

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОГО МЕТОДУ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ІЗ ДЕКОМПОЗИЦІЄЮ

Проведено експериментальне дослідження точного методу розв'язання загальної задачі комівояжера (ЗЗК) із декомпозицією вхідного графа на блоки. Показано зменшення часу роботи методу залежно від кількості блоків. ЗЗК великої розмірності можуть бути розбиті на підзадачі меншої розмірності, що відповідають блокам у графах. Цей підхід дозволяє знизити вимоги до обчислювальних засобів, виконувати підзадачі паралельно, що призведе до виграшу в часі виконання. Вартості обходів комівояжера для мостів та лісу дерев є константами. Знайдені у блоках маршрути об'єднуються в єдиний маршрут за поліноміальний час. Декомпозиція ЗЗК суттєво стримує зріст часу розв'язання, залежно від розмірності вхідного графа, та кількості блоків у ньому, але складність ЗЗК залишається експоненціальною. Якщо граф не містить блоків, час роботи методу не відрізняється від класичного варіанта алгоритму Літла, за виключенням поліноміального часу, що витрачено на пошук можливостей декомпозиції. Досліджено частоту з'явлення блоків, суттєвих для декомпозиції ЗЗК, тобто: ліса, мостів, точок зчленування. Той факт, що існують випадки, коли сам граф є блоком, не враховувався.

Ключові слова: загальна задача комівояжера; точний метод; декомпозиція графа.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Задача пошуку замкнутого маршруту, що проходить по всіх вершинах графа, та має мінімальну сумарну вартість ребер, називається загальною задачею комівояжера (ЗЗК) [1]. ЗЗК є актуальною для керування транспортними потоками, при проектуванні нових мереж і модернізації їх ділянок, та має експоненційну складність.

Довільна транспортна мережа може бути представлена у виді графа $H=(V,U)$, де U, V – множина ребер и вершин. Пункт мережі i відповідає вершині $i \in V$, а ділянка дороги, що з'єднує i та j , відповідає ребру $\{i, j\} \in U$, йому приписана дійсна невід'ємна вага d_{ij} .

Розглянемо три складові графа, що характеризують його зв'язність: точку зчленування, міст, підмножина висячих, або кінцевих, вершин. Вершина, видалення якої перетворює зв'язний граф у незв'язний називається точкою зчленування, а ребро з такою ж властивістю – мостом. Зв'язний, непустий підграф графа H , що не має точок зчленування, має назву блок [2]. Непуста підмножина висячих вершин графа H утворює підграф $H'=(V',U')$ у вигляді лісу [3, 4].

Видаливши з графа H всі мости та всі дерева, крім кореневих вершин, отримаємо підграф, кожна компонента зв'язності якого може бути точкою зчленування, блоком, або підграфом, який також може бути розбитий на компоненти. Якщо побудувати для кожної компоненти маршрут комівояжера, який починається і закінчується у вершині, що інцидентна мосту, то розв'язок ЗЗК для графа H буде результатом об'єднання всіх послідовних маршрутів.

Довільний розв'язок ЗЗК для дерева має вартість, що дорівнює подвоєній сумі ваг ребер. Для виділення дерев лісу H' використовується варіант алгоритму, що запропонований в [5], з часом роботи $O(n \log n)$. Позначимо множину кореневих вершин дерев K , а дерево лісу, що має коренем вершину k , як τ'_k , $k \in K$, а l -ую компоненту зв'язності підграфа позначимо τ'_l .

Множину всіх мостів M в підграфі $\langle S \rangle$, породженому множиною вершин $S=(V-V') \cup K$ знаходять за алгоритмом пошуку в глибину за час $O(|S|+|V|-|V'|)$ [6, 7].

Вартість [8, 9, 10] маршруту комівояжера τ дорівнює:

$$C(\pi) = \sum_{k=1}^{|K|} C(\tau'_k) + 2 \sum_{m=1}^s C(M_m) + \sum_{l=1}^{s+1} C(\tau'_l).$$

Аналіз останніх досліджень та публікацій. ЗЗК майже не висвітлена у роботах інших науковців, точний метод ЗЗК вперше представлено автором. При роботі над методом було

використано досягнення наступних відомих українських вчених, які досліджують задачі комівояжера та її різновидів: д.т.н., проф. Гребеннік І.В., д.ф.-м.н., проф. Ємець О.М., д.т.н., проф. Панішев А.В.

Постановка завдання. Метою даної публікації є порівняльне експериментальне дослідження методу розв'язання ЗЗК із використанням декомпозиції графів та без неї для оцінки ефективності, переваг та слабких сторін підходу.

Викладення основного матеріалу. Як вхідні дані використовувались випадково згенеровані графи. Платформою для обчислень обрано ЕОМ на базі процесора Intel Core 2 Quad Q9000 с тактовою частотою 2,0 ГГц та об'ємом оперативної пам'яті 4 Гб

Дослідження топології випадково згенерованих графів. Досліджено частоту з'явлення блоків, суттєвих для декомпозиції ЗЗК, тобто: ліса, мостів, точок зчленування. Той факт, що існують випадки, коли сам граф є блоком, не враховувався. Як вхідні дані використано випадково згенеровані графи розмірністю $n = \{50, 100, 200\}$ та коефіцієнтом заповнювання ребрами $K_3 = 0,1, 1$, серіями по 1000 графів для кожного значення вказаних вище параметрів.

Експериментально визначено значення n і K_3 , за яких вхідні дані містять найбільшу та найменшу кількість блоків, що, відповідно, забезпечує найкращі, та найгірші умови для декомпозиції ЗЗК. Результати експерименту наведено в таблиці 1 та на рисунку 1.

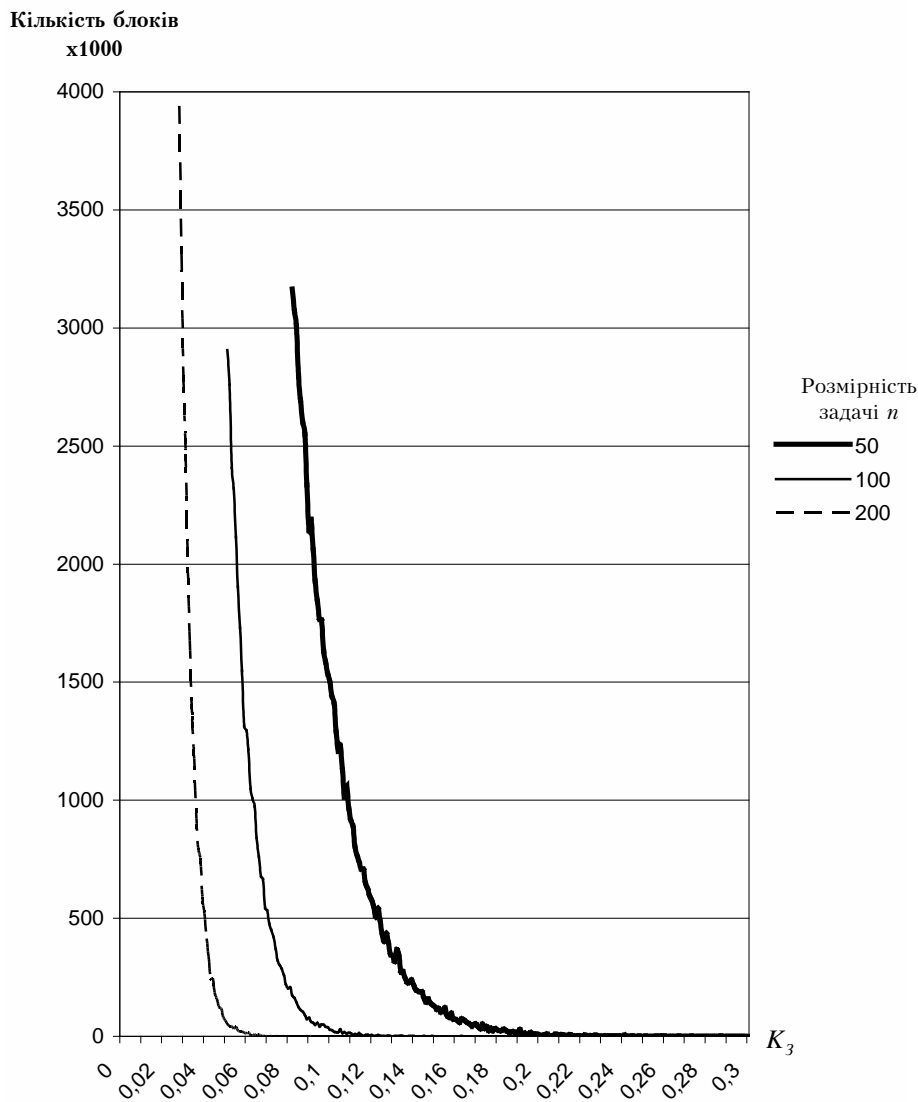


Рис. 1. Кількість блоків у випадково згенерованих графах, одиниць на 1000 графів.

Таблиця 1

Частота з'явлення блоків у випадково згенерованих графах,
одиниць на 1000 графів

K_3	Розмірність задачі			K_3	Розмірність задачі			K_3	Розмірність задачі		
	50	100	200		50	100	200		50	100	200
0,028	-	-	3940	0,084	3011	145	0	0,14	219	1	0
0,029	-	-	3314	0,085	2794	124	0	0,141	198	0	0
0,03	-	-	2800	0,086	2695	112	0	0,142	193	0	0
0,031	-	-	2464	0,087	2602	105	0	0,143	189	0	0
0,032	-	-	1988	0,088	2550	89	0	0,144	188	0	0
0,033	-	-	1676	0,089	2336	73	0	0,145	162	1	0
0,034	-	-	1355	0,09	2142	79	1	0,146	145	0	0
0,035	-	-	1204	0,091	2189	62	0	0,147	159	0	0
0,036	-	-	946	0,092	2060	57	0	0,148	143	0	0
0,037	-	-	801	0,093	1929	49	0	0,149	134	1	0
0,038	-	-	756	0,094	1844	57	0	0,15	128	0	0
0,039	-	-	583	0,095	1766	42	0	0,151	115	0	0
0,04	-	-	519	0,096	1763	50	0	0,152	118	0	0
0,041	-	-	413	0,097	1631	49	0	0,153	103	0	0
0,042	-	-	339	0,098	1584	41	0	0,154	108	0	0
0,043	-	-	243	0,099	1535	38	0	0,155	120	0	0
0,044	-	-	247	0,1	1505	28	0	0,156	89	0	0
0,045	-	-	179	0,101	1440	26	0	0,157	81	0	0
0,046	-	-	153	0,102	1407	19	0	0,158	97	0	0
0,047	-	-	124	0,103	1290	17	0	0,159	73	0	0
0,048	-	-	116	0,104	1208	18	0	0,16	72	0	0
0,049	-	-	82	0,105	1232	30	0	0,161	67	0	0
0,05	-	-	67	0,106	1128	13	0	0,162	60	0	0
0,051	-	2906	52	0,107	1014	17	0	0,163	73	1	0
0,052	-	2760	44	0,108	1059	12	0	0,164	71	0	0
0,053	-	2407	42	0,109	965	15	0	0,165	63	0	0
0,054	-	2320	32	0,11	916	14	0	0,166	57	0	0
0,055	-	2115	41	0,111	891	5	0	0,167	51	0	0
0,056	-	1905	24	0,112	805	10	0	0,168	43	0	0
0,057	-	1730	20	0,113	766	8	0	0,169	51	0	0
0,058	-	1548	21	0,114	740	13	0	0,17	52	0	0
0,059	-	1314	15	0,115	709	7	0	0,171	39	0	0
0,06	-	1296	12	0,116	707	2	0	0,172	33	0	0
0,061	-	1215	16	0,117	650	6	0	0,173	51	0	0
0,062	-	1049	6	0,118	626	7	0	0,174	34	0	0
0,063	-	1007	3	0,119	596	4	0	0,175	41	0	0
0,064	-	973	8	0,12	576	5	0	0,176	25	0	0
0,065	-	840	3	0,121	550	2	0	0,177	34	0	0
0,066	-	762	7	0,122	505	3	0	0,178	25	0	0
0,067	-	677	1	0,123	542	5	0	0,179	32	0	0
0,068	-	665	3	0,124	492	3	0	0,18	28	0	0
0,069	-	542	0	0,125	431	2	0	0,181	24	0	0
0,07	-	534	1	0,126	403	2	0	0,182	24	0	0
0,071	-	477	2	0,127	436	1	0	0,183	30	0	0
0,072	-	452	0	0,128	399	3	0	0,184	27	0	0
0,073	-	422	2	0,129	347	2	0	0,185	21	0	0
0,074	-	370	0	0,13	340	0	0	0,186	18	0	0
0,075	-	321	0	0,131	317	1	0	0,187	19	0	0
0,076	-	301	1	0,132	368	1	0	0,188	19	0	0
0,077	-	286	2	0,133	346	1	0	0,189	12	0	0
0,078	-	259	0	0,134	272	3	0	0,19	18	0	0
0,079	-	219	0	0,135	274	1	0	0,191	28	0	0
0,08	-	203	0	0,136	247	0	0	0,192	17	0	0
0,081	-	207	0	0,137	228	0	0	0,193	4	0	0
0,082	3165	173	0	0,138	229	1	0	0,194	0	0	0
0,083	3072	163	0	0,139	239	1	0	0,195	0	0	0

Дослідження часу роботи точного методу ЗЗК із декомпозицією. Виконано порівняльний аналіз часу виконання точного методу ЗЗК із декомпозицією та без, залежно від порядку вхідних даних $n = \overline{25, 50}$ та коефіцієнта заповнення графа K_3 . Вхідні дані випадково згенеровані серіями по 100 графів для кожного із вказаних параметрів. Значення $K_3 = \{0,09, 0,25\}$ обрано за даними попереднього етапу досліджень для забезпечення найкращих (найбільша кількість блоків) та найгірших (найменша кількість блоків) умов декомпозиції.

Час роботи точних методів ЗЗК порівняно за допомогою величини $T = \frac{t_L}{t_{DL}}$, де t_L – час роботи ЗЗК на базі методу Літла, t_{DL} – час роботи ЗЗК на базі методу Літла із декомпозицією. Результати обчислювального експерименту наведено в таблиці 2 та на рисунку 2.

Таблиця 2

Порівняння точних методів розв'язання ЗЗК

Розмірність задачі n	T	
	$K_3 = 0,09$	$K_3 = 0,25$
25	2,00	1,00
30	2,09	0,96
35	3,53	0,97
40	4,67	0,98
45	3,81	0,98

Слід зазначити, що у найгіршому випадку декомпозиції, коли сам граф був блоком ($K_3 = 0,25$), час роботи обох методів суттєво не відрізнявся.

Дослідження часу роботи точного методу ЗЗК із декомпозицією залежно від кількості блоків. Проведено дослідження часу роботи точного методу ЗЗК із декомпозицією від кількості блоків, що містяться у вхідних графах. У обчислювальному експерименті використано випадкові графи спеціального вигляду, в яких $n = \overline{20, 80}$ та $m = \{2, 4\}$, де m – кількість блоків, що об'єднані точкою зчленування. Результати обчислень наведено у таблицях 3, 4, та на рисунку 3.

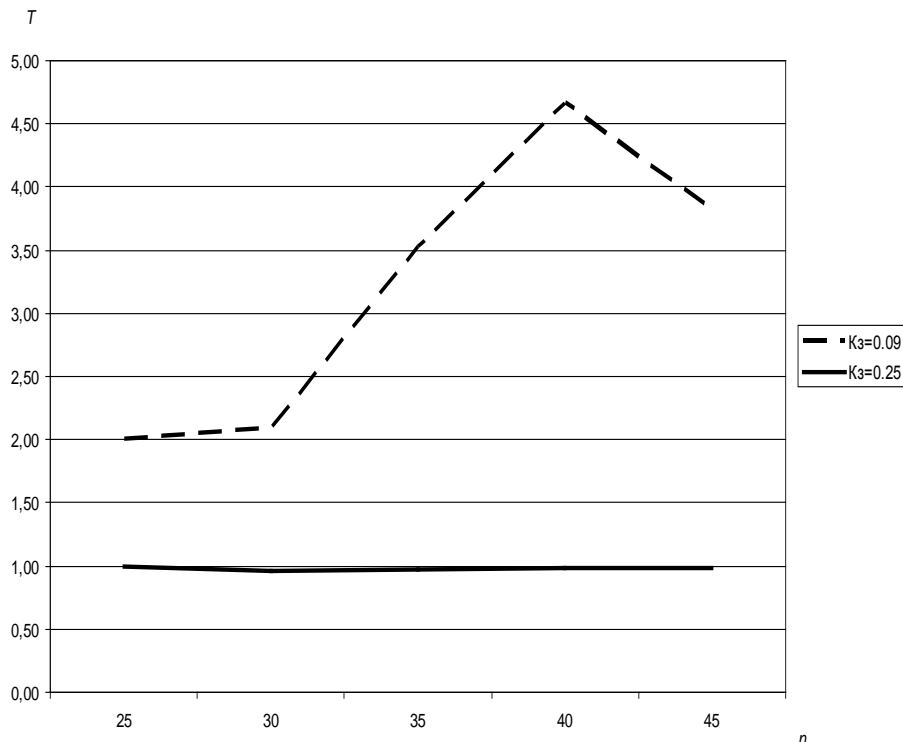


Рис. 2. Порівняння точних методів ЗЗК

Таблиця 3

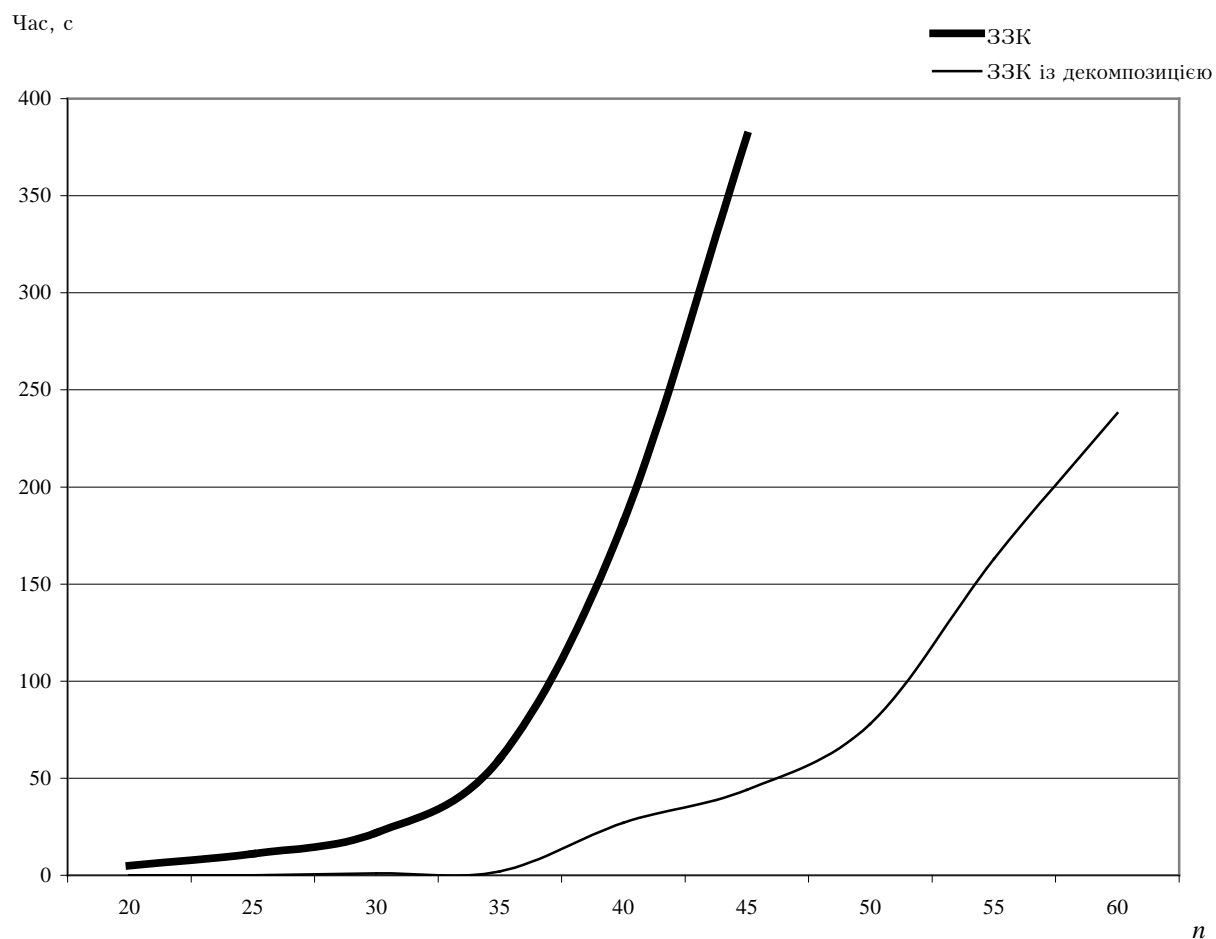
Залежність часу точного розв'язання ЗЗК із декомпозицією при $m = 2$, с

Розмірність задачі	Метод ЗЗК	Метод ЗЗК із декомпозицією
20	5	<1
25	11	<1
30	22	1
35	60	2
40	182	27
45	381	44
50	-	78
55	-	163
60	-	354

Таблиця 4

Залежність часу точного розв'язання ЗЗК із декомпозицією при $m = 4$, с

Розмірність n	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
ЗЗК із декомпозицією	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	8	11
ЗЗК	5	12	23	62	184	390	-	-	-	-	-	-	-

Рис. 3. Час точного розв'язання ЗЗК із декомпозицією при $m = 2$

Висновки. ЗЗК великої розмірності можуть бути розбиті на підзадачі меншої розмірності, що відповідають блокам у графах. Цій підхід дозволяє знизити вимоги до обчислювальних засобів, виконувати підзадачі паралельно, що призводить до виграшу в часі виконання. Вартості обходів комівояжера для мостів та лісу дерев є константами. Знайдені у блоках маршрути об'єднуються в єдиний маршрут за поліноміальний час.

Графи з великою щільністю заповнення ребрами містять порівняно мало блоків та при $K_3 = K_3^{min}$ граф сам є блоком. Величина K_3^{min} залежить від розміру графа n .

Максимальна кількість блоків міститься в графах із коефіцієнтом заповнення $K_3 = K_3^{max}$, який також залежить від n . Жодний з випадково отриманих графів із $K_3 < K_3^{max}$ не був зв'язним.

Декомпозиція ЗЗК суттєво стримує зріст часу розв'язання залежно від розмірності вхідного графу, при наявності блоків у ньому, але складність ЗЗК залишається експоненціальною.

Якщо граф не містить блоків, час роботи методу не відрізняється від класичного варіанта алгоритму Літла, за виключенням часу, що витрачено на пошук можливостей декомпозиції.

Список використаної літератури:

1. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / *Э.Майника.* – М. : Мир, 1981. – 323 с.
2. *Харари Ф.* Теория графов / *Ф.Харари.* – М. : Мир, 1973. – 300 с.
3. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети / *А.В. Панишев, А.В. Морозов.* – Житомир : ЖДТУ, 2014. – 315 с.
4. Information Models of Knowledge, ITNEA, Kiev-Sopfia 2010(KDS 2010). Anatoliy Panishev, Anton Levchenko. Cycle routes optimization for not full graph. – P. 435–441.
5. *Левченко А.Ю.* Приближенное решение общей задачи коммивояжера / *А.Ю. Левченко* // Информатика та системні науки (ІСН-2011) : матер. Всеукр. науково-практ. конф. (м. Полтава, 17–19 берез.). – Полтава, 2011. – С. 160–163.
6. *Рейнгольд Э.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / *Э.Рейнгольд, Ю.Нивергельт, Н.Део.* – М. : Мир, 1980. – 476 с.
7. *Левченко А.Ю.* Декомпозиція загальної задачі комівояжера та наближений метод її розв'язку / *А.Ю. Левченко* // Вісник Житомирського держ. технол. ун-ту. – Житомир, 2011. – С. 134–142.
8. *Левченко А.Ю.* Декомпозиція общей задачі коммивояжера для транспортных сетей / *А.Ю. Левченко, И.В. Гаращенко* // Труды XI междунар. научно-практ. конф. «Современные информационные и электронные технологии» (г. Одесса, 24–28 мая 2010 г.). – Т. 1. – Одесса, 2010. – С. 31.
9. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / *А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый.* – Житомир : ЖГТУ, 2006. – 300 с.
10. *Панишев А.В.* Оптимизация замкнутых маршрутов на транспортной сети / *А.В. Панишев, А.Ю. Левченко, О.Б. Мацый* // Штучний інтелект. ІІІІ МОН і НАН України «Наука і освіта». – Донецьк, 2010. – С. 43–49.

ЛЕВЧЕНКО Антон Юрійович – кандидат технічних наук, асистент кафедри ПЗС Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- комп'ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2015