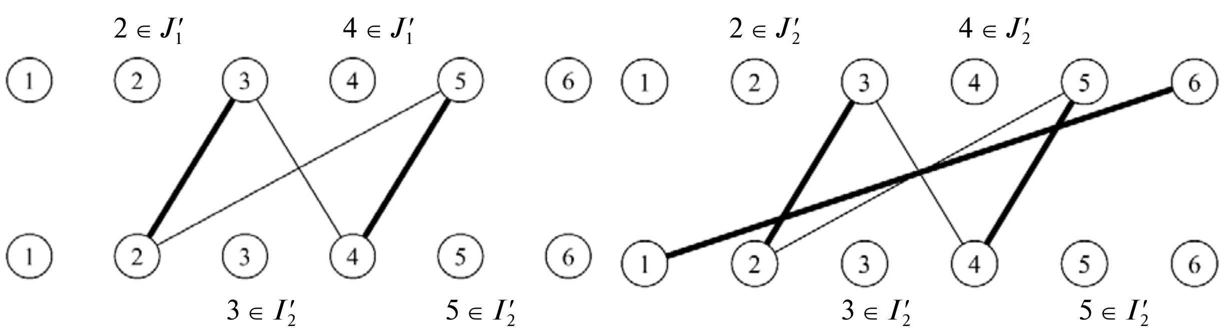



*а)* *б)*

*Рис. 5*

S4. Оскільки $M_2^1 < M_2^2$, до підграфа $D_1$ додається ребро $[4,5]$, $I_2 = \{2,4\}$, $J_2 = \{3,5\}$, $I_2' = \{3,5\}$, $J_2' = \{2,4\}$, видаляються ребра, інцидентні вершинам $5 \in I_2'$, $4 \in J_2'$. В результаті побудований підграф $\langle D_2 \rangle$, породжений множиною вершин $I_2$ і $J_2$ (рис. 6, *а*).

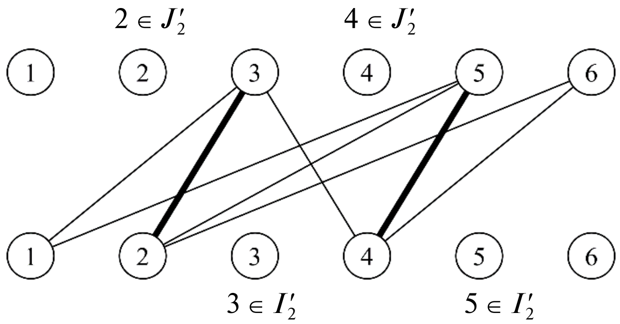
$k = 3$. По формулі (2) знаходиться $c_{16} = \min\{c_{ij} \mid i, j \neq 2, 3, 4, 5\} = 18$, $M_3^1 = M_2 \cup \{[1,6]\}$, $C(M_3^1) = c_{23} + c_{45} + c_{16} = 0 + 2 + 18 = 20$ (рис. 6, *б*).

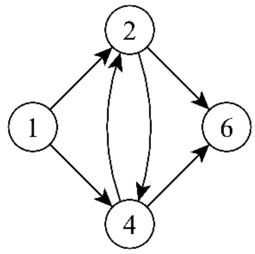



*а)* *б)*

*Рис. 6*

Щоб визначити $M_3^2$, для вершин $i_k \in X-(I_3 \cup I_3') = \{1,6,7,8\}$ формуються підграфи $D_{i_k}, \langle D_2 \rangle \subset D_{i_k}$, в яких за допомогою орграфів $(Z_{i_k}, A_{i_k})$ знаходяться найкоротші збільшуючі шляхи $P_{i_k}$ щодо паросполучення $M_2$, паросполучення $M_{i_k}^2$ і їх вартості $C(M_{i_k}^2)$. Підграф $D_1$ (рис. 7,а) містить найкоротший збільшуючий шлях щодо $M_2$,, який відповідає шляху $P_1 = (1,2,6)$ в орграфі $(Z_1, A_1)$ (рис. 7, *б*) і доставляє вартість паросполучення $M_1^2$, не більшу за вартості паросполучень $M_6^2, M_7^2, M_8^2$. Оскільки $P_1 = \{(1,3),[2,3],(2,6)\}$, $M_2 = \{[2,3], [4,5]\}$, то $M_1^2 = \{[1,3],[4,5],[2,6]\}$, $C(M_1^2) = c_{13} + c_{45} + c_{26} = 8+2+4 = 14$, $C(M_3^2) = C(M_1^3)$.

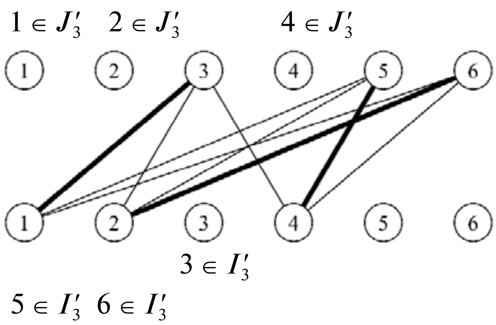


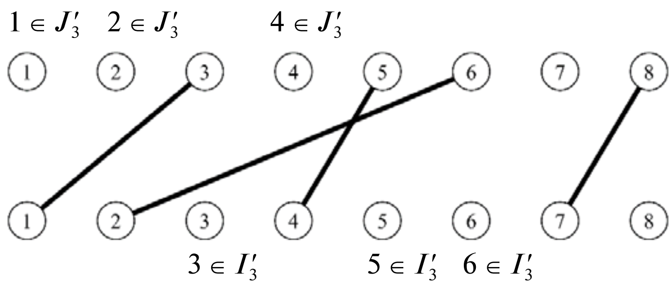




*а)* *б)*

*Рис. 7*

У цьому випадку $C(M_3^2) < C(M_1^3)$, $M_3 = M_3^2$, $I_3 = \{1,4,2\}$, $J_3 = \{3,5,6\}$, $I_3' = \{3,5,6\}$, $J_3' = \{1,4,2\}$. Видаляються ребра, що інцидентні вершинам множини $I_3'$ і $J_3'$. На рисунку 8, *а* зображено підграф $\langle D_3 \rangle$, породжений множиною вершин $I_3$ і $J_3$.




*а)* *б)*

*Рис. 8*

$k = 4$. Тут $c_{78} = \min\{c_{ij} \mid i,j \neq 1,2,3,4,5,6\} = 37$, $M_4^1 = \{[1,\ 3],\ [2,6],\ [4,5],\ [7,8]\}$, $C(M_4^1) =$ $= 3+4+2+37 = 51$ (рис. 8, *б*).

Знаходження паросполучення $M_3^2$ розпочинається з побудови для вершин множини $X-(I_3 \cup I_3') = \{7,8\}$ підграфів $D_7, D_8$ і відповідних їм орграфів $(Z_7, A_7)$, $(Z_8, A_8)$. На рисунку 9, *а* зображено підграф $D_8$, а на рисунку 9, *б* − орграф $(Z_8, A_8)$.

Шлях $P_8 = (8,2,7)$ в орграфі $(Z_8, A_8)$ є найкоротшим. У підграфі $D_8$ він представлений як найкоротший збільшуючий шлях $P_8 = ((8,\ 6),\ [2,\ 6],\ (2,\ 7))$ щодо паросполучення $M_3$. З $M_8^2 = P_8 \oplus M_3 = \{[1,3],\ [2,7],\ [4,5],\ [8,6]\}$ отримаємо, що $C(M_8^2) = c_{13} + c_{27} + c_{45} + c_{86} = 8+15++2+19 = 44$. Після знаходження в графі $D_7$ шляху $P_7$, паросполучення $M_7^2$ та його вартості $C(M_7^2)$ виявляється, що $C(M_7^2) > C(M_8^2) = 44$. Звідси слідує, що $M_4^2 = M_8^2$, а оскільки $C(M_4^2) < C(M_4^1)$, то $M_4 = M_8^2$. Оскільки $k = \lfloor n/2 \rfloor = 4$, паросполучення $M_4 = \{[1,3],[2,7],[4,5],[8,6]\}$ максимальне і, отже, є розв'язком ЗЗП.

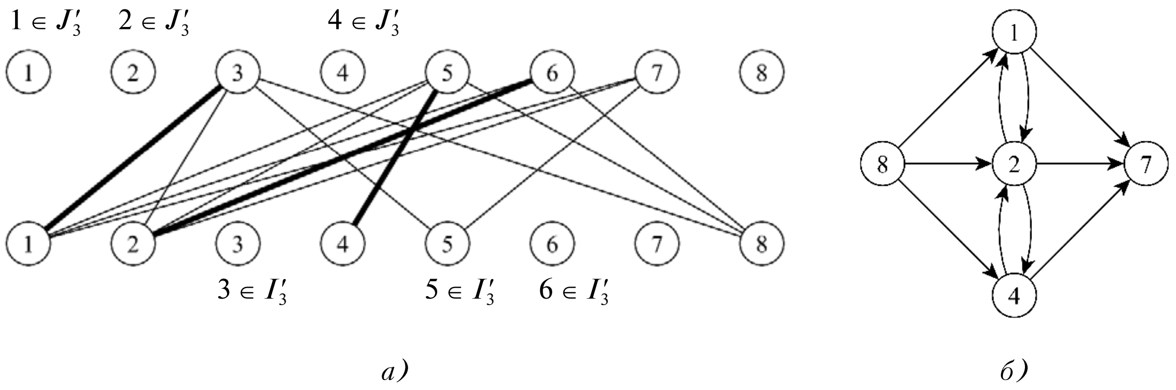



*Рис. 9*

**Висновки.** У даній роботі запропонований метод розв'язання поставленої ЗЗП, який коректно виконує дії з побудови шуканого паросполучення в дводольному графі, що відповідає графу $H$. Тому він не містить непростих операцій знаходження і зрізання квіток, які використовуються в алгоритмі Едмондса та його модифікаціях.

**Список використаної літератури:**


1. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация : Алгоритмы и сложность / *Х.Пападимитриу, К.Стайглиц.* – М. : Мир, 1985. – 510 с.
2. *Ловас Л.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / *Л.Ловас, М.Пламмер.* – М. : Мир, 1998. – 653 с.
3. *Харари Ф.* Теория графов / *Ф.Харари.* – М. : Мир, 1973. – 300 с.
4. *Маций О.Б.* Быстрый алгоритм нахождения 2-фактора минимального веса / *О.Б. Маций, А.В. Морозов, А.В. Панишев* // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – Т. 52, № 4. – С. 119–127.
5. *Касьянов В.Н.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / *В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев.* – С-Пб. : БХВ-Петербург, 2003. – 1104 с.
6. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / *Н.Кристофидес.* – М. : Мир, 1978. – 432 с.
7. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / *Э.Майника.* – М. : Мир, 1981. – 323 с.
8. *Нечипуренко М.И.* Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / *М.И. Нечипуренко, В.К. Попков, С.М. Маймагалиев* и др. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1990. – 515 с.
9. *Свами Т.* Графы, сети, алгоритмы / *Т.Свами, К.Тхуласараман.* – М. : Мир, 1984. – 454 с.
10. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / *Т.Саати.* – М. : Мир, 1973. – 330 с.


КУШНІР Надія Олександрівна – аспірантка кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– дискретна та комбінаторна оптимізація.

Тел.: (099)7775720.

МАЦІЙ Ольга Борисівна – аспірантка Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Наукові інтереси:

- обчислювальні методи;
- математичне моделювання.

Тел.: (066)8211295.

СКАЧКОВ Володимир Олександрович – старший викладач кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- дискретна та комбінаторна оптимізація;
- штучний інтелект.

Тел.: (067)1194478.

Стаття надійшла до редакції 06.11.2015.