

# ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА, ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ

УДК 621.914

Г.М. Виговський, к.т.н., проф.

О.А. Громовий, к.т.н., доц.

Житомирський державний технологічний університет

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО КОЕФІЦІЄНТА ДИНАМІЧНОСТІ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ГЛИБИННОМУ ТОРЦЕВОМУ ФРЕЗЕРУВАННІ

*Розглянуто особливості динаміки глибокого торцевого фрезерування з величинами припусків 6–8 мм. Проаналізовано періоди врізання інструменту в заготовку і виходу з зони різання. Побудовано математичний апарат для визначення мінімуму коефіцієнта динамічності технологічної системи. Отримані аналітичні залежності для визначення закону навантаження ріжучого елемента інструмента. Встановлені закономірності впливу геометричних параметрів торцевих фрез на стабільність обробки з мінімізацією динамічного впливу на інструмент в умовах глибокої обробки.*

**Ключові слова:** торцеве фрезерування; схеми різання; якість обробки; коефіцієнт динамічності; геометричні параметри.

За часом і умовами контактування ріжучого леза із заготовкою розрізняють безперервне, переривчасте і нестационарне різання. Перший вид характеризується безперервним контактом робочих поверхонь леза із заготовкою при постійних умовах різання. Переривчастий процес різання здійснюється шляхом періодичного контакту різального леза з заготовкою. Обробка поверхонь на верстатах при безперервній і одночасній зміні декількох параметрів: діаметра заготовки, глибини різання, швидкості обробки і кутів різання називається нестационарним різанням.

Розширення областей використання лезового інструменту, оснащеного вставками з надтвердих матеріалів (НТМ) є одним із основних напрямків підвищення продуктивності та інтенсифікації обробки металів різанням. Одним із таких напрямків можна виділити збільшення величини припуску, що знімається, за рахунок використання прогресивних конструкцій ріжучих інструментів. Так при торцевому фрезеруванні використання спіральноступінчастих схем різання дозволяє зрізати до 6–8 мм припуску, при обробці сірого та високоміцних чавунів [1]. Збільшення величини припуску призводить до підвищення динамічного навантаження на технологічну систему (ТС) внаслідок росту сил різання.

Мета роботи полягає в побудові математичного апарату для визначення мінімуму коефіцієнта динамічності технологічної системи при нестационарній обробці деталей торцевими фрезами, оснащеними НТМ.

Робота пов'язана з виконанням НДР Житомирського державного технологічного університету «Синтез способів формоутворення плоских поверхонь деталей реалізацією концепцій нестационарних процесів та урівноваження складових сил різання» РК №0115U002547.

Питанням забезпечення якісної та продуктивної обробки плоских поверхонь деталей машин торцевим фрезеруванням питанням присвячено велику кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених [1–12].

Дослідженнями [1] встановлена наявність адгезійно-механічного процесу зносу ріжучих вставок з НТМ, при чому механічний фактор зносу в найбільшій мірі пов'язаний з моментом врізання інструменту в заготовку, тобто з моментами динамічного навантаження ріжучого леза. Дані навантаження враховуються коефіцієнтом динамічності, під яким розуміють абсолютну величину відношення максимальної динамічної деформації ТС до максимальної статичної, і який згідно з [2] для торцевого фрезерування складає близько 1,5–1,7. В роботі [2] були визначені величини коефіцієнтів динамічності при характерних видах навантаження. Вказані негативні моменти потребують знаходження шляхів їх розв'язання, серед яких можна виділити

визначення раціональної геометрії ріжучої частини інструменту, яка б забезпечувала мінімізацію динамічних впливів при зрізанні різальних ножів у заготовку. Рядом робіт [3, 4] показана можливість мінімізації коефіцієнту динамічності для загального випадку. Для аналізу динаміки торцевого фрезерування була побудована [5] спрощена математична модель ТС, яка знаходиться під дією сумарних пружної та дисипативної сил, а також сили різання, в даному випадку колової сили. Ця сила була прийнята як основа для побудови математичної моделі динаміки торцевого фрезерування, через її великі значення порівняно з радіальною та осьювою, згідно з [1] вона перевищує останні в 1,6–2,1 раза.

Припустимо, що колова сила  $Q$  змінюється з часом за певним законом  $f(t/T_0)$  і через деякий період  $T_0$  сягає сталого значення  $Q_0$ . Тобто:

$$Q(t/T_0) = \begin{cases} Q_0 f(t/T_0); & (0 \leq t/T_0 \leq 1) \\ Q_0; & (t/T_0 \geq 1) \end{cases} \quad (1)$$

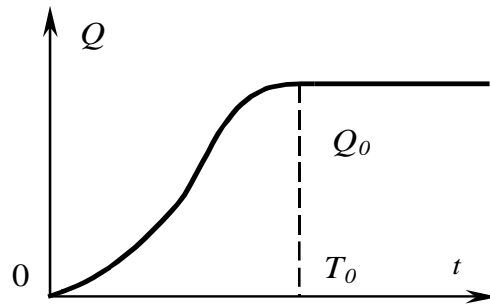


Рис. 1. Схема дії сили, що навантажує технологічну систему

Тут монотонно зростаюча функція  $f(t/T_0)$  задовольняє умовам:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Спробуємо знайти такий закон навантаження системи, за якого коефіцієнт динамічності мав би мінімум для заданої тривалості навантаження  $T_0$ .

Відомо, що при миттєвому навантаженні ( $T_0 = 0$ ) коефіцієнт динамічності дорівнює двом, а при повільному навантаженні ( $T_0 \rightarrow \infty$ ) – одиниці.

Коефіцієнт динамічності визначається як відношення максимальної динамічної деформації ТС  $U_{\max}$  до статичної деформації  $U$ :

$$k = \frac{U_{\max}}{U}.$$

Відомо [6], також, що динамічна деформація системи при нульових початкових умовах визначається за формулою:

$$U = \frac{1}{m\lambda^2} \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \lambda Q(t/T_0) \sin \lambda(t-\tau) d\tau, \quad \lambda^2 = \frac{c}{m} - b^2 \quad (2)$$

де:  $m$  – приведена маса,  $\lambda$  – кругова частота,  $c$  – приведена жорсткість,  $2b$  – параметр опору, віднесений до одиниці маси.

Нехай закон навантаження  $f(t/T_0)$  і величини  $\lambda \cdot T_0$  такі, що переміщення  $U$ , обумовлене за формулою (2), для значень  $0 \leq t/T_0 \leq 1$  не має максимуму. Виконання цієї умови буде перевірено для функції  $f(t/T_0)$ , яку потрібно визначити. При зроблених припущеннях формула буде дорівнювати:

$$U = \frac{Q_0}{2m \cdot i \cdot \lambda^2} \left\{ \begin{aligned} & \left( e^{(b-i\lambda)\tau} \cdot e^{-(b+i\lambda)t} - e^{(b+i\lambda)\tau} \cdot e^{-(b+i\lambda)t} \right) \lambda \cdot f(t/T_0) d\tau + \\ & \int_0^{T_0} + \frac{2 \cdot i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 + b^2} + \frac{\lambda}{b + i \cdot \lambda} e^{(b+i\lambda)T_0} \cdot e^{-(b+i\lambda)t} - \\ & - \frac{\lambda}{b - i \cdot \lambda} e^{(b-i\lambda)T_0} \cdot e^{-(b+i\lambda)t} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Позначимо:

$$J_1 = e^{(b+i\cdot\lambda)T_0} - \int_0^{T_0} (b+i\cdot\lambda)e^{(b+i\cdot\lambda)\tau} \cdot f(\tau/T_0) d\tau ;$$

$$J_2 = e^{(b-i\cdot\lambda)T_0} - \int_0^{T_0} (b-i\cdot\lambda)e^{(b-i\cdot\lambda)\tau} \cdot f(\tau/T_0) d\tau .$$

Тоді вираз (3) прийме вигляд:

$$U = \frac{Q_0}{2m \cdot i \cdot \lambda^2} \left\{ \frac{\lambda}{b+i\cdot\lambda} J_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t} - \frac{\lambda}{b-i\cdot\lambda} J_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t} \right\}$$

Для перевірки даної функції на екстремум візьмемо її першу похідну:

$$U'_t = \frac{Q_0}{2m \cdot i \cdot \lambda^2} \left\{ -\lambda \cdot J_1 \cdot e^{-(b+i\cdot\lambda)t} + \lambda \cdot J_2 \cdot e^{-(b-i\cdot\lambda)t} \right\} \quad (4)$$

Похідну (4) прирівнюємо до нуля:

$$J_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t_0} = J_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t_0}; \quad \frac{J_1}{J_2} = e^{2i\cdot\lambda t_0} .$$

З умови екстремуму функції  $U$  випливає, що:

$$e^{2i\cdot\lambda t_0} = \frac{J_1}{J_2} = A + B \cdot i .$$

Знаходимо:

$$t = \frac{1}{2 \cdot i \cdot \lambda} \ln |A + B \cdot i| + \frac{\pi \cdot n}{\lambda} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Зробимо перевірку функції (2) за умовою максимуму, та знайдемо другу похідну даної функції:

$$U'' = \frac{Q_0}{2m \cdot i \cdot \lambda^2} \left\{ \lambda(b+i\cdot\lambda) \cdot J_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t} - \lambda(b-i\cdot\lambda) \cdot J_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t} \right\} .$$

Залежні від часу значення  $J_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t}$  та  $J_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t}$  будуть мати вигляд:

$$J_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t_0} = J_1 e^{-\frac{(b+i\cdot\lambda)}{2i\cdot\lambda} \ln(A+B\cdot i)} \cdot e^{-\frac{(b+i\cdot\lambda)\pi\cdot n}{\lambda}} =$$

$$= J_1 \left( \frac{J_1}{J_1} \right)^{\frac{-b-i\cdot\lambda}{2i\cdot\lambda}} \cdot e^{-\frac{b\cdot\pi\cdot n}{\lambda}} \cdot e^{-i\cdot\pi\cdot n} = J_1^{x_1} \cdot J_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b\cdot\pi\cdot n}{\lambda}} \cdot e^{-i\cdot\pi\cdot n};$$

$$J_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t_0} = J_2 e^{-\frac{(b-i\cdot\lambda)}{2i\cdot\lambda} \ln(A+B\cdot i)} \cdot e^{-\frac{(b-i\cdot\lambda)\pi\cdot n}{\lambda}} = J_1^{x_1} \cdot J_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b\cdot\pi\cdot n}{\lambda}} \cdot e^{i\cdot\pi\cdot n},$$

$$\text{де: } x_1 = \frac{1}{2} + i \frac{b}{2\lambda}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - i \frac{b}{2\lambda} .$$

Звідки друга похідна прийме вигляд:

$$U''(t_0) = \frac{Q_0}{2m \cdot i \cdot \lambda^2} \cdot 2 \cdot i \cdot \lambda^2 \cdot J_1^{x_1} J_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b\cdot\pi\cdot n}{\lambda}} \cdot e^{i\cdot\pi\cdot n} = \frac{Q_0}{m} e^{-\frac{b\cdot\pi\cdot n}{\lambda}} \cdot J_1^{x_1} \cdot J_2^{x_2} \cdot e^{i\cdot\pi\cdot n} .$$

Для виконання умови максимуму необхідно щоб  $U''(t_0) \leq 0$ .

Така умова виконується лише при  $J_1^{x_1} \cdot J_2^{x_2} \geq 0$ , та  $n = 1, 2, 3, \dots$

Отримаємо статичне значення деформації ТС:  $U = U_0 = \frac{Q_0}{m \cdot \lambda^2}$ .

Коефіцієнт динамічності з урахуванням отриманих результати буде дорівнювати:

$$k = \frac{U_{\max}}{U_0} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\lambda}{b+i\cdot\lambda} \cdot I_1 e^{-(b+i\cdot\lambda)t} - \frac{\lambda}{b-i\cdot\lambda} I_2 e^{-(b-i\cdot\lambda)t} + \frac{2 \cdot i \cdot \lambda^2}{\lambda^2 + b^2} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} + \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\lambda}{b + i \cdot \lambda} \cdot I_1^{x_1} \cdot I_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b \cdot \pi \cdot n}{\lambda}} \cdot e^{-i \cdot \pi \cdot n} - \frac{\lambda}{b - i \cdot \lambda} \cdot I_1^{x_1} \cdot I_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b \cdot \pi \cdot n}{\lambda}} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot n} \right\} = \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} e^{i \cdot \pi \cdot n} \cdot I_1^{x_1} \cdot I_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b \cdot \pi \cdot n}{\lambda}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} \cdot I_1^{x_1} \cdot I_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b \cdot \pi \cdot n}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Тобто:

$$k = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + b^2} \cdot J_1^{x_1} \cdot J_2^{x_2} \cdot e^{-\frac{b \cdot \pi \cdot n}{\lambda}} \quad (6)$$

Тут в якості  $n$  потрібно взяти таке найменше ціле непарне число, щоб  $t/T_0$ , було більше одиниці.

Формула дає значення коефіцієнта динамічності для будь-якого закону навантаження  $f(t/T_0)$ . Можна показати, що коефіцієнт динамічності  $k$ , який визначається за формулою (8), завжди не більше, ніж значення коефіцієнта динамічності за відсутності опору ( $b = 0$ ), що ясно і з суті фізичного явища. Тому зазначений закон навантаження  $f(t/T_0)$  знайдемо для випадку  $b = 0$ .

У цьому випадку функціонали  $J_1$  та  $J_2$  будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned}
J_1 &= e^{i \cdot \lambda \cdot T_0} - i \cdot \lambda \int_0^{T_0} e^{i \cdot \lambda \cdot \tau} \cdot f(t/T_0) d\tau = \\
&= \cos \lambda T_0 + \int_0^{T_0} \lambda \cdot f(t/T_0) \sin \lambda \tau \cdot d\tau + i \left( \sin \lambda T_0 - \int_0^{T_0} \lambda \cdot f(t/T_0) \cos \lambda \tau \cdot d\tau \right). \\
J_2 &= e^{-i \cdot \lambda \cdot T_0} + i \int_0^{T_0} e^{-i \cdot \lambda \cdot \tau} \cdot f(t/T_0) d\tau = \\
&= \cos \lambda T_0 + \int_0^{T_0} \lambda \cdot f(t/T_0) \sin \lambda \tau \cdot d\tau - i \left( \sin \lambda T_0 - \int_0^{T_0} \lambda \cdot f(t/T_0) \cos \lambda \tau \cdot d\tau \right).
\end{aligned}$$

Формула (6) приймає такий вигляд:

$$k = 1 + \sqrt{\nu(\xi)}; \quad \xi = t/T_0. \quad (8)$$

де  $\nu = J_1 \cdot J_2$ .

$$\nu = \left( \sin \lambda T_0 - \int_0^1 \lambda T_0 \cdot f(\xi) \cos \lambda T_0 \xi d\xi \right)^2 + \left( \cos \lambda T_0 + \int_0^1 \lambda T_0 \cdot f(\xi) \sin \lambda T_0 \xi d\xi \right)^2 \quad (9)$$

Задача знаходження такого закону навантаження  $f(t/T_0)$  з ціллю забезпечення мінімуму коефіцієнта динамічності перетворюється на задачу знаходження такої функції  $f(t/T_0)$ , щоб вираз  $\nu$  мав мінімум в залежності від  $f(\xi)$ . Таким чином, поставлена задача зведена до наступного варіаційній задачі: серед будь-яких кривих, що з'єднують точки  $A(0;0)$  і  $B(1;1)$ , знайти таку криву, на якій вираз  $\nu$  прийняв би мінімальне значення. Причому функцію  $f(\xi)$  необхідно знаходити в класі монотонно зростаючих функцій.

Функцію  $f(\xi)$  беремо у вигляді ряду Фур'є такого виду:

$$f(t/T_0) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{\pi \cdot n \cdot \tau}{T_0}. \quad (10)$$

Тут  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  – поки невідомі коефіцієнти.

Для отримання значень  $\nu$  необхідно обчислити:

$$\int_0^{T_0} \lambda \cdot f\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \cos \lambda \tau \cdot d\tau = \int_0^{T_0} \frac{2a_0}{2} \cos \lambda \tau \cdot d\tau + \sum_0^{T_0} \int_0^{T_0} 2a_n \cos \frac{\pi \cdot n \cdot \tau}{T_0} \cos \lambda \tau \cdot d\tau =$$

$$\frac{a_0}{2} \sin \lambda T_0 - \sum \frac{\gamma^2 a_n}{n^2 - \gamma^2} \sin \lambda T_0 \cdot \cos \pi \cdot n = \frac{a_0}{2} \sin \lambda T_0 - \sum \frac{a_n \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} \sin \lambda T_0 \cdot \cos \pi \cdot n,$$

та:

$$\int_0^{T_0} \lambda \cdot f\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \sin \lambda \tau \cdot d\tau = \frac{a_0}{2} \lambda \int_0^{T_0} \sin \lambda \tau \cdot d\tau + \sum a_n \lambda \int_0^{T_0} \cos \frac{\pi \cdot n \cdot \tau}{T_0} \sin \lambda \tau \cdot d\tau =$$

$$\frac{a_0}{2} - \frac{a_0}{2} \cos \lambda T_0 + \sum \frac{a_n \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} (\cos \lambda T_0 \cdot \cos \pi \cdot n - 1).$$

Підставляючи значення  $f(t/T_0)$ , та значення інтегралів отримуємо:

$$v = \left[ \left(1 - \frac{a_0}{2}\right) \sin \lambda T_0 + \sum \frac{a_n \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} \sin \lambda T_0 \cdot \cos \pi \cdot n \right]^2 + \left( \gamma = \frac{\lambda \cdot T_0}{\pi} \right)$$

$$+ \left[ \frac{a_0}{2} + \left(1 - \frac{a_0}{2}\right) \cos \lambda T_0 + \sum \frac{a_n \gamma^2}{n^2 - \gamma^2} (\cos \lambda T_0 \cdot \cos \pi \cdot n - 1) \right]^2, \quad (11)$$

Знайдемо екстремум  $v = v(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , необхідні умови якого  $\frac{\partial v}{\partial a_n} = 0$ ;  $n = 0, 1, \dots$

Умови  $\frac{\partial v}{\partial a_{2n-1}} = 0$ ;  $n = 0, 1, \dots$  дають:

$$\left[ \left(1 - \frac{a_0}{2}\right) \sin \lambda T_0 + \gamma^2 \left[ \sum_{1,3,\dots} \frac{a_n}{n^2 - \gamma^2} - \sum_{2,4,\dots} \frac{a_n}{n^2 - \gamma^2} \right] \sin \lambda T_0 \right] \frac{\gamma 2}{n^2 - \gamma^2} \sin \lambda T_0 +$$

$$+ \left[ \left(1 - \frac{a_0}{2}\right) \cos \lambda T_0 + \frac{a_0}{2} - \gamma^2 \left[ \sum_{1,3,\dots} \frac{a_n}{n^2 - \gamma^2} (1 + \cos \lambda T_0) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{2,4,\dots} \frac{a_n}{n^2 - \gamma^2} (1 - \cos \lambda T_0) \right] \right] \frac{\gamma 2}{n^2 - \gamma^2} (1 + \cos \lambda T_0).$$

або:

$$\sum_{1,3,\dots} \frac{a_n}{n^2 - \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma^2} \quad \sum_{2,4,\dots} a_n - \sum_{1,3,\dots} a_n = 1 - \frac{a_0}{2}. \quad (12)$$

Тут друга рівність знайдена аналогічно з умови  $\frac{\partial v}{\partial a_{2n}} = 0$ ; ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Якщо підставити вирази сум (12), то отримуємо  $v = 0$ . Отже це є умови мінімуму, тому що  $v$  – істотно додатня величина. З огляду на те, що функція  $f(t/T_0)$  задовольняє умовам  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  маємо:

$$\sum_{2,4,\dots} a_n = \frac{1 - a_0}{2}; \quad \sum_{1,3,\dots} a_n = -\frac{1}{2}. \quad (13)$$

Можна підібрати багато значень  $a_n$ , що будуть задовольняти умовам, причому при виконанні цих умов  $v_{\min} = 0$  тобто  $k = 1$ .

Зокрема, можна прийняти:

$$a_{2n-1} = \frac{A_1}{2n-1} + \frac{A_2}{(2n-1)^2 - \alpha_2^2} + \frac{A_3}{(2n-1)^2 + \alpha_3^2}, \quad a_{2n} = 0. \quad (14)$$

Якщо підставити (14) в (10) і підсумувати, то знайдемо  $f(t/T_0)$ :

$$f = \frac{a_0}{2} + \frac{A_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi \cdot t}{2T_0} + A_2 \pi \sin \pi \alpha_2 \left( \frac{1}{2} - t/T_0 \right) + \frac{A_3}{4\alpha_2 \operatorname{sh} \pi \alpha_3} \left[ \operatorname{ch} \pi \alpha_3 \left( 1 - \frac{t}{T_0} \right) - \operatorname{ch} \frac{\pi \alpha_3 t}{T_0} \right],$$

причому  $a_0, A_1, A_2, A_3, \dots, \alpha_2, \alpha_3$  – постійні, що задовольняють умовам (12); звідси випливає, що в такій загальній постановці задача має не єдине рішення. Однак поки не були використані умови монотонного зростання функції  $f(t/T_0)$ .

Дуже імовірно, що при цій додатковій умові задача буде мати єдине рішення.

Подальше знаходження коефіцієнтів Фур'є  $a_n$  ряду проводиться аналітичним підбором.

Нехай  $A_3 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ , а інші постійні дорівнюють нулю. Тоді:

$$a_{2n-1} = \frac{A_2}{(2n-1)^2 - \alpha_2^2}. \quad (15)$$

З рівняння (11) отримаємо:

$$f(t/T_0) = \frac{a_0}{2} + A_2 \frac{\pi \sin \pi \alpha_2}{4\alpha_2 \cos \frac{\pi \alpha_2}{2}} \left( \frac{1}{2} - t/T_0 \right).$$

Умова (12) дає  $a_0 = 1$ . В даному випадку рівняння (13) приймає вид тотожності. Тоді рівняння (12) та (13) будуть дорівнювати:

$$A_2 \sum_{1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \gamma^2} \frac{1}{n^2 - \alpha_2^2} = \frac{1}{2\gamma^2}; \quad A_2 \sum_{1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha_2^2} = -\frac{1}{2}. \quad (16)$$

Підсумовуючи останні ряди, знайдемо:

$$A_2 = -\frac{2\alpha_2}{\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot \alpha_2}{2}}; \quad \frac{A_2}{\alpha_2^2 - \gamma^2} \left[ \frac{\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot \alpha_2}{2}}{4\alpha_2} - \frac{\pi^2 \operatorname{tg} \frac{\lambda T_0}{2}}{4\lambda T_0} \right] = \frac{1}{2\gamma^2}. \quad (17)$$

З цього випливає, що  $\alpha_2$  має задовольняти рівнянню:

$$\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda T_0}{2} = \alpha_2 \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot \alpha_2}{2}; \quad \alpha_2 \neq \gamma. \quad (18)$$

Рекомендується брати найменший корінь рівняння.

Підставивши знайдені значення  $a_0$  і  $A_2$ , в вираз (15) знайдемо:

$$f(t/T_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \alpha_2}{2}} \sin \left[ \pi \cdot \alpha_2 \left( \frac{1}{2} - t/T_0 \right) \right]. \quad (19)$$

Дослідження показує, що даний закон задовольняє всім умовам (сформульованим на початку), якщо  $2\pi \leq \lambda T_0 \leq 3\pi$ .

Причому  $\alpha_2$  визначається з рівняння (18).

Значення найменшого кореня цього рівняння для деяких значень  $\lambda T_0$  наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

$\lambda T_0 = 2\pi$	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	$3\pi$
$\alpha_2 = 0$	0,625	0,822	0,913	1

Щоб одержати  $f(t/T_0)$  для  $\lambda T_0 < 2\pi$ , розглянемо другий окремий випадок.

Приймаємо у виразі (14)  $A_3 \neq 0; \alpha_3 \neq 0$ , а всі інші постійні дорівнюють нулю. Повторюючи розрахунок, що наведений вище, отримаємо:

$$f(t/T_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \alpha_3}{2}} \operatorname{sh} \left[ \pi \cdot \alpha_3 \left( \frac{1}{2} - t/T_0 \right) \right]. \quad (20)$$

Значення  $\alpha_3$  визначається за таким рівнянням:

$$\frac{\pi \cdot \alpha_3 \cdot \operatorname{th} \pi \alpha_3}{2} = - \frac{\lambda \cdot T_0 \cdot \operatorname{th} \lambda \cdot T_0}{2} \quad (21)$$

Корені рівняння (21) наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

$\lambda T_0 = 2\pi$	$7\pi/4$	$3\pi/2$	$5\pi/4$	$\pi$
$\alpha_3 = 0$	1	4	20	$\infty$

На рисунку 2 наведені графіки  $f(t/T_0)$ , обчислені за формулами (19) та (20). Безпосередньою перевіркою переконаємося, що для (19) та (20) величина  $U$ , підрахована за формулою (2) не має екстремуму при  $0 < t/T_0 < 1$ .

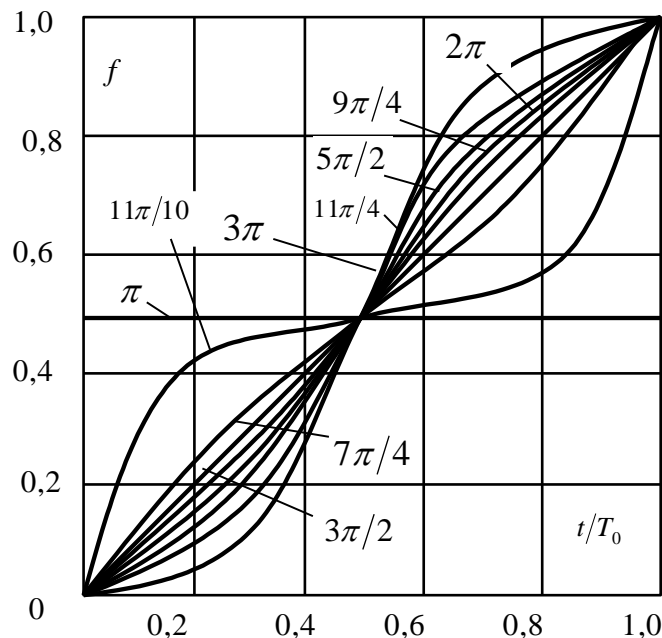


Рис. 2. Приклади різних законів навантаження, що забезпечують значення коефіцієнта динамічності  $k=1$

Формули (19) та (20) дозволяють отримувати закони навантаження технологічної системи, за яких коефіцієнт динамічності приймає значення  $k = 1$ , тобто якщо ми задаємося деяким періодом часу, за який буде виконано навантаження ТС, ми отримаємо динаміку системи, яка відповідає повільному навантаженню. Закон навантаження при торцевому фрезеруванні, для моделі, яка враховує вплив лише колової сили різання, може визначатися декількома параметрами: тертям по передній і задній поверхнях ріжучих ножів, зносом інструменту тощо, але основним чинником є геометрія інструменту. В момент врізання ножа в заготовку поступовий приріст площі передньої поверхні ножа, що приймає участь в різанні, визначає закон навантаження леза ріжучого елемента. Якщо вважати, що на одиницю площі задіяної в різанні діє постійне за величиною розподілене навантаження, яке утворює сумарну миттєву силу різання, а також враховуючи, що в початковий момент врізання сила дорівнює нулю, а в момент, коли зрізається весь поперечний переріз, сила приймає сталі значення, то геометрією інструмента можна задати таке положення передньої поверхні, щоб вона забезпечувала таку

зміну сили різання в часі, яка б задавала значення мінімуму коефіцієнта динамічності. Таким чином, отримані аналітичні залежності дають можливість визначати геометрію ріжучих елементів, з ціллю реалізації більш стабільного процесу фрезерування.

#### Висновки:

1. Розглянуто аспекти динаміки глибинного торцевого фрезерування з величинами припусків 6–8 мм, а саме було проаналізовано дію моментів врізання інструменту в заготовку, а також побудовано математичний апарат для визначення мінімуму коефіцієнта динамічності технологічної системи.

2. Отримані аналітичні залежності дозволяють визначати такий закон навантаження ріжучого елемента інструмента для досягнення мінімуму динамічного впливу на інструмент.

3. Для визначення достовірності проведених теоретичних розрахунків і можливості їх впровадження у виробничих умовах необхідним є проведення в подальшому експериментальних досліджень.

#### Список використаної літератури:

1. Технологические особенности механической обработки инструментом из поликристаллических сверхтвердых материалов / Г.Г. Карюк и др. – К. : Наукова думка, 1991. – 281 с.
2. Горчаков Л.М. Исследование динамических погрешностей обработки при прерывистом резании : дис. ... канд. тех. наук / Л.М. Горчаков. – Орджоникидзе, 1968.
3. Манасян А.А. Закон нагружения системы, обеспечивающий минимум коэффициента динамичности / А.А. Манасян // «Известия АН СССР. Механика и машиностроение». – 1961. – № 4. – С. 178–180.
4. Петухов Л.В. О минимуме коэффициента динамичности / Л.В. Петухов, В.А. Троицкий // «Труды ЛПИ им. М.И. Калинина» (Механика и процессы управления. Вычислительная математика)». – 1969. – № 307. – С. 31–38.
5. П.П. Мельничук Глубинное косоугольное фрезерование // Вопросы механики и физики процессов резания и холодного пластического деформирования : сб. науч. тр. Института сверхтвердых материалов им. В.Н. Бакуля НАН Украины / Серия Г: Процессы механической обработки, станки и инструменты. – Киев, 2002. – 541 с.
6. Лояцянский Л.Г. Курс теоретической механики: в 2-х т. / Л.Г. Лояцянский, А.И. Лурье. – 6-е изд., пере раб и доп. – Т. 2. Динамика. – М. : Наука, 1983. – 640 с.
7. Громовий О.А. Розробка чистових косокутних торцевих фрез з комбінованими схемами різання / О.А. Громовий // Нац. технічний ун-т України «КПІ». – К., 2002.
8. Остафьев В.А. Расчет динамической прочности режущего инструмента / В.А. Остафьев. – М. : Машиностроение, 1979. – 168 с.
9. Виговський Г.М. Підвищення працездатності торцевих фрез для чистової обробки плоских поверхонь : дис. ... техн. наук / Г.М. Виговський. – К., 2000. – 161 с.
10. Розенберг А.М. Силы и мощность при обработке металлов торцовыми фрезами из СТМ / А.М. Розенберг, О.А. Розенберг. – Сверхтвердые материалы. – 1988. – № 1. – С. 47–54.
11. Бушля В.М. Підвищення продуктивності чорнової обробки плоских поверхонь чавунних деталей торцевими фрезами з надтвердих матеріалів : автореф. дис. ... канд. техн. наук / В.М. Бушля ; Нац. техн. ун-т України «КПІ». – К., 2007. – 20 с.
12. Мельничук П.П. Наукові основи чистового торцевого фрезерування плоских поверхонь : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.03.01 / П.П. Мельничук ; Нац. техн. ун-т України «КПІ», Житомир інженер.-технол. ін-т. – К., 2002. – 36 с.

#### References:

1. Karyuk, H.H. y dr. (1991), «Tekhnolohycheskye osobennosti mekhanycheskoy obrabotky ynstrumentom yz polykrystallycheskykh sverkhтвердыkh materyalov», Naukova dumka, 281 s.
2. Horchakov, L.M. (1968), *Yssledovanye dynamycheskykh pohreshnostey obrabotky pry preryvystom rezanyu: dissertation*, Ordzhonykydze.



3. Manasyan, A.A. (1961), «Zakon nahruzhenyya systemy, obespechuyayushchyy mynimum koeffytsyenta dynamychnosti», *Yzvestyya AN SSSR. Mekhanyka y mashynostroenie*, Vol. 4, Pp. 178–180.
4. Petukhov, L.V. and Troitskiy, V.A. (1969), «O mynymume koeffytsyenta dynamychnosti», *Trudy LPY im. M. Y. Kalynyna*, (Mekhanyka y protsessy upravlenyya. Vychyslytel'naya matematyka), Vol. 307, Pp. 31–38.
5. Melnychuk, P.P. (2002), «Hlubynnoe kosouhol'noe frezerovanie», *Voprosy mekhanyky i fizyky protsessov rezanyya i kholodnoho plastycheskoho deformatsionnyykh*, Sb. nauch. tr. Instytuta sverkhverdnykh materiyalov im. V.N. Bakulya NAN Ukrainy, Seryya H: Protsessy mekhanycheskoy obrabotky, stanky i ynstrumenty, Kyev, 541 s.
6. Loyatsyanskiy, L.H. and Lure, A.Y. (1983), «Kurs teoreticheskoj mekhaniky: v 2-kh T», 6-e yzd., pererab i dop, M., Nauka, 640 s.
7. Gromovyy, O.A. (2002), «Rozrobka chystovykh kosokutnykh tortsevykh frez z kombinovanykh skhemamy rizannya», *Natsionalnyy tekhnichnyy universytet Ukrainy "Kyivskyy politekhnichnyy instytut"*, Kyev.
8. Ostaf'ev, V.A. (1979), «Raschet dynamycheskoy prochnosti rezhushcheho instrumenta», M., Mashynostroenie, 168 s.
9. Vygovskyy, G.M. (2000), «Pidvyshchennya pratsezdatsnosti tortsevykh frez dlya chystovoyi obrobky ploskykh poverkhon': *dissertation*, Kyev, 161 s.
10. Rozenberg, A.M. and Rozenberg, O.A. (1988), «Syly moshchnost pry obrabotke metallov tortsovymy frezamy yz STM», *Sverkhverdie materiyali*, Vol. 1, Pp. 47–54.
11. Bushlya, V.M. (2007), *Pidvyshchennya produktyvnosti chornovoyi obrobky ploskykh poverkhon' chavunnykh detaley tortsevymy frezamy z nadtverdnykh materialiv: dissertation*, Nats. tekhn. un-t Ukrainy "Kyiv. politekhn. in-t.", Kyev, 20 p.
12. Melnychuk, P.P. (2002), *Naukovi osnovy chystovoho tortsevoho frezeruvannya ploskykh poverkhon'*: author's abstract, Nats. tekhn. un-t Ukrainy "Kyev. politekhn. in-t, Zhytomyr inzhener.-tekhnol. in-t. Kyev, 36 s.

ВИГОВСЬКИЙ Георгій Миколайович – кандидат технічних наук, професор кафедри технологій машинобудування, проректор з науково-педагогічної роботи Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- обробка металів різанням;
- проектування різальних інструментів.

ГРОМОВИЙ Олексій Андрійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри технологій машинобудування, декан факультету інженерної механіки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- обробка металів різанням;
- моделювання технологічних процесів.

Стаття надійшла до редакції 09.09.2016.